

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

R. CALAPSO

## Sulle superficie isoterme

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 2,*  
Vol. 1 (1939), n.1, p. 12–17.

Unione Matematica Italiana

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1939\\_2\\_1\\_1\\_12\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1939_2_1_1_12_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

## Sulle superficie isoterme.

Nota di R. CALAPSO (a Messina).

**Sunto.** - Si dimostra che la determinazione delle superficie isoterme dello spazio ordinario equivale a quella delle reti o a curvatura media isotropa nulla di uno spazio ellittico quadridimensionale. Ciò permette di interpretare le superficie isoterme e quelle di GUICHARD secondo un unico punto di vista, a norma del quale si segnala qualche applicazione.

**1. Riepilogo sugli invarianti conformi delle superficie isoterme.** — In una memoria del mio caro babbo <sup>(1)</sup> vengono introdotti, per lo studio della superficie isoterme dello spazio ordinario, tre invarianti di queste, rispetto alle trasformazioni del gruppo conforme, da lui indicati con  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $J$  e definiti nel modo seguente.

Si osserva anzitutto che il problema di determinare le superficie isoterme consiste nel trovare tre funzioni  $\varphi$ ,  $D$ ,  $D''$ , di due variabili  $u$  e  $v$ , per modo che esista una superficie avente per prima e seconda forma fondamentale le due forme quadratiche  $e^\varphi(du + dv)$ ;  $Ddu^2 + D''dv^2$ . Per questo occorre e basta <sup>(2)</sup> che le funzioni  $\varphi$ ,  $D$ ,  $D''$  si determinino dalle equazioni di GAUSS e CO-DAZZI;

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{DD''}{e^{2\varphi}} = - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right) \\ \frac{\partial D}{\partial v} = (D + D'') \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial D''}{\partial u} = (D + D'') \frac{\partial \varphi}{\partial u} \end{array} \right.$$

Per integrare questo sistema il mio babbo sviluppa un metodo, per il quale ponendo

$$(2) \quad D = \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega + \Omega) e^\varphi, \quad D'' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega - \Omega) e^\varphi$$

<sup>(1)</sup> P. CALAPSO, *Sulle superficie a linee di curvatura isoterme*, « Rend. del Circolo Matem. di Palermo », 1903, ed « Annali di Matem. », serie III, tomo XXIV, 1915, pag. 11 e seguenti; cfr. con BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale.*, Pisa 1902, tomo III, pag. 26; DARBOUX *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, pagg. 250, 253.

<sup>(2)</sup> BIANCHI, l. c., t. I, pag. 122.

L'integrazione del sistema dipende dall'equazione del 4° ordine:

$$(3) \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (\omega^2) = 0$$

che in tal modo caratterizza le superficie isoterme dello spazio ordinario.

In forza di questa si può introdurre poi una funzione  $J$ , da dedursi per quadrature dal sistema:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial u} = -2 \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial u} (\omega^2) \\ \frac{\partial J}{\partial v} = 2 \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} (\omega^2) \end{cases}$$

e ne risulta così oltre  $\omega$  ed  $\Omega$ , un terzo invariante delle superficie isoterme rispetto alle trasformazioni del gruppo conforme <sup>(3)</sup>.

**2. Deduzione di una rete  $O_s$ .** — Se nelle (4) possiamo

$$\omega = \sqrt{2} e^{\theta_1}$$

otteniamo

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial u} = -2 \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial u} (e^{2\theta_1}) \\ \frac{\partial J}{\partial v} = 2 \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial v} (e^{2\theta_1}) \end{cases}$$

e ponendo ancora:

$$(6) \quad \begin{cases} a_1 = e^{\theta_1}; & b_1 = e^{\theta_1} \\ a_2 + ia_3 = e^{-\theta_1}; & b_2 + ib_3 = -e^{-\theta_1} \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(a_2 - ia_3) = e^{\theta_1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u^2} + \frac{1}{2} e^{\theta_1} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \right)^2 - \frac{1}{2} e^{\theta_1} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right)^2 - \\ \quad - \frac{e^{\theta_1}}{2} (J - 2e^{2\theta_1}) - \frac{1}{2} e^{3\theta_1}; \\ -\frac{1}{2}(b_2 - ib_3) = e^{\theta_1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial v^2} - \frac{1}{2} e^{\theta_1} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{2} e^{\theta_1} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right)^2 + \\ \quad + \frac{e^{\theta_1}}{2} (J + 2e^{2\theta_1}) - \frac{1}{2} e^{3\theta_1}; \end{cases}$$

<sup>(3)</sup> P. CALASPO, *Sugli invarianti del gruppo delle trasformazioni conformi dello spazio*, « Rend. del Circolo Matem. di Paterno », 1906.

risultano le equazioni seguenti

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_1}{\partial v} = \frac{\partial \theta_1}{\partial v} b_1; \quad \frac{\partial b_1}{\partial u} = \frac{\partial \theta_1}{\partial u} a_1; \\ \frac{\partial(a_2 + ia_3)}{\partial v} = \frac{\partial \theta_1}{\partial v} (b_2 + ib_3); \quad \frac{\partial(b_2 + ib_3)}{\partial u} = \frac{\partial \theta_1}{\partial u} (a_2 + ia_3) \\ \frac{\partial(a_2 - ia_3)}{\partial v} = \frac{\partial \theta_1}{\partial v} (b_2 - ib_3); \quad \frac{\partial(b_2 - ib_3)}{\partial u} = \frac{\partial \theta_1}{\partial u} (a_2 - ia_3) \\ \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial v^2} + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \end{array} \right.$$

che sono proprio quelle di GUICHARD relative ad una rete  $O$  isoterma di uno spazio ellittico a quattro dimensioni (brevemente: rete  $O_4$ ) (4).

3. Caratterizzazione della rete  $O_2$  ottenuta al § precedente. — Per definire, come è noto, una rete  $O$  di uno spazio ellittico a quattro dimensioni possiamo assumere come coordinate di WEIERSTRASS, del punto che descrive una siffatta rete, gli elementi della 1ª riga di un determinante ortogonale di GUICHARD (5)

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & \dots & x_{35} \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_5 \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_5 \end{vmatrix}$$

i cui elementi, funzioni di due parametri  $u$  e  $v$ , soddisfano ad equazioni della forma (6)

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x_{kr}}{\partial u} = a_k \xi_r; \quad \frac{\partial x_{kr}}{\partial v} = b_k \eta_r \\ \frac{\partial \xi_r}{\partial u} = -\sum_{s=1}^3 a_s x_{sr} - p \eta_r; \quad \frac{\partial \xi_r}{\partial v} = q \eta_r \\ \frac{\partial \eta_r}{\partial u} = p \xi_r; \quad \frac{\partial \eta_r}{\partial v} = -\sum_{s=1}^3 b_s x_{sr} - q \xi_r \end{array} \right.$$

(4) C. GUICHARD, *Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques*, « Annales de l'Ecole normale supérieure », 1897, 1857, 1903 ». Il GUICHARD, chiama rete  $O_s$  la rete ortogonale di uno spazio ellittico; cfr. R. CALAPSO, *Intorno alle reti e congruenze cicliche di un spazio ellittico a tre dimensioni*, « Rend. Circolo Matem. di Palermo », 1527,

(5) GUICHARD, l. c., ovvero. P. CALAPSO, *Sulle trasformazioni dei sistemi di linee coniugate ed ortogonali nello spazio  $S_n$* , « Ann. di Matem. », t. XXX, serie III, 1921, pag. 119 e segg.

(6) Per comodità del lettore riportiamo le formule fondamentali del GUICHARD.

con le condizioni

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_s}{\partial v} = p b_s; \quad \frac{\partial b_s}{\partial u} = q a_s \\ \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u} + \sum_{s=1}^3 a_s b_s = 0. \end{array} \right.$$

A norma di quanto ha stabilito il babbo (7), le quantità

$$(11) \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{a_2 + i a_3}{a_1}, \quad \frac{1}{\rho_2} = \frac{b_2 + i b_3}{b_1} \quad (i = \sqrt{-1})$$

sono le curvatures isotrope della nostra rete, mentre la somma  $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$  è la curvatura media isotropa (8).

Vogliamo caratterizzare il caso in cui la suddetta curvatura media isotropa sia nulla. Si avrà

$$(12) \quad a_2 + i a_3 = \sigma a_1; \quad b_2 + i b_3 = -\sigma b_1$$

e da queste deduciamo, in base alle precedenti equazioni fondamentali:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial v} = -2 \frac{\partial}{\partial v} \log a_1 \\ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial u} = -2 \frac{\partial}{\partial u} \log b_1 \end{array} \right.$$

segue

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{U}{V}$$

essendo  $U$  e  $V$  funzioni, rispettivamente, della sola  $u$  e della sola  $v$ .

Possiamo dunque porre:

$$(14) \quad a_1 = e^{\theta_1}; \quad b_1 = e^{\theta_1}$$

e si deduce

$$\sigma = \frac{1}{a_1^2};$$

quindi si ha

$$(15) \quad a_2 + i a_3 = e^{-\theta_1}; \quad b_2 + i b_3 = e^{-\theta_1}.$$

(7) P. CALAPSO, *Intorno alle congruenze rettilinee sulle cui superficie focali si corrispondono le linee di curvatura*, « Ann. di Matem. », serie IX, 1930-31.

(8) Questi nuovi concetti, introdotti dal mio babbo, si sono dimostrati molto fecondi negli studi delle reti  $O$ .

Ed ora se poniamo

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}(a_2 - ia_3) &= e^{\theta_1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u^2} + \frac{1}{2} e^{\theta_1} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \right)^2 - \frac{1}{2} e^{\theta_1} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right)^2 - \\ &\quad - \frac{e^{\theta_1}}{2} (J - 2e^{2\theta_1}) - \frac{1}{2} e^{3\theta_1}; \\ -\frac{1}{2}(b_2 - ib_3) &= e^{\theta_1} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial v^2} - \frac{1}{2} e^{\theta_1} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{2} e^{\theta_1} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial v} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{e^{\theta_1}}{2} (J_1 + 2e^{2\theta_1}) - \frac{1}{2} e^{3\theta_1} \end{aligned} \right.$$

vediamo che la relazione [dedotta dalle (10)]:

$$(17) \quad \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial v^2} + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

dà

$$J_1 = J.$$

Infine dalle relazioni

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} (a_2 - ia_3) &= \frac{\partial \theta_1}{\partial v} (b_2 - ib_3) \\ \frac{\partial}{\partial u} (b_2 - ib_3) &= \frac{\partial \theta_1}{\partial u} (a_2 - ia_3) \end{aligned} \right.$$

seguono le (5).

Si conclude allora che:

Le reti  $O$  a curvatura media isotropa nulla, di uno spazio ellittico a quattro dimensioni, coincidono con quelle segnalate al § precedente e sono quindi analiticamente equivalenti alle superficie isoterme dell'  $S_3$  euclideo.

Ricordando ora un mio precedente risultato, secondo il quale la determinazione delle superficie di GUICHARD equivale a quella delle reti  $O$  (di uno spazio ellittico quadridimensionale) a curvatura media isotropa costante e diversa da zero <sup>(9)</sup>, si riconosce che le superficie isoterme e quelle di GUICHARD si unificano sotto l'unico punto di vista di reti  $O$ , a curvatura media isotropa costante, di uno spazio ellittico a quattro dimensioni, distinguendosi

<sup>(9)</sup> R. CALAPSO, *Alcune superficie di Guichard ecc.*, « Boll. della U. M. I. », 1935. Qualche punto solo accennato di questa memoria trovasi sviluppato in U. SALINI, *Sulle reti  $O$  di Guichard a curvatura media isotropa costante*, « Giornale di Matem. di Battaglini », 1936.

le due classi dal fatto che la curvatura può essere nulla o diversa da zero.

Si noti ancora che alla rete  $O_s$ , dedotta al § 1, può ancora applicarsi, in quanto è isoterma, il procedimento indicato ai §§ 2 e 3 della mia citata nota sulle superficie di GUICHARD, sicchè è deducibile una classe di superficie  $R$  la cui determinazione dipende dall'integrazione dell'equazione (3) delle superficie isoterme.

Questo fatto, noto in sostanza per le ricerche del DEMOULIN <sup>(10)</sup>, viene qui stabilito in modo da potersi effettivamente compiere il passaggio dagli integrali della (3) alla segnalata classe di superficie  $R$ , in analogia ad altre esplicitazioni da me fatte sull'argomento in questione <sup>(11)</sup>.

Di più, il procedimento segnalato, permette di esplicitare, come trasformazioni delle  $R$ , le note trasformazioni delle superficie isoterme dello spazio ordinario <sup>(12)</sup>.

<sup>(10)</sup> A. DEMOULIN: *Sur les surfaces*  $\mathcal{Q}$ , « Comptes Rendus », 1911, pagg. 707 e 927. Questa citazione andava anche fatta nella mia nota citata in <sup>(9)</sup>. Il DEMOULIN chiama  $\mathcal{Q}$  le superficie sulla cui normale esistano punti che descrivano, al variare dei parametri delle linee di curvatura, reti a invarianti uguali. Egli caratterizza queste superficie e dimostra che sono le trasformate di LIE delle superficie  $R$ . Fa vedere che alla classe delle  $\mathcal{Q}$  appartengono le isoterme e le superficie GUICHARD. Poggia quest'ultima conclusione sulle formole stabilite dal mio babbo nella memoria: P. CALAPSO, *Alcune superficie di Guichard e le relative trasformazioni*, « Ann. di Matem. », 1905. Cfr. EISENHART, *Transformation of surfaces*, pag. 218. Princeton 1923.

<sup>(11)</sup> R. CALAPSO: *Alcune esplicitazioni su una trasformazione di Lie*, « Rend. del Sem. Matem. di Padova », 1935.

<sup>(12)</sup> Oltre alla trasformazione  $C_m$  stabilita dal babbo nei lavori citati in <sup>(1)</sup> e alla  $D_m$  di DARBOUX e BIANCHI, vedasi la trasformazione da me stabilita in: R. CALAPSO, *Una nuova trasformazione delle superficie isoterme*, « Lincei » 1928. La  $C_m$  si è presentata anche al THOMSEN nello studio della deformazione nel gruppo conforme. Su ciò vedasi la memoria del babbo; P. CALAPSO, *Il problema della deformazione nel gruppo conforme ecc.*, « Annali della Scuola Normale superiore di Pisa », 1932. Per una interpretazione della  $C_m$  (per reti  $O$  isoterme dell' $S_4$ ) come deformazione proiettiva delle superficie  $R$ , vedi: R. CALAPSO, *Riduzione della deformazione proiettiva della superficie  $R$  alla trasformazione  $C_m$  delle superficie isoterme*, « Lincei » 1928. Per varie indicazioni su questioni riferentesi alle superficie di GUICHARD rimando alla memoria del babbo: P. CALAPSO, *Sulle trasformazioni delle superficie di Guichard*, « Ann. di Matem. », serie III, t. XXIX, pag. 71 e seguenti.