
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIA PASTORI

Un tensore sestuplo isotropo che si incontra in teoria della relatività

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.1, p. 35–37.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_35_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1939.

Un tensore sestuplo isotropo che si incontra in teoria della relatività.

Nota di MARIA PASTORI (a Milano).

Sunto. - *Si dimostra che il legame tra tensore d'energia e quadrato del tensore elettromagnetico, in teoria della relatività, è rappresentato dal più generale tensore sestuplo isotropo dello spazio-tempo, a contrazione nulla rispetto ai primi due indici.*

1. **Il tensore di energia elettromagnetica.** — Si presenta in teoria della relatività un tensore doppio simmetrico, di cui ciascuna componente è una forma quadratica delle componenti del tensore elettromagnetico: è il tensore di energia. Si ha infatti, indicando con ε la costante dielettrica, con F_{jh} ($j, h, i, k = 0, 1, 2, 3$) le componenti del tensore elettromagnetico, con g_{ik} quelle del tensore fondamentale:

$$(1) \quad E_{ik} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left(F_{ih} F_k{}^h - \frac{1}{4} g_{ik} F_{jh} F^{jh} \right).$$

In relatività ristretta, e rispetto a quel riferimento cartesiano per cui tre delle componenti del tensore emissimmetrico F_{jh} coincidono con le componenti dell'induzione elettrica e le altre tre con quelle dell'induzione magnetica, le componenti del tensore (1) hanno il significato seguente: quando nessuno degli indici è nullo, sono opposti agli sforzi maxwelliani, quando uno solo degli indici ha valore zero, eguagliano, a meno di un fattore, le componenti del vettore di POYNTING, finalmente se entrambi gli indici sono nulli, si ha l'opposto della densità d'energia.

2. Legame tensoriale tra il tensore d'energia e il quadrato del tensore elettromagnetico. — Per il fatto che tutte le componenti E_{ik} sono forme quadratiche delle componenti F_{jh} , e per le leggi dell'algebra tensoriale, deve esistere un tensore sestuplo che esprime il legame tra il tensore d'energia e il quadrato del tensore elettromagnetico. Indicando tale tensore con γ , si deve cioè avere:

$$(2) \quad E_{ik} = \gamma_{ikjh'rs} F^{jh} F^{rs}.$$

Confrontando con (1), si trova:

$$(3) \quad \gamma_{ikjh'rs} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(g_{ij} g_{h'r} g_{hs} - \frac{1}{4} g_{ik} g_{j'} g_{rs} \right),$$

che si presenta come un particolarissimo tensore isotropo (¹). Esso è a contrazione nulla rispetto ai primi due indici, il che esprime che il tensore d'energia è ad invariante lineare nullo (²); si ha infatti:

$$(4) \quad \gamma_i^i \cdot_{jh'rs} = 0.$$

3. L'espressione del tensore d'energia dedotta dall'ipotesi dell'isotropia del legame. — Si può inversamente notare che se al legame, necessariamente della forma (2), tra tensore d'energia e quadrato del tensore elettromagnetico, si impone la condizione d'isotropia, se cioè al posto del tensore γ si pone il più generale

(¹) Vedi U. CISOTTI, *Tensori isotropi* (« Rend. Lincei », serie 6^a, vol. XI, 1930, pp. 727-731); *Tensori isotropi e tensori emisotropi* (Ibid., pp. 917-920); *Tensori quadrupli isotropi* (Ibid., pp. 1055-1058); M. PASTORI, *Sui tensori isotropi: relazioni tra le componenti* (Ibid., serie 6^a, vol. XII, 1930, pagine 374-379); *Espressione generale dei tensori isotropi* (Ibid., pp. 499-502).

(²) Per le conseguenze che da questa proprietà possono dedursi relativamente al problema cosmologico, vedi B. FINZI, *La pressione di radiazione nella cosmologia relativistica* (« Rend. Ist. Lomb. », vol. LXXI, 1938, pp. 257-264).

tensore sestuplo isotropo, si ricade necessariamente in (3), a meno del valore dei due coefficienti. Poniamo infatti, servendoci dell'espressione del più generale tensore sestuplo isotropo ⁽³⁾:

$$(5) \quad \gamma_{ijkhrs} = A_1 g_{ih} g_{jh} g_{rs} + A_2 g_{ik} g_{jv} g_{hs} + A_3 g_{ik} g_{js} g_{hr} + A_4 g_{ij} g_{kh} g_{rs} \\ + A_5 g_{ij} g_{kr} g_{hs} + A_6 g_{ij} g_{hs} g_{hr} + A_7 g_{ih} g_{kj} g_{rs} + A_8 g_{ih} g_{kr} g_{js} \\ + A_9 g_{ih} g_{ks} g_{jr} + A_{10} g_{iv} g_{kj} g_{hs} + A_{11} g_{iv} g_{kh} g_{js} + A_{12} g_{iv} g_{ks} g_{jh} \\ + A_{13} g_{is} g_{kj} g_{hr} + A_{14} g_{is} g_{kh} g_{jr} + A_{15} g_{is} g_{kr} g_{jh}.$$

Se sostituiamo nel secondo membro di (2) e teniamo conto dell'emissimmetria di F_{jh} , vediamo che si annullano i termini di coefficienti $A_1 A_4 A_7 A_{12} A_{15}$, e si ha per gli altri:

$$\gamma_{ijkhrs} F^{jh} F^{rs} = (A_2 - A_3) g_{ik} g_{jv} g_{hs} + \\ + (A_5 - A_6 - A_8 + A_9 + A_{10} - A_{11} - A_{13} + A_{14}) g_{ij} g_{kh} g_{hs} F^{jh} F^{rs}.$$

Quindi, con un evidente cambiamento di notazioni:

$$(6) \quad \gamma_{ijkhrs} = B g_{ik} g_{jv} g_{hs} + C g_{ij} g_{kh} g_{hs}$$

che coincide appunto con (3) a meno del valore dei coefficienti B e C ⁽⁴⁾.

Se inoltre al tensore (6) imponiamo la condizione (4), equivalente alla condizione fisica che l'invariante di curvatura dipenda solo dalla distribuzione di materia ⁽⁵⁾, abbiamo:

$$(4B + C) g_{jv} g_{hs} = 0,$$

qualunque siano g_{jv} e g_{hs} , e quindi:

$$(7) \quad B = -\frac{1}{4} C.$$

Sostituendo in (6) si ricade in (3), ove si dia al coefficiente, rimasto finora arbitrario, il significato di $\frac{1}{4\pi\epsilon}$, e quindi la (2) viene a coincidere con la (1).

Possiamo quindi concludere che *il legame tra il tensore d'energia e il quadrato del tensore elettromagnetico è rappresentato dal più generale tensore sestuplo isotropo, a contrazione nulla rispetto ai primi due indici.*

⁽³⁾ M. PASTORI, loco secondo cit..

⁽⁴⁾ Tale indeterminazione è ben naturale perchè nel più generale tensore isotropo i coefficienti hanno valori arbitrari.

⁽⁵⁾ B. FINZI, loco cit., p. 261.