Bollettino Unione Matematica Italiana

Giorgio Sestini

Sulla meccanica dei mezzi continui disgregati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.1, p. 38–44.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_38_0>

Sulla meccanica dei mezzi continui disgregati.

Nota di G. SESTINI (a Firenze) (*).

Sunto. - *Si studia il moto di un mezzo continuo disgregato, distribuito con simmetria sferica attorno ad un nucleo rigido sferico, sotto l'azione gravitazionale del nucleo e delle mutue attrazioni tra le singole particelle del mezzo.*

1. **Premesse.** — Un mezzo materiale continuo si chiama *disgregato* quando si possono trascurare le forze agenti sull'unità di volume dovute agli sforzi interni di fronte alle forze specifiche di massa. Le equazioni che reggono il moto di un mezzo disgregato sono ancora quelle classiche dei mezzi continui, salvo che in esse non compaiono più gli sforzi interni e che la distribuzione delle masse è legata al moto soltanto dall'equazione di continuità. Di questi sistemi si è occupato il LEVI-CIVITA (¹) nell'ipotesi di materia distribuita con continuità in tutto lo spazio, la quale si trovi soggetta unicamente alla propria *gravitazione.* In questo caso, come del resto nel caso di forze qualsiasi, affinchè un mezzo continuo possa ritenersi disgregato, è intuitivo che la sua densità non debba superare un certo limite, in generale assai piccolo, perchè solo in tal caso saranno a ritenersi trascurabili, rispetto alle forze gravitazionali, gli sforzi dovuti alle azioni molecolari. Ne segue che la condizione di essere un mezzo disgregato, viene a mancare tutte le volte che, per effetto del moto, la densità supera quel valore limite e in tal caso cessano di valere tutte le formule trovate con quella condizione. L'intervento di forze gravitazionali e quindi di un potenziale gravitazionale richiede che questo soddisfi all'equazione di POISSON, per i punti del mezzo disgregato. Si ha così per la determinazione del moto un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che, una volta integrato, permette di determinare la posizione di ciascuna particella e la densità del mezzo in funzione del tempo, oltre che delle condizioni iniziali. L'effettiva integrazione del sistema differenziale presenta tuttavia note-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico della R. Università di Firenze.

(¹) T. LEVI-CIVITA, *Moti gravitazionali in una dimensione*, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », serie 6ª, vol. II, pp. 365-371 (1925); *Movimenti per sola gravitazione di un sistema continuo*, scritti offerti a L. BERZOLARI, Pavia 1936, pp. 161-168.

voli difficoltà, talchè conviene ricorrere a qualche ipotesi semplificatrice. Il LEVI-CIVITA si limita, nei lavori ricordati, a trattare completamente i casi di moti unidirezionali, supponendo la densità del mezzo inizialmente variabile per strati piani paralleli ad una giacitura fissa, e dei moti così detti « *lenti* », nel qual caso le equazioni del sistema, scritte per il caso generale, si riducono ad una equazione differenziale ordinaria tra la densità e il tempo di facile integrazione.

Le equazioni scritte portano, anche nel caso generale, a delle interessanti conclusioni cinematiche, valide per i mezzi disgregati soggetti soltanto alla propria gravitazione, come ha fatto vedere il CISOTTI (2). Scende immediatamente da quelle equazioni che: *a*) un tal mezzo non può essere nè in quiete, nè muoversi di moto rigido traslatorio uniforme; *b*) se il mezzo è incomprimibile, i moti possibili sono necessariamente vorticosi e, in tal caso, si può stabilire una limitazione tra la velocità di rotazione e la densità.

2. **Posizione del problema.** — Consideriamo adesso un mezzo continuo disgregato, che occupi inizialmente una regione finita dello spazio, contigua ad un nucleo sferico rigido di raggio a e di massa m_1, dotata di simmetria sferica rispetto al centro O del nucleo. Supporremo questo omogeneo o più generalmente faremo l'ipotesi che la sua densità varî per strati sferici concentrici, con che la sua azione gravitazionale sui punti esterni equivale a quella della sua massa concentrata nel centro. Supponiamo che in un istante, che assumeremo come origine dei tempi, la densità del mezzo varî con continuità per superficie sferiche concentriche col centro in O; se questa densità è inoltre sufficientemente piccola, potremo ritenere trascurabili gli sforzi interni, cosicchè le particelle del mezzo si troveranno soggette soltanto alla risultante delle mutue attrazioni gravitazionali tra le singole particelle e all'azione gravitazionale del nucleo. La risultante di queste forze, agenti su ciascuna particella, è manifestamente una forza radiale e quindi, se inizialmente si assegna una distribuzione di velocità puramente radiale, anche negli istanti successivi il moto si manterrà tale.

Lo scopo di questo lavoro è lo studio di questo speciale moto, che può essere completamente caratterizzato, come del resto aveva

(2) U. CISOTTI, *Sulla meccanica dei mezzi continui disgregati*, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », serie 6ª, vol. XXVI, pp. 202-208 (1937); cfr. anche *Sorgenti in mezzi disgregati*, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », serie 6ª, vol. XXVI, pp. 305-310 (1937); *Sulla regolarizzazione delle sorgenti idrodinamiche*, « Atti R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. 73 (1938).

già accennato il LEVI-CIVITA. I risultati cui sono giunto sono però sostanzialmente diversi da quelli trovati dal LEVI-CIVITA per il caso di una distribuzione iniziale di densità variabile per strati piani paralleli. Infatti, mentre in questo caso, il moto di ogni singola particella risulta uniformemente accelerato, nel mio caso la legge del moto dipende dalle distribuzioni iniziali di velocità e di densità. In particolare, dipendentemente da queste distribuzioni, si possono avere particelle che tendono ad avvicinarsi al nucleo, altre che tendono ad allontanarsene indefinitamente, altre infine, che, dopo essersene allontanate fino ad una distanza ben determinata, invertono il loro moto dirigendosi quindi verso il nucleo. Riguardo poi alla regolarità del moto, il che impone che la densità resti finita in qualsiasi istante, mentre nel caso del LEVI-CIVITA questa regolarità non può conservarsi indefinitamente, nel mio caso, esistono anche distribuzioni iniziali di velocità e di densità che assicurano indefinitamente la regolarità del moto. È però bene notare subito che, ancor prima che il moto diventi non regolare, data la continuità della densità del mezzo, questo cessa di soddisfare alle condizioni fondamentali di essere un mezzo disgregato, con che cessa la validità delle formule scritte. Si può infine osservare che sono rispettate per questo moto tutte le condizioni cinematiche rilevate dal CISOTTI.

3. Equazioni del problema. — Sia dunque assegnato un mezzo disgregato soddisfacente a tutte le condizioni imposte. Anzichè scrivere le equazioni differenziali del problema, specializzando le ordinarie equazioni per il moto dei mezzi continui, conviene in questo caso scriverle direttamente, seguendo il metodo Lagrangiano o sostanziale, cioè seguendo nel suo moto una ben determinata particella. È manifesto, dopo quanto è stato supposto, che la posizione di ciascuna particella è determinata quando se ne conosca la sua distanza $r \geq a$ dal centro O in funzione del tempo e della distanza iniziale $r_0 > a$. Il moto sarà poi completamente caratterizzato quando si conosca la densità del mezzo $\mu(r_0, t)$ a partire da una distribuzione iniziale $\mu_0(r_0)$, con μ_0 simbolo di funzione continua ed uniformemente limitata, essendo inoltre il suo limite superiore sufficientemente piccolo.

Considerate in un dato istante, ad es. $t = 0$, le particelle che costituiscono una crosta sferica di spessore infinitesimo di raggi r_0 e $r_0 + dr_0$, con densità $\mu_0(r_0)$, se durante il moto si inseguono queste particelle, all'istante t esse costituiranno un'altra crosta sferica di raggi r e $r + dr$ e di densità $\mu(r, t)$. Per il principio della conservazione della massa dovrà aversi

$$\mu(r,\, t) r^2 dr = \mu_0(r_0) r_0^2 dr_0,$$

che può scriversi

$$\mu(r,\, t) = \mu_0(r_0) \frac{r_0^2}{r^2} \frac{\partial r_0}{\partial r}. \tag{1}$$

Questa, che non è altro che l'equazione di continuità, esprime in termini finiti, ove si conosca $r = r(r_0,\, t)$ la densità μ in funzione di r_0 e t. Essendo nel nostro caso $r \geq a$, la (1) mostra che μ diviene infinita solo quando $\frac{\partial r}{\partial r_0} = 0$. Da quanto precede si ha poi

$$4\pi \int_a^r \mu(\xi,\, t) \xi^2 d\xi = 4\pi \int_a^{r_0} \mu_0(\xi) \xi^2 d\xi = m_0,$$

dove m_0 è la massa del mezzo disgregato racchiusa dalla superficie sferica passante per la posizione iniziale della particella. La relazione ora scritta, che è una forma integrale dell'equazione di continuità, conferma che al variare della superficie colle particelle giacenti su essa, la massa racchiusa non varia. Sulla unità di massa in ciascun punto della regione occupata dal nostro mezzo, agisce la risultante delle forze dovute all'azione del nucleo e alle mutue azioni gravitazionali tra le particelle del mezzo. Se il punto considerato dista di r dal centro O, l'azione del nucleo è rappresentata da grad $\frac{fm_1}{r}$, con $f = 6{,}7.10^{-8}$ u. C. G. S. indicando la costante gravitazionale, mentre la risultante delle mutue attrazioni gravitazionali è espressa da grad $\frac{fm_0}{r}$. Se pertanto si pone $m = m_0 + m_1$, la risultante delle forze agenti sull'unità di massa, posta nel punto considerato, è data da

$$\text{grad}\, \frac{fm}{r}.$$

Assegnata inizialmente una distribuzione di velocità $\dot{r}_0(r_0)$ puramente radiale, l'equazione di moto relativa alla particella considerata, si riduce all'unica equazione scalare

$$\ddot{r}^2 = -\frac{mf}{r^2}, \tag{2}$$

il cui integrale primo è fornito dall'integrale delle forze vive che può scriversi

$$\dot{r}^2 = \frac{2mf}{r} + \dot{r}_0^{\,2} - \frac{2mf}{r_0}$$

e che, posto $\alpha = \sqrt{2fm}$ e $\beta = \frac{\dot{r}_0^2}{\alpha} - \frac{1}{r_0}$, assume la forma

$$\pm \dot{r} = \alpha \left(\frac{1}{r} + \beta \right)^{1/2}, \tag{3}$$

valendo il segno superiore se $\dot{r}_0 > 0$, il segno inferiore se $\dot{r}_0 \leq 0$. Con una successiva integrazione, sempre effettuabile in termini finiti, si ricava t in funzione di r e di r_0

$$t = f(r, r_0) \tag{4}$$

e quindi

$$r = r(r_0, t). \tag{5}$$

Si vede subito, dipendendo β da r_0, $\dot{r}_0$ e μ_0, che possono verificarsi, dipendentemente dalle condizioni iniziali, i tre casi $\beta \gtreqless 0$, con che la (4) e corrispondentemente la (5), assumono espressioni diverse. La (3) però mostra subito che se $\dot{r}_0 \leq 0$, qualunque sia β e quindi qualunque siano r_0 e μ_0, il moto è sempre diretto verso il centro O. Se invece $\dot{r}_0 > 0$ il senso del moto dipende dal segno di β e precisamente se $\beta \geq 0$ le particelle si allontanano indefinitamente dal centro O, se invece è $\beta < 0$, dato che per la realtà di $\dot{r}$ occorre che sia $r \leq \beta^{-1}$, dopo un allontanamento iniziale fino alla distanza $r = \beta^{-1}$, ove la velocità si annulla, le particelle invertono il loro moto. Se è $\dot{r}_0 \leq 0$ si puo determinare il tempo $t^*(r_0)$ che una particella impiega per giungere dalla sua posizione iniziale sul nucleo ove $r = a$. Si noti però che sul nucleo si verrebbe ad avere una condensazione infinita di materia, con relativi urti, già prima che le particelle, che inizialmente si trovavano più lontane, giungano sul nucleo le nostre formule hanno cessato di valere. Per assegnate distribuzioni iniziali di densità può inoltre verificarsi il fatto che vi siano degli $\bar{r}(r_0, t)$ determinati dalla (5), che soddisfino l'equazione $\frac{\partial r}{\partial r_0} = 0$, con che $\mu(\bar{r}, t) = +\infty$; corrispondentemente la (4) ci darà l'istante $\bar{t}(r_0)$ in cui questo fatto avviene, notando che, perchè la cosa possa interessare, dovrà essere $\bar{t}(r_0) \quad t^*(r_0)$. In tali casi esisterà un istante $\tau < \bar{t}(r_0) < t^*(r_0)$ a partire dal quale, e quindi prima che le particelle arrivino sul nucleo, le nostre formule cessano di valere, non potendo più il mezzo considerarsi come disgregato. Se invece $\dot{r}_0 > 0$, per ogni istante finito, il moto si mantiene regolare.

Il caso $\beta = 0$, per il quale i calcoli si semplificano notevolmente, mette in evidenza come possano verificarsi tutte le circostanze sopra enunciate.

4. **Caso** $\beta = 0$. — Se $\beta = 0$, il che si verifica per $|\dot{r}_0| = \frac{\alpha}{\sqrt{r_0}}$, le (3), (4), (5), divengono rispettivamente

$$(3') \quad \pm \dot{r} = \alpha r^{-1/2}, \qquad (4') \quad t = \pm \frac{2}{3\alpha}(r^{3/2} - r_0^{3/2}), \qquad (5') \quad r = \left(r_0^{3/2} \pm \frac{3}{2}\alpha t\right)^{2/3}.$$

Corrispondentemente, sostituendo nella (1) al posto di r la sua espressione data dalla (5'), si ha

$$(1') \qquad \mu(r, t) = \mu_0(r_0)\left(\frac{r_0}{r}\right)^{3/2} \frac{\alpha}{\alpha \pm 4\pi f \mu_0 r_0^{3/2} t}.$$

Se è $\dot{r}_0 > 0$ la (5') mostra che $\lim_{r \to \infty} r = +\infty$ e, dato che $\lim_{r \to \infty} \dot{r} = 0$, si può concludere che, a partire dalla posizione iniziale, tutte le particelle si allontanano indefinitamente dal centro O del nucleo con moto ritardato; la (1'), nel denominatore della quale in questo caso va preso il segno $+$, assicura la regolarità del moto per ogni t finito. Sia adesso $\dot{r}_0 < 0$. Il tempo $t^*(r_0)$ è espresso da

$$(6) \qquad t^*(r_0) = \frac{2}{3\alpha}(r_0^{3/2} - a^{3/2}).$$

In questo caso non si può assicurare, qualunque sia la distribuzione iniziale di densità, per ogni particella la regolarità del moto in tutti gli istanti compresi tra O e t^*. Infatti è $\mu = \infty$ in quegli istanti $t(r_0) = \frac{\alpha}{4\pi f \mu_0 r_0^{3/2}}$, che annullano il denominatore della (1') e che non superano il $t^*(r_0)$ dato dalla (6); ciò importa

$$(7) \qquad m < \frac{4}{3}\pi \mu_0 r_0^3$$

e quindi, almeno in questo caso, se la distribuzione iniziale di densità μ_0 non è tale da soddisfare alla (7), anche per moti diretti verso il centro, la regolarità può essere assicurata. In particolare il moto si mantiene regolare, quando il mezzo inizialmente è omogeneo con la stessa densità media del nucleo. Infatti in tal caso, qualunque sia $r_0 \geq a$, è $m = \frac{4}{3}\pi \mu_0 r_0^3$ contrariamente alla (7).

Se per r_0, a, μ_0, m_1 si assumono valori dell'ordine di grandezza di 10^{13} km, 10^5 km, 10^{-18} gr/cm, 10^{33} gr, si vede subito che il caso $\beta = 0$ è verificato per una distribuzione iniziale di velocità dell'ordine di 10 km/sec.

Questi valori, come ordine di grandezza, si riscontrano nelle nebulose planetarie con nucleo eccitatore [3]. A conti fatti si vede

[3] G. Armellini, *Trattato di Astronomia siderale*, vol. III, pp. 131-74, Zanichelli, 1936.

anche che i due tempi $\bar{t}$ e t^* risultano dello stesso ordine, il che assicura la regolarità del moto.