
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ARMANDO CHIPELLINI

Interpretazione geometrica dell'equivalenza di due equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,
Vol. 1 (1939), n.1, p. 24–27.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_24_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_24_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_24_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Interpretazione geometrica dell'equivalenza di due equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

Nota di ARMANDO CHIPELLINI (a Cagliari).

Sunto. - *Si interpreta geometricamente la circostanza analitica che due equazioni differenziali lineari ed omogenee del secondo ordine sono sempre equivalenti rispetto alle trasformazioni di contatto $y = \lambda z$, $\xi = \varphi(x)$.*

1. Com'è ben noto, nello stabilire le condizioni necessarie e sufficienti affinché due equazioni differenziali lineari ed omogenee, di ordine n

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)} + \binom{n}{2} p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_n y = 0, \\ z^{(n)} + \binom{n}{2} q_2 z^{(n-2)} + \dots + q_n z = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = y(x), \\ z = z(\xi), \end{array} \right.$$

risultino equivalenti rispetto alle formule di trasformazione (trasformazione di contatto, secondo S. LIE)

$$(1) \quad y = \lambda z, \quad \xi = \varphi(x),$$

si introducono certe formazioni dei coefficienti (dette *invarianti*)

$$\theta_m(p_2 p_3 \dots p_n).$$

le quali devono riprodursi, a meno di una opportuna potenza di $\varphi'(x)$, quando passiamo da una variabile all'altra.

Tale teoria però presuppone che l'ordine n delle equazioni sia ≥ 3 , perchè per $n=2$ le equazioni risultano tra loro tutte equivalenti rispetto alle (1). Questa circostanza si usa dimostrarla direttamente per via analitica ed è basata sul fatto che un'equazione

$$y'' + 2p_1y' + p_2y = 0,$$

contiene due coefficienti p_1, p_2 e sono a nostra disposizione due funzioni arbitrarie λ e φ (1).

Però tale procedimento non mette affatto in evidenza l'intima natura geometrica di tale circostanza e quindi non credo del tutto inopportuno esporre le seguenti considerazioni geometriche.

2. Ricordiamo che in Geometria Proiettiva Differenziale, preso un sistema fondamentale di integrali (y_1, y_2, \dots, y_n) di un'equazione differenziale lineare di ordine n , si interpretano tali funzioni y_i come coordinate omogenee di un punto di uno spazio S_{n-1} ad $n-1$ dimensioni, così che le equazioni

$$y_1 \equiv y_1(x), \quad y_2 \equiv y_2(x), \dots \quad y_n \equiv y_n(x),$$

vengono a rappresentare le equazioni parametriche di una curva C_y di S_{n-1} , detta *curva integrale dell'equazione differenziale data*, curva che appartiene propriamente allo spazio S_{n-1} e non ad uno spazio di dimensione inferiore, che altrimenti le y_i risulterebbero tra loro legate linearmente.

Però tale curva integrale C_y non è univocamente determinata dall'equazione differenziale data, perchè ne eseguiamo la sostituzione lineare

$$\bar{y}_i = \sum_k^n c_{ik} y_k, \quad \|c_{ik}\| \neq 0,$$

anche le \bar{y}_i formano un sistema fondamentale di integrali e quindi le equazioni

$$(2) \quad y_i \equiv \bar{y}_i(x),$$

definiscono una nuova curva integrale $C_{\bar{y}}$ della stessa equazione differenziale.

Le (2) si possono interpretare come le equazioni di una proiettività in S_{n-1} e quindi un'equazione differenziale lineare ed omo-

(1) Vedi CHIPELLINI, *Equazioni lineari ed invarianti differenziali*. (Corso di Matematiche Superiori. Litografie. R. Università di Cagliari, a cura del dott. PISANO, anno 1938-39).

genea definisce la sua curva integrale a meno di trasformazioni proiettive, cioè *definisce tutta una classe di curve C_y tra loro proiettivamente identiche*. Inoltre, rappresentando le y_i coordinate omogenee, avranno importanza per la curva integrale solo i rapporti $y_1 : y_2 : \dots : y_n$, cioè una trasformazione

$$y = \lambda z,$$

la lascia inalterata, come pure rimane inalterata cambiando rappresentazione parametrica, cioè ponendo

$$\xi = \varphi(x).$$

3. Dopo ciò, consideriamo l'equazione del 3° ordine

$$(3) \quad y''' + 3p_2 y' + p_1 y = 0,$$

e supponiamo che sia nullo il suo invariante differenziale

$\theta_3 = p_2 - \frac{3}{2} p_2'$ (equazione autoaggiunta); allora, com'è ben noto, essa si può trasformare nella forma semplicissima

$$(4) \quad \frac{d^3 z}{d\xi^3} = 0,$$

che ammette il sistema fondamentale 1, ξ , ξ^2 ; ad essa risulterà quindi proiettivamente associata la conica

$$z_1 z_3 = z_2^2.$$

Ma le coniche, com'è ben noto, sono tra loro proiettivamente identiche e quindi *la curva integrale di una qualunque equazione lineare autoaggiunta del 3° ordine ($\theta_3 = 0$) è la conica*. Ma la effettiva riduzione della (3) alla forma (4) è subordinata alla risoluzione dell'equazione di RICCATI

$$(5) \quad \eta' = \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{3}{2} p_1,$$

o, ciò che è lo stesso, dell'equazione del secondo ordine

$$\tau'' + \frac{3p_1}{4} \tau = 0,$$

nel senso che $\eta = \frac{\xi''}{\xi'} = -\frac{\lambda'}{\lambda}$ determina la trasformazione e poichè le soluzioni di (3) sono forme quadratiche di due integrali di (5).

Possiamo quindi concludere che, essendo le equazioni autoaggiunte del terzo ordine tra loro equivalenti (perchè si possano tutte ridurre all'unica

$$\frac{d^3 z}{d\xi^3} = 0,$$

e perchè le coniche sono tra loro proiettivamente identiche), altrettanto *avverrà per le equazioni* (5). Ma ogni equazione lineare del secondo ordine si può sempre scrivere sotto la forma (5) e quindi risulta stabilito ciò che ci eravamo proposti.