Giuseppe Palamà

Sulla soluzione polinomiale della $(a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.1, p. 27–35.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_27_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1939.

Sulla soluzione polinomiale della $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0.$

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce).

Sunto. - *Si risolve l'equazione differenziale del titolo riducendola a quella cui soddisfa* $L_n^{(\alpha)}(x)$, *quindi si studia la sua soluzione polinomiale e si stabilisce una interessante relazione limite fra i polinomi di* LAGUERRE *e quelli d'* HERMITE.

In questi ultimi anni diversi autori si sono occupati della soluzione polinomiale della

$$(1)\qquad (a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0,$$

o per determinare la natura delle radici di essa come ha fatto il BURGATTI (1) prima e il LEVI (2) poi, completando gli studi del primo, o per studiare i suoi zeri come ha fatto G. SANSONE (3) in due note lincee, o infine per determinare il suo sviluppo nella forma affatto semplice cui recentemente è pervenuto A. MAMBRIANI (4).

Ora nonostante sia stata da tempo risolta la (1), anzi la più generale

$$(a_2x^2 + a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' + cy = 0,$$

(1) Cfr. P. BURGATTI, *Sull'equazione* $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$ *e sopra un criterio per riconoscere la natura delle radici di* $y_n(x) = 0$. « An. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », S. II, Vol. I (1932) pp. 165-172.

(2) Cfr. B. LEVI, *Determinazione della natura delle radici della soluzione polinomia dell'equazione differenziale* $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$. « An. della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa », S. II, Vol. I (1935), pp. 255-261.

(3) Cfr. G. SANSONE, *Sugli zeri delle soluzioni polinomiali dell'equazione* $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$. Nota I, « Rend. R. Accad. Naz. Lincei », S. VI, Vol. XV (1932), pp. 125-130. *Ancora sugli zeri delle soluzioni polinomiali dell'equazione* $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$. Nota II, id., pp. 194-197.

(4) Cfr. A. MAMBRIANI, *Determinazione della soluzione polinomiale dell'equazione* $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$.

come è avvertito nel citato lavoro di A. MAMBRIANI, pure stimiamo interessante la presente Nota con la quale, in maniera affatto semplice, perveniamo alla risoluzione della (1), perchè facilmente si è stabilita la dipendenza dell'integrale generale della (1) da quello della

$$xy'' + (\alpha - x + 1)y' + ny = 0, \tag{2}$$

cui soddisfa il classico polinomio generalizzato, $\overset{(\alpha)}{\underset{n}{L}}(x)$, di LAGUERRE.

I vantaggi che presenta, credo, questa semplice trattazione derivano dal fatto che, tutti gli studi e i risultati relativi ai polinomi di LAGUERRE, si possono senza altro e facilmente utilizzare per il polinomio soluzione della (1), come in parte si vedrà in questa Nota. Fra l'altro dimostreremo l'ortogonalità di questi polinomi e calcoleremo il fattore che li normalizza.

Segnalo infine sin d'ora e in modo particolare la seguente semplice e, suppongo, veramente elegante formulelta che ho stabilito molto agevolmente

$$\boxed{H_n(x) = 2^n n! \lim_{a_1 \to 0} \left[a_1{}^n L_n^{\left(\frac{1}{2a_1^2}-1\right)} \left(\frac{x}{a_1} + \frac{1}{2a_1{}^2} \right) \right].} \tag{3}$$

La precedente, come le formule di SZEGÖ, mette in relazione i polinomi di HERMITE con quelli di LAGUERRE, senza però far distinzione fra il caso di n pari e di n dispari, e può quindi essere utilizzata, come quelle di SZEGÖ stesse, per studiare i polinomi d'HERMITE a mezzo di quelli di LAGUERRE.

1. Innanzi tutto, poichè la (1) può dividersi per $-b_1$, perchè supponiamo $b_1 \neq 0$, essendo il caso $b_1 = 0$ del tutto elementare, ad essa può darsi la forma più semplice

$$(a_1 x + a_0)y'' + (-x + b_0)y' + ny = 0. \tag{1'}$$

Se ora poniamo nella precedente, ammettendo $a_1 \neq 0$,

$$a_1 x + a_0 = a_1{}^2 z \tag{4}$$

essa senz'altro si riduce ad una equazione del tipo della (2), perchè con la detta costituzione (4), la (1') diventa

$$zy'' + \left(-z + \frac{a_0 + b_0 a_1}{a_1{}^2}\right) y' + ny = 0, \tag{5}$$

Notiamo che la (2) e la (5) sono alla loro volta del tipo dell'equazione più generale

$$(6) \qquad xw'' + (\gamma - x)w' - pw = 0,$$

essendo p qualsiasi, cioè non necessariamente intero.

L'integrale generale della (6) è

$$w = c_1 G(p, \gamma, x) + c_2 x^{1-\gamma} G(p + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x)$$

se γ non è intero ed essendo c_i costanti, e

$$G(\alpha, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + m)x^m}{m!\,\Gamma(\gamma + m)}.$$

La (6) e i suoi integrali particolari linearmente indipendenti, sono stati studiati da KUMMER [5], servendosi della classica equazione differenziale di GAUSS.

Poichè la (6) si identifica con la (2), ponendo

$$\gamma = \alpha + 1, \quad p = -n,$$

l'integrale generale della (2) è, se α non è intero,

$$(7) \qquad y = c_1 G(-n, \alpha + 1, x) + c_2 x^{-\alpha} G(-\alpha - n, 1 - \alpha, x), \qquad c_i \text{ costanti},$$

e quindi quello della (5) è

$$(8) \qquad y = c_1 G\left(-n, \frac{a_0 + b_0 a_1}{a_1^2}, z\right) +$$

$$+ c_2 z^{1-\frac{a_0 + b_0 a_1}{a_1^2}} G\left(-n + 1 - \frac{a_0 + b_0 a_1}{a_1^2}, 2 - \frac{a_0 + b_0 a_1}{a_1^2}, z\right),$$

purchè $\dfrac{a_0 + b_0 a_1}{a_1^2}$ non sia intero.

Prima di scrivere l'integrale generale definitivo della (1'), osserviamo che fra il primo dei due integrali particolari che figurano nella (7) e $\overset{(\alpha)}{\underset{n}{L}}(x)$, vi è la seguente relazione

$$\overset{(\alpha)}{\underset{n}{L}}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\, n!} G(-n, \alpha + 1, x).$$

(5) Cfr. KUMMER, « Journal für die reine und angewandte Mathematik », t. XV (1836), p. 139. Cfr. inoltre APPELL e KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite*, pp. 121-123, 1926.

Invece il 2° integrale particolare della (7) ha il seguente sviluppo

(9) $$x^{-\alpha}G(-\alpha-n,\ 1-\alpha,\ x)=$$
$$=\Gamma(1-\alpha)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(\alpha+n+1)x^{m-\alpha}}{m!\,\Gamma(\alpha+n-m+1)\,\Gamma(-\alpha+m+1)}.$$

Perciò l'integrale generale della (1') per la (8) e per la (4) è

(10) $$y=c_1G\left(-n,\ \frac{a_0+b_0a_1}{a_1^2},\ \frac{a_1x+a_0}{a_1^2}\right)+$$
$$+c_2\left(\frac{a_1x+a_0}{a_1^2}\right)^{1-\frac{a_0+b_0a_1}{a_1^2}}G\left(-n+1-\frac{a_0+b_0a_1}{a_1^2},\ 2-\frac{a_0+b_0a_1}{a_1^2},\ \frac{a_1x+a_0}{a_1^2}\right),$$

c_i costanti e se è $\frac{a_0+b_0a_1}{a_1^2}$ non intero.

Se infine indichiamo con $L_n^{a_1,a_0,b_0}(x)$, $K_n^{a_1,a_0,b_0}(x)$ i due integrali particolari che compaiono nella (10), precisamente se poniamo

(11 $$L_n^{a_1,a_0,b_0}(x)=a_1^nL_n^{\left(\frac{a_0+b_0a_1}{a_1^2}-1\right)}\left(\frac{a_1x+a_0}{a_1^2}\right)$$

e $K_n^{a_1,a_0,b_0}(x)$ uguale al valore che si trae dalla (9) ponendo in essa

$$\alpha=\frac{a_0+b_0a_1}{a_1^2}-1$$

e cambiando x in

$$\frac{a_1x+a_0}{a_1^2},$$

l'integrale generale della (1') può quindi, concludendo, anche scriversi

$$y=A_1L_n^{a_1,a_0,b_0}(x)+A_2K_n^{a_1,a_0,b_0}(x),\qquad A_i \text{ costanti,}$$

e quando sia $\frac{a_0+b_0a_1}{a_1^2}$ non intero.

2. Dalla (11) a mezzo della nota formula

$$L_n^{(\alpha)}(x)=(-1)^n\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m\Gamma(\alpha+n+1)x^{n-m}}{m!\,(n-m)!\,\Gamma(\alpha+n-m+1)},$$

si ha il seguente sviluppo di $L_n^{a_1,a_0,b_0}(x)$

(12) $$L_n^{a_1,a_0,b_0}(x)=(-1)^n\Gamma\left(\frac{a_0+b_0a_1}{a_1^2}+n\right)\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m(a_1x+a_0)^{n-m}a_1^{2m-n}}{m!\,(n-m)!\,\Gamma\left(\frac{a_0+b_0a_1}{a_1^2}+n-m\right)}.$$

Notiamo infine che la (12) può scriversi anche nel seguente modo

$$\overset{a_1,\,a_0,\,b_0}{\underset{n}{L}}(x)=\frac{e^{\frac{x}{a_1}}}{n!}(a_1x+a_0)^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\left[(a_1x+a_0)^{\alpha+n}e^{-\frac{x}{a_1}}\right],$$

ove α sta invece di $\dfrac{a_0+a_1b_0}{a_1^2}-1$.

3. Delle formule relative alla soluzione polinomiale $\overset{a_1,\,a_0,\,b_0}{\underset{n}{L}}(x)$, possono subito stabilirsi nel seguente modo.

Per determinare ad es. la formula ricorrente rispetto all'indice n degli $\overset{a_1,\,a_0,\,b_0}{\underset{n}{L}}(x)$, basta tener presente la analoga

$$(13)\qquad (n+1)\overset{(\alpha)}{\underset{n+1}{L}}(x)-(2n+\alpha+1-x)\overset{(\alpha)}{\underset{n}{L}}(x)+(\alpha+n)\overset{(\alpha)}{\underset{n-1}{L}}(x)=0,$$

relativa ai polinomi di LAGUERRE. Infatti cambiando in essa x in

$$\frac{a_1x+a_0}{a_1^2}$$

ed α in

$$\frac{a_0+b_0a_1}{a_1^2}-1,$$

si ha senz'altro, a semplificazioni effettuate, la seguente formula che a noi interessa, se si tien presente la (11),

$$(14)\qquad a_1^2(n+1)\overset{a_1,\,a_0,\,b_0}{\underset{n+1}{L}}(x)-(2a_1n-x+b_0)a_1\overset{a_1,\,a_0,\,b_0}{\underset{n}{L}}(x)+$$
$$+\left[a_0+b_0a_1+a_1^2(n-1)\right]\overset{a_1,\,a_0,\,b_0}{\underset{n-1}{L}}(x)=0.$$

In modo perfettamente analogo a mezzo delle

$$\overset{(\alpha+1)}{\underset{n}{L}}(x)-\overset{(\alpha)}{\underset{n}{L}}(x)=\overset{(\alpha+1)}{\underset{n-1}{L}}(x),$$

$$x\overset{(\alpha+1)}{\underset{n-1}{L}}(x)=n\overset{(\alpha)}{\underset{n}{L}}(x)-(\alpha+n)\overset{(\alpha)}{\underset{n-1}{L}}(x),$$

$$x\overset{(\alpha+2)}{\underset{n}{L}}(x)-(\alpha+x+1)\overset{(\alpha+1)}{\underset{n}{L}}(x)+(\alpha+n+1)\overset{(\alpha)}{\underset{n}{L}}(x)=0,$$

si perviene subito rispettivamente alle

$$\overset{a_1,\, a_0,\, b_0+a_1}{\underset{n}{L}}(x) - \overset{a_1,\, a_0,\, b_0}{\underset{n}{L}}(x) = a_1 \overset{a_1,\, a_0,\, b_0+a_1}{\underset{n-1}{L}}(x),$$

$$(a_1 x + a_0)\overset{a_1,\, a_0,\, b_0+a_1}{\underset{n-1}{L}}(x) = n a_1 \overset{a_1,\, a_0,\, b_0}{\underset{n}{L}}(x) - [a_0 + b_0 a_1 + a_1^2(n-1)]\overset{a_1,\, a_0,\, b_0}{\underset{n-1}{L}}(x),$$

$$(a_1 x + a_0)\overset{a_1,\, a_0,\, b_0+2a_1}{\underset{n}{L}}(x) - (a_1 x + 2a_0 + b_0 a_1)\overset{a_1,\, a_0,\, b_0+a_1}{\underset{n}{L}}(x) +$$

$$+ (a_0 + b_0 a_1 + n a_1^2)\overset{a_1,\, a_0,\, b_0}{\underset{n}{L}}(x).$$

Si noti quest'ultima formula, essa è ricorrente rispetto al parametro b_0, quando però esso assume successivamente degli incrementi costanti ed uguali ad a_1.

Infine osserviamo che derivando la (12) e tenendo poi presente la (12) stessa, si ha

$$\frac{d\overset{a_1,\, a_0,\, b_0}{\underset{n}{L}}(x)}{dx} = -\overset{a_1,\, a_0,\, a_1+b_0}{\underset{n-1}{L}}(x)$$

e da essa in generale

$$\frac{d^r\overset{a_1,\, a_0,\, b_0}{\underset{n}{L}}(x)}{dx^r} = (-1)^r\overset{a_1,\, a_0,\, a_1+rb_0}{\underset{n-r}{L}}(x).$$

4. E determiniamo ora la formula limite (3), analoga a quella di Szegö, perchè come essa mette in relazione i polinomi di Laguerre con quelli di Hermite.

Si ponga nella (1')

$$a_1 = 0, \quad a_0 = \frac{1}{2}, \quad b_0 = 0$$

e allora la (1') si riduce all'equazione:

$$(1'') \qquad y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

cui soddisfa il polinomio d'Hermite $H_n(x)$, avente il seguente sviluppo

$$H_n(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n!\,(2x)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!}.$$

Ma alla (1'') soddisfa, se c è una costante

$$c\overset{a_1,\,a_0,\,b_0}{\underset{n}{L}}(x) = c a_1^n L_n^{\left(\frac{a_0+b_0a_1}{a_1^2}-1\right)}\left(\frac{a_1x+a_0}{a_1^2}\right)$$

quando si fa $a_0 = \frac{1}{2}$, $b_0 = 0$ e si passa poi al limite per $a_1 \to 0$.

Si ha così:

$$H_n(x) = \lim_{a_1 \to 0}\left[c a_1^n L_n^{\left(\frac{1}{2a_1^2}-1\right)}\left(\frac{x}{a_1}+\frac{1}{2a_1^2}\right)\right]. \tag{15}$$

Per determinare il valore della costante c, si osservi che i coefficienti di x^n del 1° membro e del 2° membro, sono rispettivamente

$$(-1)^n 2^n, \quad \frac{(-1)^n}{n!}c$$

e quindi eguagliandoli risulta

$$c = 2^n n!$$

Posto questo valore di c nella (15), si ha la (3) che si voleva dimostrare ([6]).

([6]) La (3) può subito dimostrarsi anche nel seguente modo.

Ammesso che la (3) sia vera se $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, dimostriamo che è anche vera quando l'indice è uguale ad $n+1$.

Difatti cambiando nella (13) α ed x rispettivamente in $\frac{1}{2a_1^2}-1$, $\frac{x}{a_1}+\frac{1}{2a_1^2}$ e moltiplicandola poi per $n!\,2^{n+1}a_1^{n+1}$, si ha, se si passa al limite per $a_1 \to 0$ e tenendo presenti le nostre ipotesi,

$$\lim_{a_1 \to 0}\left[(n+1)!\,2^{n+1}a_1^{n+1}L_{n+1}^{\left(\frac{1}{2a_1^2}-1\right)}\left(\frac{x}{a_1}+\frac{1}{2a_1^2}\right)\right] + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

che per la notissima formula

$$H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

può anche scriversi

$$H_{n+1}(x) = 2^{n+1}(n+1)!\lim_{a_1 \to 0}\left[a_1^{n+1}L_{n+1}^{\left(\frac{1}{2a_1^2}-1\right)}\left(\frac{x}{a_1}+\frac{1}{2a_1^2}\right)\right]$$

c. v. d.

Ma si noti inoltre che la (3) è vera per $n = 0, 1, 2\ldots$, quindi essa è vera in generale.

Notiamo infine che, se non si mira alla dimostrazione della (3), il procedimento seguito indica il modo di ricavare da formule per i polinomi di Laguerre, relazioni per quelli di Hermite.

5. Dimostriamo ora, come si è detto nella introduzione, l'ortogonalità dei polinomi $\overset{a_1,\, a_0,\, b_0}{\underset{n}{L}}(x)$ e determiniamo poi il fattore di normalizzazione, battendo via analoga a quella che, per raggiungere gli scopi, si segue per i polinomi di LAGUERRE.

Perciò osserviamo innanzi tutto che la (1') scritta nel seguente modo:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-\frac{x}{a_1}}(a_1x+a_0)^{\frac{a_0+a_1b_0}{a_1^2}}y_n'\right]+ne^{-\frac{x}{a_1}}(a_1x+a_0)^{\frac{a_0+a_1b_0}{a_1^2}-1}y_n=0$$

in cui si è posto y_n', y_n invece di y', y, ci dà, se

$$\frac{a_0+a_1b_0}{a_1^2}>0$$

e se l'integriamo fra $-\frac{a_0}{a_1}$ ed ∞

$$(n-m)\int_{-\frac{a_0}{a_1}}^{\infty}e^{-\frac{x}{a_1}}(a_1x+a_0)^{\frac{a_0+a_1b_0}{a_1^2}-1}y_my_n\,dx=0, \qquad m \neq n$$

6. Per determinare il valore del precedente integrale nel caso in cui $n=m$, notiamo che dalla (14) si trae

$$(16)\qquad \int_{-\frac{a_0}{a_1}}^{\infty}e^{-\frac{x}{a_1}}(a_1x+a_0)^{\frac{a_0+a_1b_0}{a_1^2}}y_ny_{n-1}dx+[a_0+b_0a_1+a_1^2(n-1)]I_{n-1}=0,$$

$$(17)\qquad \int_{-\frac{a_0}{a_1}}^{\infty}e^{-\frac{x}{a_1}}(a_1x+a_0)^{\frac{a_0+a_1b_0}{a_1^2}}y_ny_{n-1}dx+a_1^2nI_n=0,$$

nelle quali è

$$I_m=\int_{-\frac{a_0}{a_1}}^{\infty}e^{-\frac{x}{a_1}}(a_1x+a_0)^{\frac{a_0+a_1b_0}{a_1^2}-1}y_m^2dx.$$

Sottraendo dalla (16) la (17), si trae

$$a_1^2nI_n=[a_0+b_0a_1+a_1^2(n-1)]I_{n-1}.$$

Se ora moltiplichiamo la precedente con tutte le formule che da essa si traggono cambiando rispettivamente n in $n-1$,

$n-2, \ldots, 1$, si ottiene, mediante una semplice integrazione,

$$I_n = \frac{1}{n!} e^{\frac{a_0}{a_1^2}} a_1^{\frac{2a_0+2a_1b_0}{a_1^2}-1} \Gamma\left(\frac{a_0+a_1b_0}{a_1^2}+n\right). \tag{18}$$

Quindi il sistema

$$\frac{\sqrt{n!}\,(a_1x+a_0)^{\frac{a_0+a_1b_0}{2a_1^2}-\frac{1}{2}} \overset{a_1,\,a_0,\,b_0}{\underset{n}{L}}(x)}{e^{\frac{a_1x+a_0}{2a_1^2}} a_1^{\frac{a_0+a_1b_0}{a_1^2}} \Gamma^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a_0+a_1b_0}{a_1^2}+n\right)}$$

è ortogonale e normale nell'intervallo $-\frac{a_0}{a_1}, \infty$.

Concludendo osserviamo che, se nella (18) poniamo $a_1 = 1$, $a_0 = 0$, $b_0 = \alpha + 1$, si ha

$$I_n = \frac{1}{n!} \Gamma(\alpha + n + 1),$$

come deve essere [7], perchè con i valori 1, 0, $\alpha + 1$, stabiliti per a_1, a_0, b_0 la (1′) si riduce alla (2) cui soddisfa $\overset{(\alpha)}{\underset{n}{L}}(x)$.

(7) Cfr. G. Vitali e G. Sansone, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, Parte II (G. Sansone), p. 191 (1935).