CLOTILDE GIGLI

# Alcuni risultati sulle curve algebriche reali sopra una quadrica a punti reali

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2*, Vol. **1** (1939), n.1, p. 19–24.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_19_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1939.

## Alcuni risultati sulle curve algebriche reali sopra una quadrica a punti reali.

Nota di CLOTILDE GIGLI (a Pavia).

**Sunto.** - *Si comunicano alcuni risultati relativi alle curve algebriche reali situate sopra una quadrica a punti reali e dotate del massimo numero di circuiti compatibile con l' ordine o col genere, con speciale riguardo ai cosiddetti " massimi d' inclusione ,, ed alle curve deducibili per " piccola variazione ,, di multilateri connessi.*

In questa Nota preventiva mi propongo di esporre i risultati da me ottenuti nella mia dissertazione di laurea intorno alle

*Curve algebriche reali sopra una quadrica a punti reali* (¹), riservandomi di esporre in altra sede con maggiore estensione i metodi cui sono ricorsa e le dimostrazioni che mi hanno condotta a tali risultati.

1. Il mio studio si connette da un lato agli studi sulle curve algebriche reali giacenti sopra una quadrica reale e dall' altro a studi sulle curve piane algebriche reali in quanto o ne utilizzi i metodi per il tramite della proiezione stereografica od abbia ad estenderne definizioni e problemi.

Tra gli studi sulle curve algebriche reali di una quadrica reale, quando si prescinda da quelli d' indole più elementare, per esempio sulle curve sferiche, è in primo luogo da ricordarsi la seconda parte di un classico lavoro di D. HILBERT (²), ove, per ogni valore $n$ dell' ordine è dimostrata l' esistenza di curve col massimo numero di circuiti, superante di uno il massimo genere; tali curve, in quanto di massimo genere, sono appunto sopra una quadrica, che per essere reale la curva, è del pari reale (o, per $n = 3, 4$, tale può scegliersi).

I risultati di D. HILBERT, che si riferiscono anche ai modi possibili in cui i circuiti delle curve si distribuiscono in pari e dispari, sono stati ulteriormente integrati da M. PIAZZOLLA-BELOCH (³), sia colla classificazione dei circuiti pari di una quadrica in circuiti di prima e di seconda specie (risp. riducibili o non riducibili, per deformazione continua sulla quadrica, ad un punto di questa), sia colla dimostrazione d' esistenza di determinati tipi di curve in un indirizzo che può considerarsi come l' estensione di quello iniziato da D. HILBERT [nella prima parte del lavoro citato in (²)] per le curve piane algebriche reali.

Di curve gobbe, algebriche reali, d' ordine assegnato col massimo numero di circuiti, giacenti sopra quadriche a punti iperbo-

(¹) Dissertazione di laurea presentata alla R. Università di Pavia nel Luglio 1938-XVI.

(²) D. HILBERT, *Ueber die reellen Züge algebraischer Curven*, « Math. Ann. », Bd. XXXVIII, (1891), pagg. 115-138.

(³) M. PIAZZOLLA-BELOCH, a) *Sulla configurazione delle curve situate sopra quadriche e in particolare sulla configurazione delle curve algebriche sghembe col massimo numero di circuiti*, « Rend. R. Acc. Lincei », vol. XXII, serie V, pagg. 60-67, 95-97; b) *Costruzioni di curve sghembe aventi il massimo numero di circuiti*, « Ann. di Mat. », Serie IV, tomo II, (1924-25), pagg. 203-216.

lici, si è pure occupata A. DONEDDU nella sua dissertazione di laurea non pubblicata [4].

Il prof. BRUSOTTI [5] studiando curve algebriche, reali, prossime a multilateri, si è occupato, in particolare, di quelle prossime a multilateri formati con generatrici reali dei due sistemi di una quadrica a punti iperbolici con speciale riguardo al numero dei circuiti della trasformata.

**2.** È noto il largo uso dei metodi di « piccola variazione » nelle ricerche su questioni di realità: ora, per le curve sulle quadriche, i metodi di « piccola variazione » o direttamente sulla quadrica o sul piano della proiezione stereografica, si sono sempre applicati supponendo la quadrica invariata e ad ogni modo, non specializzata.

Ora, mentre in una parte del mio lavoro è stato adoperato questo metodo di « piccola variazione » applicato sulla quadrica rappresentata in proiezione stereografica, in una seconda parte si è introdotto un metodo costruttivo in cui si sottopone a « piccola variazione » una coppia di piani reali, traendone una quadrica non specializzata e studiando su di questa le deformate di curve spezzate in due curve dei due piani, aventi lo stesso ordine e connesse mediante le loro intersezioni con la retta comune ai piani stessi.

Con questo metodo ed utilizzando quali curve piane due curve bifronti di quelle studiate dal prof. L. BRUSOTTI in una sua Nota [6], si ottengono curve sulla quadrica dotate del massimo numero di circuiti.

Si è potuto così avere a disposizione una larga fonte per la costruzione di curve con notevoli configurazioni e ciò tanto nel caso che la quadrica ottenuta per « piccola variazione » della coppia di piani fosse a punti ellittici, quanto nel caso che fosse a punti iperbolici.

**3.** Mi sono poi occupata di curve sulla quadrica possedenti « massimi d'inclusione » secondo una definizione da me introdotta.

[4] A. DONEDDU, *Questioni di realità per le curve sopra una quadrica*. Tesi di laurea discussa nella R. Università di Cagliari. Anno Accademico 1926-27.

[5] L. BRUSOTTI, *Curve algebriche reali prossime a multilateri in uno spazio $S_r$*, Pavia, 1922, Tipografia Succ. Frat. Fusi.

[6] L. BRUSOTTI, *Nuovi metodi costruttivi di curve piane d'ordine assegnato dotate del massimo numero di circuiti*, Nota IV, « Rend. R. Ist. Lombardo », vol. XLIX, serie II, (1916), pagg. 495-510.

Tale definizione estende quella di G. BIGGIOGERO [7] per le curve piane, ma mentre ivi sono in gioco le intersezioni con una retta e quindi a caratterizzare il « massimo » intervengono due indici, qui entrano in gioco le intersezioni con un piano e quindi tre indici.

Precisamente: siano $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tre circuiti di una curva $C^n$ algebrica, reale d'ordine $n$, priva di punti multipli reali, situata sopra una quadrica, che nella ripartizione in regioni prodotta sulla quadrica dalla parte reale di $C^n$ limitino risp. tre regioni del tipo « pezzo », nessuna delle quali includa ulteriori punti della $C^n$, nel che è implicito che $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sono pari e di prima specie. Tali regioni si penseranno come interne risp. ad $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, il che nel caso ellittico presuppone una convenzione, della quale deve tenersi conto per il linguaggio usato in seguito.

Ciò posto si avranno allora $q-1 \geq 0$ circuiti (pari di prima specie) della $C^n$ includenti $\alpha$, ma non $\beta$ e $\gamma$, $r-1 \geq 0$ circuiti includenti $\beta$, ma non $\alpha$ e $\gamma$, $s-1 \geq 0$ circuiti includenti $\gamma$, ma non $\alpha$ e $\beta$ e $t \geq 0$ circuiti includenti due almeno dei circuiti $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ (intendendosi che nel caso ellittico sia $t=0$). La curva presenterà inoltre un certo numero di circuiti dispari $=2d$ per $n$ pari, $=2d+1$ per $n$ dispari con $d \geq 0$.

Se si assumono tre punti $A$, $B$, $C$ risp. interni ad $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, il piano passante per tali tre punti dovrà incontrare in due punti almeno ciascuno dei $q+r+s+t$ circuiti pari considerati ed in un punto almeno ogni circuito dispari di $C^n$.

Segue allora subito:

$$\text{per } n \text{ pari} \qquad 2(q+r+s+t)+2d \leq n,$$

$$\text{per } n \text{ dispari} \qquad 2(q+r+s+t)+2d+1 \leq n,$$

onde:

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{per } n \text{ pari} & q+r+s+t+d \leq \dfrac{n}{2}, \\[2ex] \text{per } n \text{ dispari} & q+r+s+t+d \leq \dfrac{n-1}{2}. \end{cases}$$

Quando si abbiano per $C^n$ tre circuiti (pari) $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, tali che per

[7] G. BIGGIOGERO, a) *Sulle curve piane, algebriche, reali, che presentano "massimi d'inclusione"*, « Rend. R. Ist. Lombardo », vol. LV, serie II, (1922), pagg. 499-510; b) *Gruppi di massimi d'inclusione per curve piane, algebriche, reali, d'ordine n.* « Rend. R. Ist. Lombardo », vol. LVI, serie II, (1923), pagg. 841-849.

essi valga nella (1) relativa alla parità di $n$ il segno $=$, si dirà che $C^n$ presenta un « massimo d' inclusione »:

$$(q, r, s) \quad (^8).$$

4. Utilizzando il metodo della proiezione stereografica si sono potuti costruire notevoli tipi di curve d' ordine assegnato dotate del massimo numero di circuiti e presentanti « massimi d' inclusione ».

Precisamente, assegnato l' ordine pari $n$, si dimostra l' esistenza (per tali curve e tanto sulla quadrica a punti iperbolici quanto su quella a punti ellittici) di « massimi d' inclusione » del tipo:

$$\begin{array}{ll} (q, q, q) & \text{per } n = 6q \\ (q+1, q, q) & \text{per } n = 6q+2 \\ (q+1, q+1, q) & \text{per } n = 6q+4 \quad (^9). \end{array}$$

Si dimostra poi, utilizzando invece il metodo della coppia di piani, l' esistenza tanto sulla quadrica a punti iperbolici, quanto su quella a punti ellittici, di « massimi d' inclusione » del tipo:

$$\begin{array}{ll} (r-1, r-1, 2) & \text{per } n = 4r \\ (r-1, r-2, 2) & \text{per } n = 4r-2, \end{array}$$

ai quali è da aggiungersi un tipo

$$(r-1, r-1, 1)$$

trovato per una curva, sulla quadrica a punti iperbolici, d' ordine $n = 4r$, dotata di due circuiti dispari.

5. Nell' ultima parte della mia dissertazione ho risolto, per le curve prossime a multilateri, una questione lasciata in sospeso dal prof. L. Brusotti nella Nota citata in (5).

In essa sono state studiate curve algebriche reali di una quadrica non specializzata dedotte per « piccola variazione » di multilateri nell' ipotesi che nel processo di « piccola variazione » la quadrica rimanga immutata oppure vari senza specializzarsi.

(8) Talune delle configurazioni sulla quadrica studiate da M. Piazzolla-Beloch nel lavoro citato in (3) b), estendendo i risultati di D. Hilbert sulle curve piane, possono rientrare nei « massimi d' inclusione » qui definiti, come caso particolare.

(9) Tali « massimi d' inclusione » possono considerarsi l' estensione di quelli studiati nel piano da G. Biggiogero in (7) e da M. Farina in: *Sulle curve piane, algebriche, reali che presentano "massimi d' inclusione"*, in corso di stampa in « Rend. R. Ist. Lombardo ».

In tale ipotesi si ottengono curve dotate del massimo numero di circuiti compatibile col genere soltanto nel caso in cui il multilatero formato con generatrici d'ambo i sistemi contenga, per es. del primo sistema, od una sola generatrice o due generatrici.

Rimaneva dubbio se prendendo le mosse da una quadrica spezzata in due piani, cioè spezzando il multilatero in due multilateri piani connessi, fosse possibile raggiungere, in altri casi, il massimo numero di circuiti compatibile col genere. Ora l'analisi da me compiuta ha portato a concludere che sotto il nuovo aspetto si presentano taluni dei casi già noti, ma che un solo caso essenzialmente nuovo è da aggiungersi ed è quello della sestica gobba di genere 4 con 5 circuiti dedotta per «piccola variazione» opportuna, sia dal sistema di due trilateri piani prospettivi, sia da un opportuno sistema connesso di un quadrilatero piano e di una coppia di rette incidenti.

Tali risultati riguardano tanto il caso della quadrica a punti ellittici quanto quello della quadrica a punti iperbolici.