BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

ENRICO BOMPIANI

Sopra certi inviluppi di curve piane e sulle asintotiche della superficie di Steiner

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2, Vol. **1** (1939), n.1, p. 1–6.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1939.

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Sopra certi inviluppi di curve piane e sulle asintotiche della superficie di Steiner.

Nota di ENRICO BOMPIANI (a Roma).

Sunto. - *Si studiano anzitutto certi sistemi semplicemente infiniti di curve piane dotati delle seguenti notevoli proprietà: l' invariante di contatto di una curva del sistema con la curva inviluppo è costante al variare della curva nel sistema. Nel caso particolare che le curve del sistema siano coniche appartenenti ad una rete con tre punti base e inviluppino una quadrica della quale quei punti siano biflecnodi (lemniscate proiettive di* BERZOLARI*), dai teoremi prima stabiliti risulta che le asintotiche della superficie di* STEINER *sono quartiche gobbe razionali, e viceversa che una qualsiasi di queste individua una superficie di* STEINER *di cui è asintotica. Questi fatti ben noti erano stati stabiliti finora o attraverso la rappresentazione piana della superficie (non avente carattere proiettivo) o attraverso considerazioni iperspaziali. La via qui indicata, di natura esclusivamente proiettiva, sembra più semplice e più aderente alla natura delle proprietà in esame.*

1. Mi sono più volte occupato dell' invariante proiettivo di contatto di due curve piane [1] e in particolare di quello spettante al punto di contatto fra una curva di un sistema ∞^1 con la curva inviluppo del sistema (s' intende: quando esista); ed ho anche posto il problema di caratterizzare le equazioni differenziali del 1° ordine i cui integrali particolari abbiano con l' integral singolare, in ogni punto di questo, invariante di contatto costante. Qui do esempi di casi in cui ciò avviene, cioè, come dirò, di *inviluppi ad invariante costante.*

[1] Per vari significati finiti di questo invariante e per la bibliografia relativa vedasi la mia conferenza: *Alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale.* Rendic. « Seminario Matem. e Fisico » di Milano, vol. X, 1936.

Sono stato condotto ad essi dal desiderio di chiarire in modo più diretto alcune circostanze relative alle asintotiche della superficie di STEINER. È ben noto ([2]) ch' esse sono quartiche razionali (aventi per corde principali rette doppie della superficie) e che inversamente una tale quartica individua una superficie di STEINER per cui è asintotica: ma mi pare strano che per dimostrare queste proprietà si sia ricorso alla rappresentazione piana (che non ha carattere proiettivo) o a considerazioni iperspaziali.

2. Siano dati tre punti distinti di un piano che assumiamo come vertici di un triangolo per un riferimento proiettivo.

Consideriamo il sistema $\infty^2 \{C_\alpha\}$ di curve C_α definito dall'equazione:

$$a_1 x_2^\alpha x_3^\alpha + a_2 x_3^\alpha x_1^\alpha + a_3 x_1^\alpha x_2^\alpha = 0 \tag{2.1}$$

con α intero positivo ([3]).

Una di queste curve è individuata da un suo punto $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, distinto dai vertici, e dalla tangente t in esso, di equazione

$$t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 = 0:$$

s' intende che dev' essere

$$t_1 \bar{x}_1 + t_2 \bar{x}_2 + t_3 \bar{x}_3 = 0. \tag{2.2}$$

L' equazione della C_α soddisfacente a queste condizioni è, come subito si verifica,

$$t_1 \bar{x}_1^{\alpha+1} x_2^\alpha x_3^\alpha + t_2 \bar{x}_2^{\alpha+1} x_3^\alpha x_1^\alpha + t_3 \bar{x}_1^{\alpha+1} x_3^\alpha x_2^\alpha = 0. \tag{2.3}$$

Consideriamo ora un secondo sistema $\{C_\beta\}$

$$b_1 x_2^\beta x_3^\beta + b_2 x_3^\beta x_1^\beta + b_3 x_1^\beta x_2^\beta = 0 \tag{2.4}$$

(β intero positivo, $\neq \alpha$) e la curva C_β di esso che passa per P con la tangente data

$$t_1 \bar{x}_1^{\beta+1} x_2^\beta x_3^\beta + t_2 \bar{x}_2^{\beta+1} x_3^\beta x_1^\beta + t_3 \bar{x}_3^{\beta+1} x_1^\beta x_2^\beta = 0, \tag{2.5}$$

Le curve (2.3) e (2.5) tangenti in P hanno ivi un invariante proiettivo di contatto (metricamente: rapporto delle curvature) che

([2]) Vedasi p. es. E. BERTINI: *Complementi di Geometria Proiettiva*, (Zanichelli, 1928) §§ 7, 12, 13; *Introduzione alla Geometria Proiettiva degli iperspazi*. (Principato, 1923). Cap. XV, XVI.

([3]) In realtà, per il caso dell' invariante che segue, ciò non occorre affatto; dev' essere invece $\alpha \neq 0, \neq -1$.

vogliamo calcolare. Per far ciò nel modo più semplice si ricordi che date, in coordinate proiettive non omogenee, le equazioni di due curve $y = a_{20}x^2 + \ldots$ e $y = \bar{a}_{20}x^2 + \ldots$ il loro invariante di contatto è $\bar{a}_{20}/a_{20}$.

Per ridursi a questo caso, fatto come si può $x_3 = \bar{x}_3 = 1$ e $t_3 = -1$, sicchè la (2.2) diviene

$$t_1\bar{x}_1 + t_2\bar{x}_2 = 1, \tag{2.6}$$

conviene il cambiamento definito da

$$\begin{aligned} X_1 &= \bar{x}_2 x_1 - \bar{x}_1 x_2 \\ X_2 &= t_1 x_1 + t_2 x_2 - 1 \end{aligned} \qquad (X_3 = x_3 = 1) \tag{2.7}$$

che porta P in $X_1 = X_2 = 0$ e dà a t l'equazione $X_2 = 0$.

Invertendo queste si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1(\tau_2 X_1 + X_2 + 1) \\ x_2 &= \bar{x}_2(-\tau_1 X_1 + X_2 + 1) \end{aligned} \qquad (x_3 = 1) \tag{2.8}$$

ove

$$t_1 = \tau_1\bar{x}_2, \quad t_2 = \tau_2\bar{x}_1, \quad \tau_1 + \tau_2 = 1/\bar{x}_1\bar{x}_2; \tag{2.9}$$

e sostituendo nella (2.3)

$$\begin{aligned} &\tau_1(-\tau_1 X_1 + X_2 + 1)^\alpha + \tau_2(\tau_2 X_1 + X_2 + 1)^\alpha - \\ &- (\tau_1 + \tau_2)(\tau_2 X_1 + X_2 + 1)^\alpha(-\tau_1 X_1 + X_2 + 1)^\alpha = 0. \end{aligned}$$

Il termine di grado zero è nullo e il termine di 1° grado è X_2; per il calcolo dell'invariante occorre solo il coefficiente di X_1^2; e si ha

$$X_2 = -\frac{\alpha + 1}{2}\tau_1\tau_2 X_1^2 + \ldots.$$

L'analogo sviluppo per la (2.5) si ha cambiando α in β; quindi:

L'invariante di contatto delle curve C_α *e* C_β *che passano per un punto* P *con la stessa tangente vale* $(\alpha + 1)/(\beta + 1)$.

Fissiamo *una* C_α (o C_β) e consideriamo le ∞^1 curve C_β (o C_α) che la toccano nei suoi vari punti; poichè nell'invariante calcolato non c'è più traccia del punto di contatto, *le* ∞^1 *curve considerate formano un inviluppo ad invariante costante.*

P. es. per $\alpha = 2$ si hanno le *lemniscate proiettive* di L. Berzolari [4] (quartiche con tre biflecnodi); le ∞^1 coniche ($\beta = 1$) tangenti ad una di esse e passanti per i tre biflecnodi hanno con quella invariante di contatto $= 3/2$.

[4] « Rendic. R. Ist. Lombardo », tomo 37 (1904), pag. 277 e 304.

3. Conviene ricavare dal precedente un altro risultato. Consideriamo le ∞^2 curve C_β, (2.4), e domandiamoci di estrarre dal sistema ∞^2 un sistema ∞^1 avente un inviluppo ad invariante costante, sia k.

Si determini anzitutto $\alpha = k(\beta + 1) - 1$. Una curva C_β e l'inviluppo $\overline{C}$ si tocchino in P; l'elemento di 2° ordine, E_2, di $\overline{C}$ in P è determinato dall'essere l'invariante di contatto di $\overline{C}$ con C_β uguale a k; esso dunque coincide con l'E_2 della curva C_α (col valore di α determinato) che tocca C_β in P. In altre parole: dal fatto che C_α e C hanno contatto del 1° ordine segue che hanno contatto del 2° ordine. Tanto basta (variando P su $\overline{C}$) per concludere che $\overline{C} \equiv C_\alpha$; cioè:

Gli unici sistemi ∞^1 di curve ad invariante costante k *che si possono estrarre dalla rete* $\{C_\beta\}$ *sono quelli tangenti ad una curva* C_α, (2.1), *per cui* $\alpha = k(\beta + 1) - 1$. *Vi sono quindi ∞^2 modi diversi di costruire sistemi del tipo voluto (fissati* β *e* k).

4. Per quanto non necessaria per il seguito, osserviamo la seguente proprietà:

Fissata una curva C_β, *le ∞^1 curve* C_α *ad essa tangenti toccano complessivamente* α^2 *curve* C_β.

La scelta del punto unità (non ancor fatta) può farsi sempre in modo che la C_β data abbia l'equazione:

$$x_1^\beta x_2^\beta + x_2^\beta x_3^\beta + x_3^\beta x_1^\beta = 0. \tag{4.1}$$

Sia (x_1, x_2, x_3) un suo punto; la C_α tangente in esso alla (4.1) ha l'equazione

$$\bar{x}_1^{\alpha-\beta} x_2^\alpha x_3^\alpha + \bar{x}_2^{\alpha-\beta} x_3^\alpha x_1^\alpha + \bar{x}_3^{\alpha-\beta} x_2^\alpha x_1^\alpha = 0. \tag{4.2}$$

Questa passa per il punto $(\bar{x}_1, \varepsilon\bar{x}_2, \eta\bar{x}_3)$ ove ε ed η sono due radici α-esime dell'unità, $\varepsilon^\alpha = 1$, $\eta^\alpha = 1$; e per essa passa la curva

$$\eta^\beta x_1^\beta x_2^\beta + \varepsilon^\beta x_1^\beta x_3^\beta + x_2^\beta x_3^\beta = 0 \tag{4.3}$$

e vi tocca la C_α (4.2). Poichè la (4.3) non dipende da $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ rimane provato che tutte le C_α considerate toccano la (4.3); e queste, variando ε ed η sono α^2. Se $\alpha = k\beta$ (intero) le C_β distinte tangenti a tutte le C_α considerate sono k^2.

5. Per passare dalle precedenti osservazioni sulle curve piane alle proprietà delle asintotiche sulla superficie di STEINER occorre il seguente teorema che può avere interesse di per sè.

Sia dato sopra una superficie (dello spazio ordinario) un sistema ∞^1 *di curve* $\{C\}$ *tale che ammetta una curva inviluppo* $\bar{C}$ *e che il piano osculatore in ogni punto a* $\bar{C}$ *coincida col piano osculatore a quella* C *che tocca* $\bar{C}$ *in quel punto. Allora possono accadere i seguenti casi:*

1) *la* $\bar{C}$ *e le* C *hanno in ogni punto invariante di contatto* $=1$ *(cioè contatto del 2° ordine);*

2) *la* $\bar{C}$ *e la* C *hanno invariante di contatto* $=3/2$ *e in tal caso la* $\bar{C}$ *è asintotica;*

3) *la* $\bar{C}$ *è linea singolare sulla superficie.*

Infatti escluso l'ultimo caso, cioè se il punto P di $\bar{C}$ è regolare per la superficie, il piano osculatore in P a $\bar{C}$, e ad una C, può essere diverso dal piano tangente o coincidente con esso. Nella prima ipotesi quel piano determina sulla superficie un solo elemento curvilineo del 2° ordine E_2 che deve quindi appartenere sia a $\bar{C}$ che a C, e si ha il primo caso del teorema. Se invece quel piano è tangente esso determina, per ogni tangente asintotica, due elementi del 2° ordine, uno di asintotica e l'altro della sezione piana tangente. La $\bar{C}$, che tocca in ogni suo punto una tangente asintotica, è certo asintotica: e allora o l'E_2 di C in P coincide con quello di $\bar{C}$ (e si rientra nel primo caso) o appartiene alla sezione piana; e in questo secondo caso è ben noto che quell'invariante di contatto vale 3/2.

6. Dimostriamo ora che le asintotiche della superficie di Steiner F^4 sono quartiche razionali che hanno per corde principali le tre rette doppie della superficie.

Dal punto d'incontro di queste (triplo per F^4) proiettiamo F^4 su un piano arbitrario π e indichiamo con lettere dotate di apici le proiezioni su π di elementi di F^4; le coniche C di F^4 si proiettano nelle coniche C' (di π) per i punti D_1, D_2, D_3 intersezioni con π delle rette doppie d_1, d_2, d_3.

Sia $\bar{C}$ un'asintotica di F^4 e $\{C\}$ il sistema delle coniche (di F^4) ad essa tangente: il loro invariante di contatto (cioè di $\bar{C}$ con ciascuna C) è 3/2. Per proiezione si avrà un sistema ∞^1 di coniche $\{C'\}$ che ha con la curva inviluppo $\bar{C}'$ (dato il carattere proiettivo dell'invariante) invariante di contatto $=3/2$. Per il teorema in fine del n. 4 $\bar{C}'$ è una delle quartiche aventi D_1, D_2, D_3 per biflecnodi. Il cono proiettante $\bar{C}'$ dal punto triplo taglia F^4 (fuori delle tre rette doppie) in una quartica $\bar{C}$ che è l'asintotica considerata, avente per corde principali (intersezioni dei piani osculatori nei punti d'appoggio) le tre rette doppie (a causa dei biflecnodi di $\bar{C}'$).

7. Viceversa proviamo che una quartica razionale con tre corde principali individua una superficie di STEINER di cui essa è asintotica.

Siano $\bar{C}$ la quartica, $d_1 d_2 d_3$ le sue tre corde principali concorrenti in un punto (dal quale come prima si proietterà su un piano π).

Per ogni punto di $\bar{C}$ e nel suo piano osculatore si consideri la conica C tangente a $\bar{C}$ e appoggiata a d_1, d_2, d_3; sia σ la superficie ricoperta dal sistema $\{C\}$. Intanto è chiaro che $\bar{C}$ è asintotica su σ, perchè la proiezione $\bar{C}'$ è una quartica con biflecnodi in $D_1 D_2 D_3$ e le C' sono le coniche per essi tangenti a $\bar{C}'$, quindi l'invariante di contatto (nel piano π e perciò anche in ciascun piano osculatore a $\bar{C}$) è $= 3/2$.

In un piano osculatore stazionario di $\bar{C}$ vi sono due coniche C infinitamente vicine (determinate dai due E_2 di $\bar{C}$ situati in esso), cioè detto piano è tangente fisso a σ in tutti i punti di una conica.

Si tenga ora conto del fatto che una superficie di STEINER è individuata dalle sue tre rette doppie, da una sua conica a piano tangente fisso e da un suo ulteriore punto [5]; e si dica F^4 la suficie di STEINER individuata dalle rette doppie d_1, d_2, d_3, dalla conica C situata in uno dei piani osculatori stazionari di $\bar{C}$ (lungo la quale abbia piano tangente fisso) e da un punto di $\bar{C}$.

La $\bar{C}$ ha in comune con F^4 12 punti situati sulle corde principali, 4 nel punto d'osculazione stazionario utilizzato e un ulteriore punto; quindi $\bar{C}$ sta su F^4. Le coniche di F^4 tangenti a $\bar{C}$ (situate nei piani osculatori di $\bar{C}$ e appoggiate alle tre rette doppie) coincidono con quelle già considerate per definire σ; quindi $\sigma \equiv F^4$ e il teorema è provato.

8. Dimostrazione del tutto analoga (com'è chiaro) si farebbe nel caso che la superficie di STEINER avesse due o tre rette doppie coincidenti.

[5] In un riferimento proiettivo (x_1, x_2, x_3, x_4) di cui le rette doppie siano gli spigoli del tetraedro uscente dal vertice opposto a $x_4 = 0$, le superficie di STEINER per cui $x_4 = 0$ è piano tangente nei punti della conica $a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2 = 0$ hanno equazioni

$$(a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2)^2 = kx_1x_2x_3x_4;$$

un punto ne determina una.