
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIOVANNI FROSALI, PAOLO MARIA MARIANO

Moto di una bicicletta con ruote non circolari

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 4
(2019), n.2, p. 145–157.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2019_1_4_2_145_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2019_1_4_2_145_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Moto di una bicicletta con ruote non circolari

GIOVANNI FROSALI

DIMAI, Università di Firenze

E-mail: giovanni.frosali@unifi.it

PAOLO MARIA MARIANO

DICEA, Università di Firenze

E-mail: paolo.mariano@unifi.it

Sommario: *Su quale terreno può rotolare senza scivolare una ruota non circolare? Sulla questione, di cui si sono interessate le cronache perché è stata proposta come tema agli esami della Scuola Media Superiore del 2017, richiamiamo alcune proposte presenti in letteratura e formuliamo qualche ulteriore osservazione.*

Abstract: *What kind of ground may allow a noncircular wheel to roll without sliding? Such a question has been proposed in final national exams of the Italian high school system in 2017, and it attracted attention in the news. Here, we review some available pertinent answers, adding further remarks.*

1. – Introduzione

Da un punto di vista costruttivo, la bicicletta ha una struttura piuttosto semplice: un telaio, due ruote gommate, due dentate o poco più, due pedivelle, una catena di trasmissione, una sella, due freni. Tale semplicità spinse Gianni Brera ad attribuirle un “modestissimo estro meccanico”. Eppure, la descrizione qualitativa e quantitativa del suo moto in termini matematici non è per nulla banale, anzi si scontra con questioni vieppiù complesse quando si voglia includere un numero sempre più grande di dettagli. Problemi da affrontare riguardano principalmente l’interazione del ciclista con la bicicletta – l’aspetto più complesso –, la descrizione dell’avantreno, la rappresentazione del contatto con il terreno, l’influenza delle asperità del suolo sull’avanzamento.

Nel 1898, Emmanuel Carvallo (1856-1945) ottenne il Prix Fourneyon dell’*Académie des Sciences*

di Parigi per una memoria dal titolo “Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette”, pubblicata nel 1901 (data incerta) per i tipi dell’Accademia, in un volume di 195 pagine. (Carvallo era un fisico teorico francese di origine messicana, ex allievo dell’École Polytechnique prima e poi della Sorbonne, dove discusse una tesi sull’ottica, promossa da Henri Poincaré.) L’anno successivo, cioè il 1899, su *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* (vol. XXX, pp. 312-384), Francis John Welsh Whipple (1876-1943), matematico e meteorologo, membro del Trinity College di Cambridge, pubblicò un articolo dal titolo “The stability of the motion of a bicycle”, in cui presentava una rappresentazione del moto della bicicletta in termini matematici, formulata quando era ancora studente, che ancora oggi è un modello studiato, sviluppato e applicato. In quell’articolo non appare alcun riferimento a Carvallo ma sono menzionati, in maniera critica, solo un trattato di 226 pagine (più 16) di G. Bourlet, “*Traité des bicycle et des bicyclettes*”, Gautier-Villars, Parigi, 1895 (data incerta), e le

Accettato: il 20 luglio 2019.

analisi, datate dicembre 1898, di un ingegnere, non meglio identificato nell'articolo di Whipple se non come Mr. McGaw.

Da allora, l'attenzione alla bicicletta, dal punto di vista della meccanica razionale, è tornata ripetutamente e a vari gradi di approfondimento. Sono state affrontate in maniera varia questioni di modellazione, stabilità e controllo. Sono state inoltre sviluppate rappresentazioni del moto della bicicletta che corrispondono a sistemi integrabili [21] e si sono trovate anche analogie tra le descrizioni semplificate e le strutture formali nate per affrontare problemi differenti [11]. La letteratura relativa alla meccanica della bicicletta è enorme; esempi rilevanti sono elencati in bibliografia: [7], [17], [8], [15], [22], [5], [18], [9], [1], [2], [3], [4], [6], [10], [12], [13], [14], [19], [20], [23], [24].

Tra tutte le questioni che riguardano il moto della bicicletta, in questa nota ci limitiamo innanzitutto a valutare la forma del terreno necessaria affinché una bicicletta a ruote poligonali possa avanzare per puro rotolamento, mantenendo costante la quota del baricentro rispetto ad un sistema di riferimento fisso. Di seguito, proponiamo alcune riflessioni sul caso di ruote non poligonali. Trascuriamo le oscillazioni laterali della bicicletta, indotte dal ciclista, cosicché il moto possa considerarsi intrinsecamente piano.

Non intendiamo qui proporre un'introduzione a – e una descrizione di – un'area della matematica o una sua classe di applicazioni. Nello spirito di sottolineare l'utilizzo della matematica nella descrizione dei fenomeni percepiti, intendiamo solo riassumere alcune idee sviluppate altrove su un semplice aspetto di un vasto tema, quale quello del movimento di una bicicletta, che ha suscitato a lungo – e tuttora stimola – l'interesse degli scienziati, in particolare dei matematici.

La nostra trattazione muove dall'analisi della forma del terreno su cui possa rotolare una ruota quadrata (al National Museum of Mathematics [17] di New York è esposta una bicicletta che esibisce ruote di tal fatta). Su un piano, una bicicletta tradizionale che si muova in linea retta mantiene il centro di massa a quota costante se si trascurano le oscillazioni laterali indotte dal ciclista. Ciò non accade per la bicicletta a ruote quadrate. Per avere per essa una proprietà analoga, è quindi necessario che il suolo su cui si muove non sia piano. Il problema è quindi quello di determinarne la forma. Per indicare una risposta, seguiremo l'analisi di I.G.B. Robison [17].

Le considerazioni qui esposte hanno carattere cinematico e non coinvolgono la descrizione delle forze che agiscono su una bicicletta in moto e quelle che si scambiano porzioni distinte della bicicletta stessa.

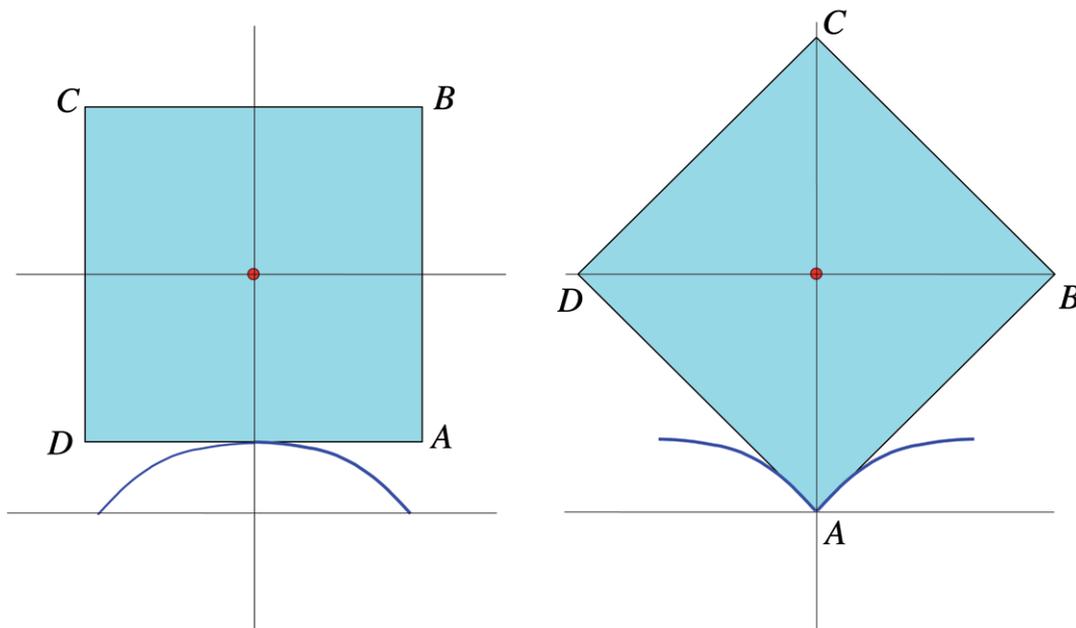


FIGURA 1 – Fasi del moto piano di una ruota quadrata su terreno curvo, tale da far sì che il baricentro della ruota stessa rimanga a quota costante.

2. – Il problema della ruota quadrata

Quando si afferma che una ruota rotola senza strisciare, si intende che il contatto ruota-terreno è puntiforme e che tale punto è istantaneamente fermo.

Consideriamo un ambiente bidimensionale in cui il terreno sia una linea orizzontale, la ruota un disco rigido. Ipotizziamo anche che il contatto puntiforme in questo ambiente bidimensionale sia tale da garantire assenza di strisciamento. Durante il moto il baricentro della ruota (presunta omogenea) si mantiene a una quota pari al suo raggio.

Se considerassimo, ad esempio, una ruota quadrata omogenea di lato l , nel rotolamento su un terreno orizzontale la quota del centro di massa oscillerebbe rispetto al terreno tra $\frac{l}{2}$ e $\sqrt{2} \frac{l}{2}$ (Figura 1).

Consideriamo il sistema di riferimento $(\Omega; x, y)$ indicato nella Figura 2. Ci si può porre il problema di valutare la forma del terreno (una curva in ambito bidimensionale) su cui una ruota quadrata, omogenea, di lato l possa rotolare senza slittare, mantenendo il suo centro geometrico a una quota pari a $\sqrt{2} \frac{l}{2}$. Qui di seguito indichiamo con $d = \sqrt{2} \frac{l}{2}$ la quota del centro della ruota nel riferimento scelto.

Una risposta a questa questione è stata fornita nel 1960 da I.G.B. Robison [17] ed è la sua analisi che seguiremo nel seguito (si veda anche [7]).

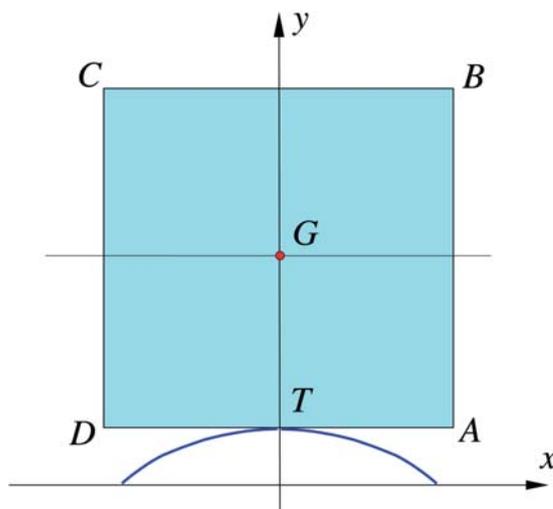


FIGURA 2 – Ruota in posizione iniziale

Come fatti preliminari, ricordiamo che il punto di contatto T coincide con il centro di rotazione istantanea, cioè il punto intorno al quale il disco ruota per un intervallo di tempo infinitesimo. Così la velocità del centro di massa G è data da $\vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge (G - T)$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare del disco. Inoltre richiediamo che il centro di massa si mantenga alla stessa distanza dal piano orizzontale.

2.1 – Terreno adatto al rotolamento di una ruota quadrata

Sempre con riferimento alla situazione bidimensionale in Figura 3, il profilo incognito del terreno è il

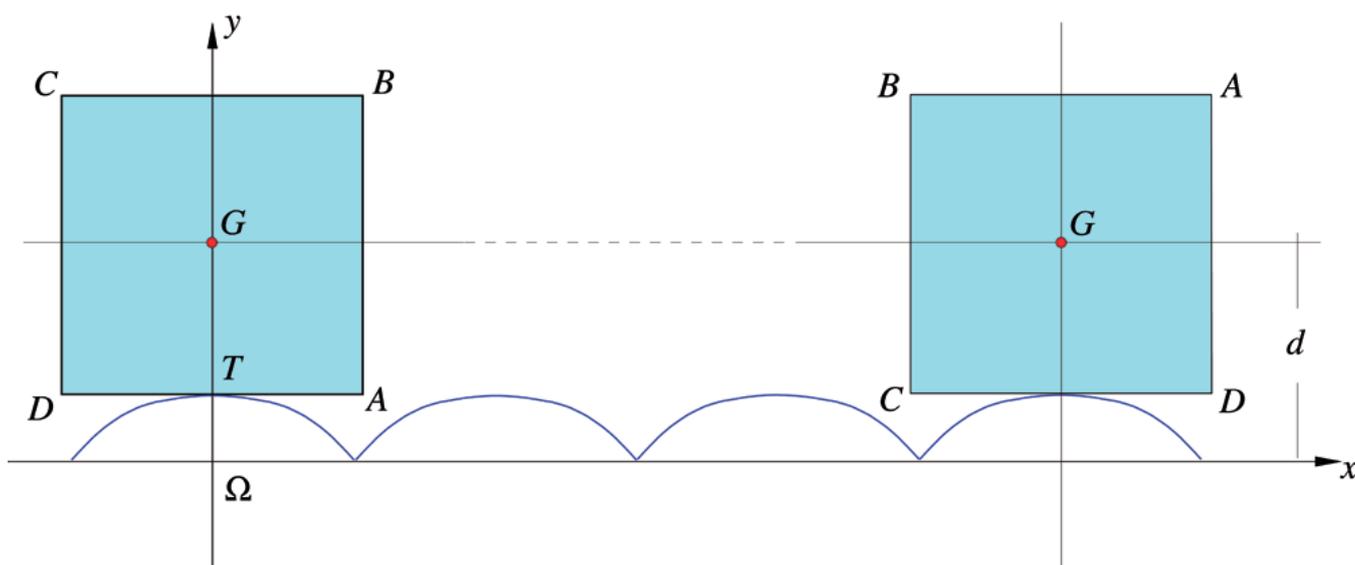


FIGURA 3 – Il profilo deve essere tale da mantenere il centro della ruota alla stessa quota.

luogo dei punti (x, y) che soddisfano una qualche relazione del tipo $y = f(x)$. Per ragioni di concisione, si indichi con a il semilato del quadrato: $a = \frac{l}{2}$.

Durante il rotolamento del lato del quadrato sul profilo, si richiede che i cammini successivi del punto di contatto T sulla ruota e sul profilo $y = f(x)$ del terreno siano uguali. Il rotolamento del quadrato avviene dunque senza strisciamento.

Quindi la velocità istantanea di ogni punto P della ruota quadrata ha la direzione ortogonale al vettore $(P - T)$. In particolare la velocità del centro del quadrato G è in modulo uguale a $\omega \overline{GT}$ dove ω è la velocità angolare della ruota quadrata e \overline{GT} è la distanza del punto G dal punto di contatto della ruota, mentre la direzione è orizzontale. Pertanto, con riferimento alla Figura 4, si può scrivere

$$y(x) + \overline{GT} = y(x) + \frac{a}{\cos \theta} = d,$$

ovvero

$$y(x) = d - \frac{a}{\cos \theta}.$$

Nella Figura 4, θ indica l'angolo \widehat{HGT} , cioè l'inclinazione del quadrato rispetto alla verticale. Essa è pari all'angolo che il lato DA forma con l'orizzontale.

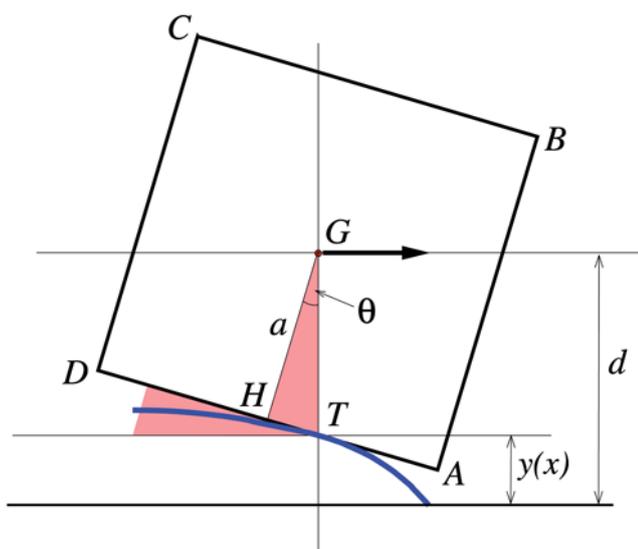


FIGURA 4 – Rotolamento della ruota quadrata.

Tenendo conto che $-\tan \theta = y'(x)$, si ha quindi

$$(2.1) \quad \frac{1}{\cos \theta} = \pm \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \pm \sqrt{1 + y'^2},$$

da cui emerge la relazione differenziale

$$(2.2) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(d-y)^2}{a^2} - 1,$$

cioè, scegliendo il segno positivo,

$$(2.3) \quad \int \frac{a}{\sqrt{(d-y)^2 - a^2}} dy = \int dx.$$

Siccome

$$\begin{aligned} \int \frac{a}{\sqrt{(d-y)^2 - a^2}} dy &= \\ &= -a \int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} du = -a \cosh^{-1} u, \end{aligned}$$

ove $u = \frac{d-y}{a}$ e \cosh^{-1} è l'inverso della funzione coseno iperbolico, ne segue

$$\cosh^{-1} \left(\frac{d-y}{a} \right) = -\frac{x}{a} + c, \quad \text{con } c \text{ costante,}$$

ovvero

$$y = d - a \cosh \left(-\frac{x}{a} + c \right).$$

Per calcolare la costante c , imponiamo il valore di y in $x = 0$. Avendo indicato con d la quota del centro di massa, all'istante iniziale si ha

$$y(0) + a = d.$$

Per $x = 0$, segue

$$y(0) = d - a \cosh(c) = d - a,$$

da cui $\cosh c = 1$, ovvero $\exp c + \exp(-c) = 2$, cioè $c = 0$. Il profilo del suolo è dunque

$$(2.4) \quad y(x) = d - a \cosh \left(\frac{x}{a} \right) = d - \frac{a}{2} \left[\exp \left(\frac{x}{a} \right) + \exp \left(-\frac{x}{a} \right) \right].$$

Si tratta dell'equazione di quella che possiamo chiamare *catenaria invertita*, visto che la catenaria è il profilo che una catena, fissata agli estremi, assume sotto l'azione del suo solo peso, la cui equazione è data dalla funzione coseno iperbolico

$$y(x) = a \cosh \left(\frac{x}{a} \right),$$

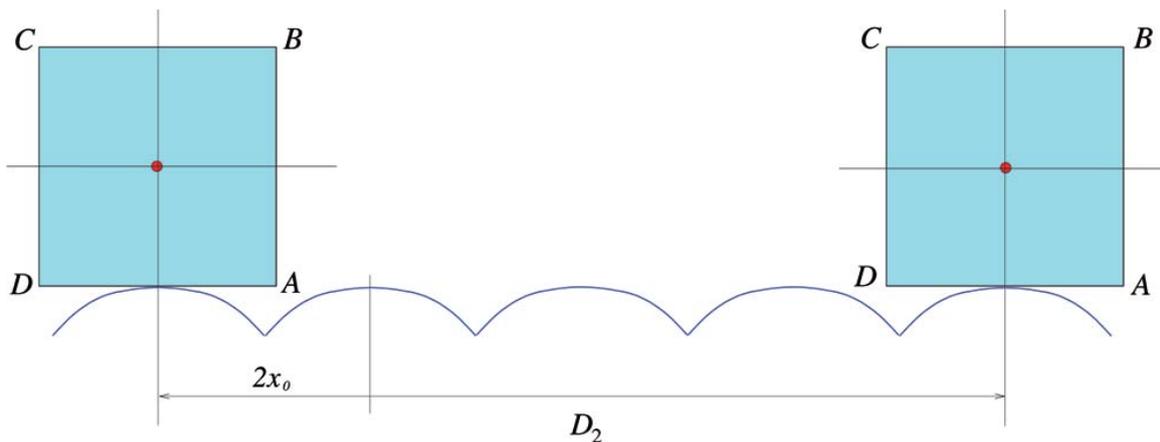


FIGURA 5 – Giro completo di una ruota quadrata

con a costante. Ribaltando la curva si ottiene il profilo derivato in precedenza, considerando il rotolamento del quadrato.

Allo stesso risultato si perviene con la scelta del segno negativo nella (2.3).

Determiniamo ora il punto x_0 tale che

$$y(x_0) = d - a \cosh\left(\frac{x_0}{a}\right) = 0.$$

Con $d = \sqrt{2} \frac{l}{2}$ si ha

$$\cosh\left(\frac{2x_0}{l}\right) = \frac{2d}{l} = \sqrt{2}.$$

Sia x_0 l'ascissa tale che $x_0 = \frac{l}{2} \cosh^{-1} \sqrt{2}$, pari a circa $0.8814 \frac{l}{2} = 0.4407 l$, la generica catenaria invertita, associata a un lato del quadrato, avrà una larghezza pari a $2x_0$ (Figura 5), che, nel caso di un quadrato di lato l , sarà circa $0,8814 l$.

Dopo un giro completo una ruota quadrata avrà percorso quindi la distanza

$$(2.5) \quad D_2 = 4l \ln(\sqrt{2} + 1) = 4 \cdot 0,8814 l.$$

Il profilo del terreno su cui possa rotolare una ruota quadrata sarà quindi costituito da una sequenza di catenarie invertite, con periodo $l \cosh^{-1} \sqrt{2}$.

2.2 – Ulteriori appunti di natura geometrica

Il lettore che non abbia molta dimestichezza con la cinematica dei corpi rigidi e che preferisca un approccio completamente geometrico, può trovare in questo paragrafo un modo alternativo per ricavare il

profilo del terreno. Ci limiteremo soltanto a dare una traccia del ragionamento.

Abbiamo già richiesto che i cammini successivi del punto di contatto T sulla ruota e sul profilo $y = f(x)$ del terreno siano uguali. Con riferimento alla Figura 6, si consideri la ruota $ABCD$ in contatto con la curva incognita nel punto (x, y) . Sia θ l'angolo che il lato DA forma con l'orizzontale. Dopo un rotolamento infinitesimo $d\theta$, privo di slittamento, il quadrato $ABCD$ raggiungerà la posizione $A'B'C'D'$ e il punto di contatto si sposterà nel punto $(x + dx, y + dy)$. A meno d'infinitesimi d'ordine superiore al primo, la lunghezza $\overline{TT'}$ del segmento TT'

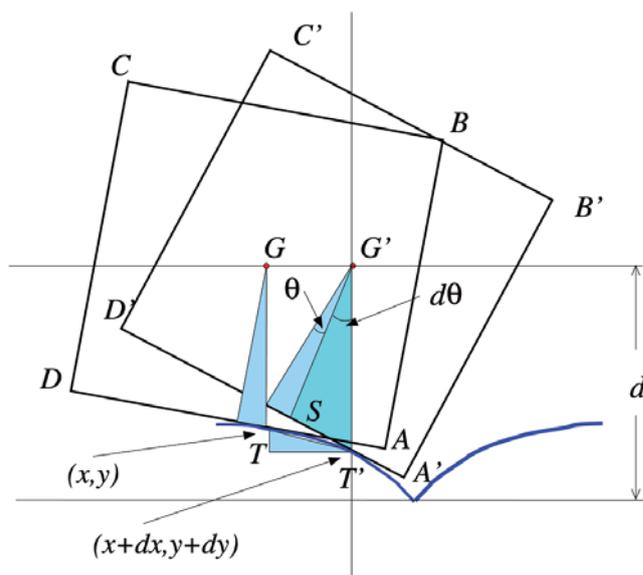


FIGURA 6 – Rotolamento (infinitesimo) della ruota quadrata. $d\theta$ è amplificato per rendere più evidente lo spostamento.

è pari a $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Allo scopo di ricavare il rotolamento infinitesimo $d\theta$ calcoliamo

$$\begin{aligned} \overline{ST}^2 &\sim \overline{TT'}^2 = (d-y)^2 + (d-(y+dy))^2 - \\ &\quad - 2(d-y)(d-(y+dy)) \cos d\theta \\ &\sim dy^2 + (d-y)(d-y-dy)d\theta^2, \end{aligned}$$

dove dz^2 sta per $(dz)^2$. Uguagliando alla distanza $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, si ottiene

$$(2.6) \quad dx^2 + dy^2 \sim dy^2 + (d-y)(d-y-dy)d\theta^2.$$

Differenziando

$$(2.7) \quad \cos \theta = \frac{a}{d-y},$$

e tenendo conto di (2.7), possiamo scrivere

$$d\theta^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \theta (d-y)^4} dy^2 = \frac{a^2}{((d-y)^2 - a^2)(d-y)^2} dy^2.$$

I simboli di uguaglianza sono qui intesi a meno di infinitesimi d'ordine superiore. Sostituendo nella relazione (2.6), e trascurando i termini del terzo ordine, si ottiene

$$dx^2 = \frac{a^2}{(d-y)^2 - a^2} dy^2.$$

Da questa relazione segue subito la (2.2), da cui si può proseguire come nel paragrafo precedente.

3. – Velocità angolare di una ruota quadrata

Quando una ruota circolare rotola senza strisciare su una linea rettilinea, la velocità del punto di contatto v (in modulo) è data da

$$v = r\dot{\theta},$$

dove r è il raggio della ruota e θ è l'angolo che la ruota forma rispetto ad una direzione fissata (ad esempio quella verticale, come in Figura 7). Se v è costante, anche la velocità angolare $\dot{\theta}$ lo è (qui e nel resto del testo il punto sovrapposto indica l'operazione di derivata rispetto al tempo).

Anche quando una ruota circolare rotola senza strisciare su una curva circolare fissa, se il punto di contatto si muove con velocità costante sulla curva anche la velocità angolare della ruota lo è. Il legame

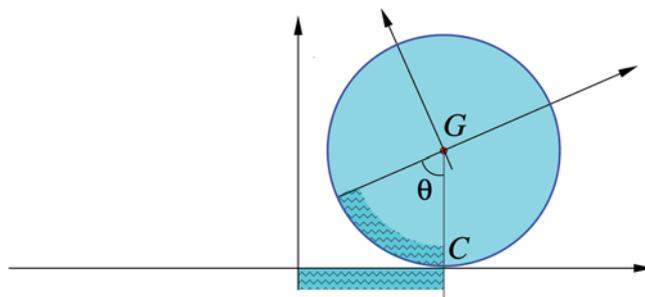


FIGURA 7 – Disco su un piano

fra gli angoli delle due ruote è pari a

$$\beta = \frac{r+R}{r} \alpha,$$

dove R è il raggio della curva circolare fissa ed r è il raggio della ruota (Figura 8). Conseguentemente il legame fra le velocità angolari è dato dalla relazione seguente:

$$\dot{\beta} = \frac{r+R}{r} \dot{\alpha}.$$

Se i raggi dei due dischi fossero uguali, ad un giro del punto di contatto sul disco fisso corrisponderebbero due giri dello stesso punto sul disco mobile. In questo caso si avrebbe, quindi, $\dot{\beta} = 2\dot{\alpha}$.

3.1 – Quadrato su un disco

Nei casi illustrati in precedenza, quando il punto di contatto si muove di moto uniforme, la rotazione della ruota circolare è anch'essa uniforme.

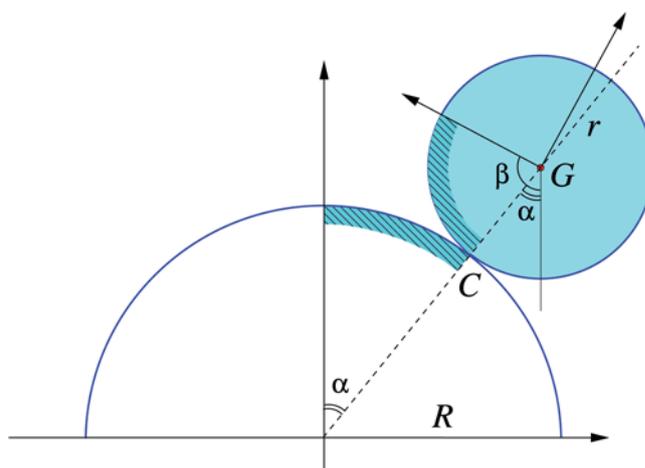


FIGURA 8 – Disco su disco

Si pone la questione se la stessa proprietà valga per la ruota quadrata. Nel caso in cui un quadrato di lato l rotoli su un disco di raggio r , rispetto al sistema di riferimento $\{G; x', y'\}$, solidale al quadrato (Figura 9), la velocità angolare è pari a

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta} \vec{e}_3$$

ove \vec{e}_3 è il versore ortogonale al piano del disegno verso chi guarda. Nel sistema di riferimento $\{O; x, y\}$, il baricentro G del quadrato (Figura 9) è individuato dal vettore

$$\begin{aligned} G - O &= (G - Q) + (Q - P) + (P - C) + (C - O) \\ &= [r \sin \theta - r\theta \cos \theta + \frac{l}{2} \sin \theta] \vec{e}_1 \\ &\quad + [r \cos \theta + r\theta \sin \theta + \frac{l}{2} \cos \theta] \vec{e}_2, \end{aligned}$$

dove \vec{e}_1 e \vec{e}_2 sono i versori nel piano relativi agli assi x e y . Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\vec{v}(G) = \left[r\theta \sin \theta + \frac{l}{2} \cos \theta \right] \dot{\theta} \vec{e}_1 + \left[r\theta \cos \theta - \frac{l}{2} \sin \theta \right] \dot{\theta} \vec{e}_2.$$

Il modulo della velocità del centro del quadrato è quindi pari a

$$(3.1) \quad v(G) = \sqrt{r^2 \theta^2 + \frac{l^2}{4}} \dot{\theta}.$$

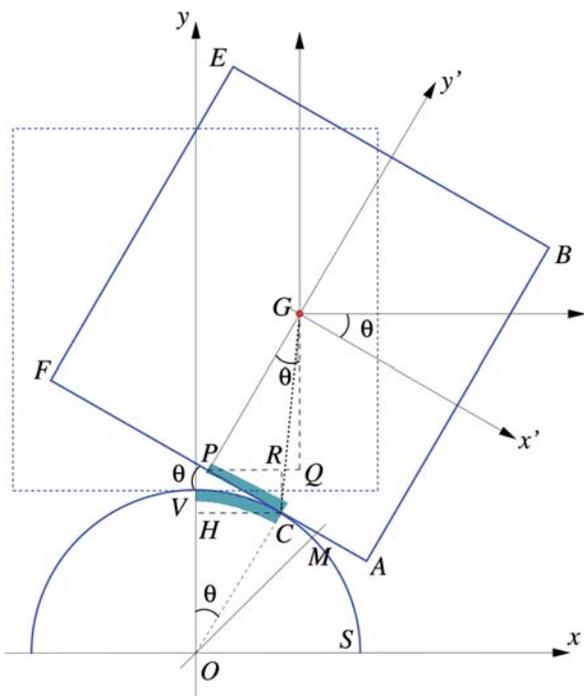


FIGURA 9 – Ruota quadrata su un disco

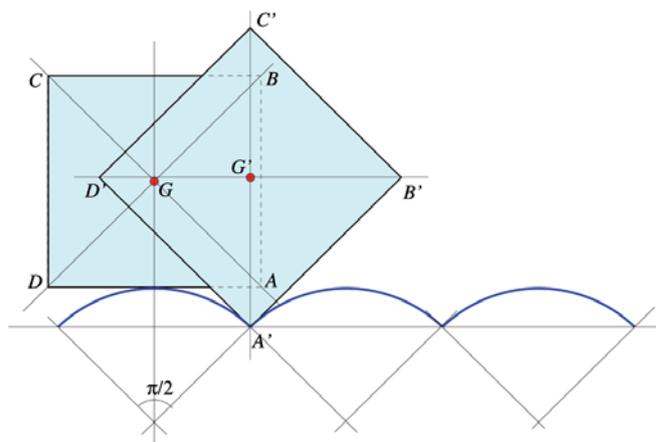


FIGURA 10 – Ruota quadrata su settori circolari di ampiezza $\pi/2$.

Se $2\pi r = 4l$, cioè se

$$(3.2) \quad l = \frac{\pi r}{2},$$

il quadrato si troverà nella stessa posizione di partenza dopo un giro completo intorno al disco.

In questo caso, il quadrato rotola sul disco per un angolo di $\frac{\pi}{4}$ fino a trovarsi tangente in M (punto medio dell'arco \widehat{VS} , con lo spigolo A). Facendo perno su M , che rimane coincidente con lo spigolo A , il quadrato ruota ancora di $\frac{\pi}{2}$ fino ad andare a posizionare il lato AB tangente al disco nel punto M . Successivamente, il quadrato rotola per un angolo di $\frac{\pi}{4}$ fino a trovarsi tangente in S col punto medio del lato AB , poi ancora di $\frac{\pi}{4}$ arrivando ad avere lo spigolo B sul disco (si noti che in Figura 9, per evidenza grafica, il rapporto fra lato del quadrato e raggio del cerchio è amplificato rispetto al rapporto (3.2)). Di seguito, facendo perno sullo spigolo B che rimane fermo sul disco, il quadrato ruota di $\frac{\pi}{2}$ fino a trovarsi con il lato BE tangente al disco. Procedendo così, il quadrato torna alla posizione iniziale, dopo aver fatto due giri.

Possiamo realizzare il moto di una ruota quadrata su un profilo fatto di settori circolari di ampiezza $\frac{\pi}{2}$. Nell'ipotesi $2l = \pi r$, partendo dalla posizione più alta, dopo un rotolamento di $\theta = \frac{\pi}{4}$, il quadrato raggiunge il punto A' (Figura 10) e il suo lato è tangente ad un nuovo settore circolare di ampiezza pari al

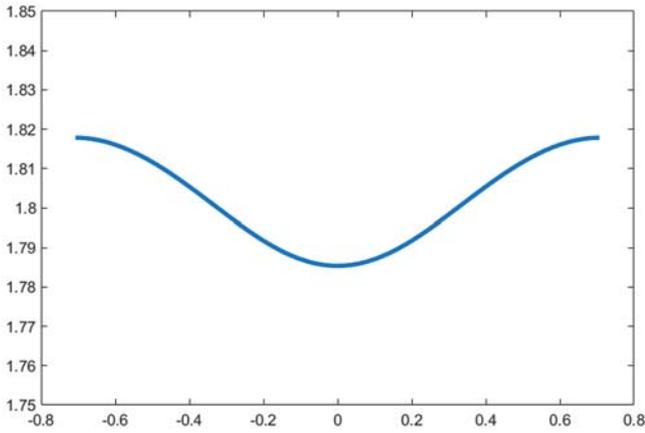


FIGURA 11 – Quota del centro della ruota quadrata che rotola su un disco

quarto di un angolo giro, posto di seguito. Di conseguenza, anche utilizzando settori circolari invece di catenarie, si può realizzare il rotolamento di una ruota quadrata su una successione di settori di ampiezza $\frac{\pi}{2}$. Il profilo circolare del suolo non è quello per cui il centro del quadrato si muove mantenendosi alla stessa quota, per cui, in questo caso, esso seguirà una curva, quella rappresentata nella Figura 11. La quota del centro del quadrato come funzione di θ fra $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$ si abbassa quando il quadrato si trova in posizione orizzontale.

Nella Figura 11 si è ipotizzato $r = 1$ e $2l = \pi r$; l'abbassamento della quota è dell'ordine del 3% della lunghezza del raggio.

3.2 – Quadrato su una catenaria

Quando un quadrato rotola sulla catenaria invertita data dalla formula (2.4), indicando con C il centro istantaneo di rotazione del quadrato, per la velocità (in modulo) del centro del quadrato G troviamo l'espressione

$$(3.3) \quad v(G) = \omega \overline{CG} = \omega \frac{a}{2} \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) + \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \right),$$

dove x è l'ascissa del punto di contatto C ed ω è la velocità angolare incognita del quadrato (Figura 12). Il punto G si muove mantenendosi alla stessa quota e la sua velocità è pari a

$$(3.4) \quad \vec{v}(G) = \dot{x} \vec{e}_1.$$

D'altronde, G ruota intorno al centro istantaneo di moto C e quindi

$$(3.5) \quad \vec{v}(G) = \vec{\omega} \wedge (d - y(x)) \vec{e}_2 = -\omega (d - y(x)) \vec{e}_1,$$

dove $y(x)$ è la funzione che rappresenta la catenaria invertita (2.4). Dal confronto fra le relazioni (3.4) e (3.5) si ottiene

$$(3.6) \quad \omega = - \frac{\dot{x}}{\frac{a}{2} \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) + \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \right)}.$$

Possiamo eliminare \dot{x} imponendo il vincolo che il punto C si muova sul profilo con velocità uniforme, ovvero $s(x)/t = v = \text{costante}$, dove $s = s(x)$ è la lunghezza del tratto percorso lungo il profilo, a partire dal vertice, lunghezza data da

$$s(x) = \frac{a}{2} \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) - \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \right).$$

Derivando $s(x(t)) = vt$ rispetto al tempo si ha

$$\frac{1}{2} \left(\exp\left(\frac{x}{a}\right) + \exp\left(-\frac{x}{a}\right) \right) \dot{x} = v$$

e, sostituendo, si ottiene infine

$$(3.7) \quad \omega = - \frac{8v}{l \left(\exp\left(\frac{2x}{l}\right) + \exp\left(-\frac{2x}{l}\right) \right)^2},$$

in funzione della coordinata x del punto di contatto C .

Finora abbiamo imposto che fosse costante la velocità del punto di contatto sul profilo della catenaria invertita. Ora invece imponiamo che la velocità \dot{x} sia costante, cioè che il centro della ruota quadrata

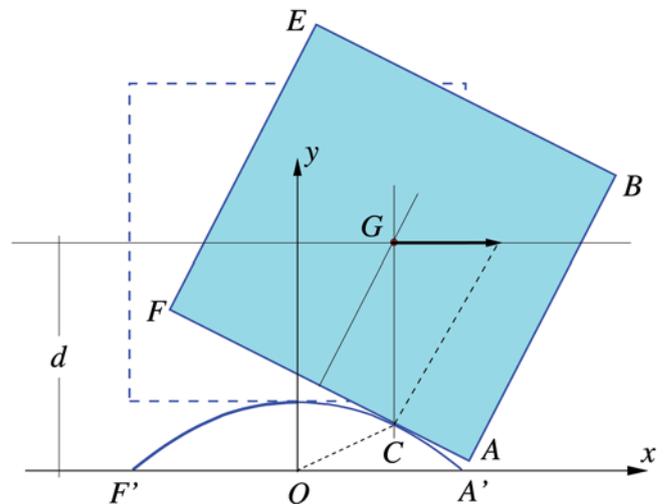


FIGURA 12 – Ruota quadrata su una catenaria

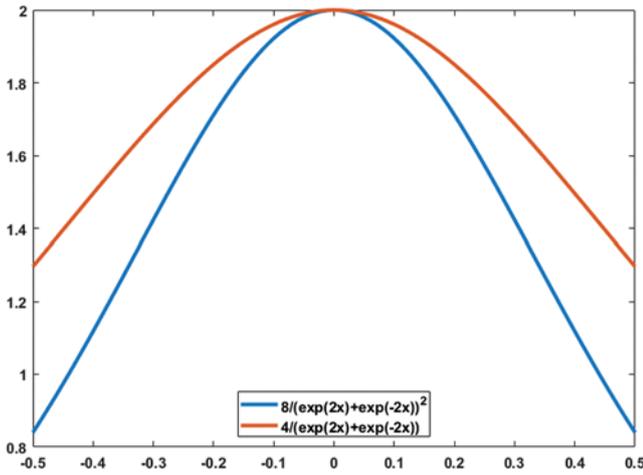


FIGURA 13 – Grafici delle velocità angolari

si muova mantenendosi alla stessa quota e con velocità uniforme. Sia $w\vec{e}_1$ la velocità di G . Dalla formula (3.6) si ottiene

$$(3.8) \quad \omega = -\frac{4w}{l\left(\exp\left(\frac{2x}{l}\right) + \exp\left(-\frac{2x}{l}\right)\right)}.$$

Al fine di mettere in luce la differenza fra i due casi, nella Figura 13 sono riportati gli andamenti dei moduli delle due velocità angolari dati dalle espressioni (3.7) e (3.8). Nella rappresentazione grafica, l , v e w sono adimensionali, con valori pari a 1.

4. – Ruote a forma di poligono regolare

I risultati precedenti possono essere generalizzati al caso di una ruota a forma di poligono regolare, con

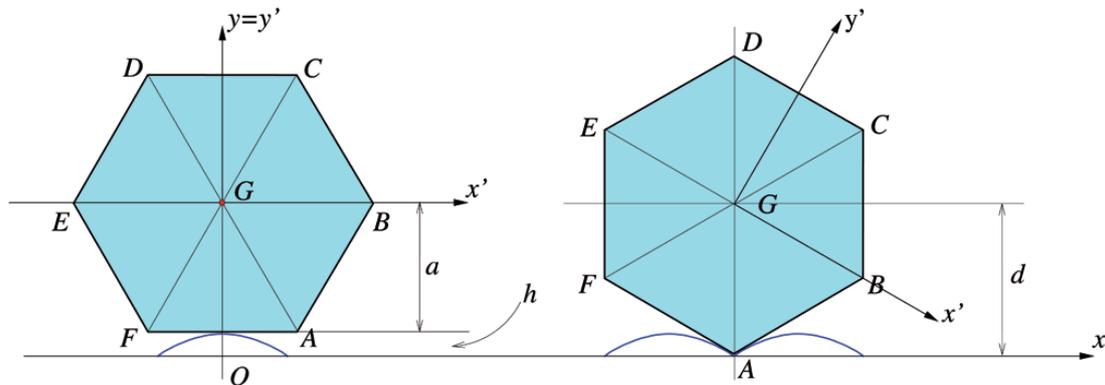


FIGURA 14 – Ruota esagonale

$2n$ lati di lunghezza l . L'apotema a_n del poligono, che corrisponde al raggio della circonferenza inscritta, è pari a

$$a_n = \frac{l}{2} \cot \frac{\pi}{2n}.$$

Considerati un sistema di riferimento fisso $\{O; x, y\}$ e uno mobile $\{G; x', y'\}$, indicati in Figura 14 per un esagono, si può determinare la quota h_n nel caso generale di una ruota poligonale, corrispondente a $y(0)$ nel sistema di riferimento scelto. Essa è data dalla differenza fra la quota del centro di massa e l'apotema:

$$(4.1) \quad h_n = y(0) = \frac{l}{2} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} - a_n = \frac{l}{2} \left(\frac{1 - \cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \right).$$

Nel caso di una ruota quadrata, cioè per $n = 2$, la distanza h_2 , secondo la relazione (4.1), è pari a

$$h_2 = \frac{l}{2} (\sqrt{2} - 1).$$

Tornando al poligono di $2n$ lati, poiché le ruote rotolano senza slittare, il segmento percorso dal punto di contatto sul lato del poligono, a partire dal punto più alto in $x = 0$, ha lunghezza s pari a $a_n \tan \theta$, con θ l'angolo di cui è ruotato il poligono prima di toccare il suolo col vertice A . Essa deve essere inoltre uguale alla distanza percorsa dal punto di contatto sulla curva $y = y(x)$ che definisce il suolo, lunghezza data da

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'(\xi)^2} d\xi.$$

Il segmento sul poligono, poi, è tangente alla curva che descrive il suolo ed è quindi tale che

$$y'(x) = -\tan \theta,$$

(Figura 14 con $0 < \theta < \frac{\pi}{2n}$). Di conseguenza, uguagliando le distanze percorse, si ha

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + y'(\xi)^2} d\xi = a_n \tan \theta = -a_n y'(x),$$

ovvero

$$a_n y'(x) = - \int_0^x \sqrt{1 + y'(\xi)^2} d\xi.$$

Differenziando, si ottiene

$$a_n y''(x) = -\sqrt{1 + y'(x)^2},$$

equazione che può essere innanzitutto riscritta, ponendo $\eta(x) = y'(x)$, in modo da darle la forma

$$\eta'(x) = -\frac{1}{a_n} \sqrt{1 + \eta(x)^2},$$

che è facilmente integrabile per separazione di variabili. Tenendo conto, infatti, che, per $x = 0$, $\eta(0) = y'(0) = 0$, si ha

$$\sinh^{-1} \eta - \sinh^{-1} 0 = -\frac{x}{a_n},$$

per cui

$$y'(x) = -\sinh \frac{x}{a_n},$$

cioè

$$y(x) - y(0) = y(x) - h_n = -a_n \cosh \frac{x}{a_n} + a_n,$$

ove h_n è la quota del vertice della curva incognita, e quindi

$$y(x) = h_n + a_n - a_n \cosh \frac{x}{a_n} = d - a_n \cosh \frac{x}{a_n}.$$

L'ascissa del punto dove si annulla la curva $y(x)$ si ottiene dall'equazione

$$a_n \cosh \frac{x}{a_n} = h_n + a_n,$$

cioè, scegliendo la soluzione positiva,

$$x = a_n \ln \left(1 + \frac{h_n}{a_n} + \sqrt{\frac{h_n^2}{a_n^2} + \frac{2h_n}{a_n}} \right).$$

Pertanto, se il poligono ruota di un angolo pari a 2π rotolando su un terreno il cui profilo è descritto da $2n$ catenarie invertite (Figura 15), il suo centro percorre una distanza pari a

$$D_n = 4n a_n \ln \left(1 + \frac{h_n}{a_n} + \sqrt{\frac{h_n^2}{a_n^2} + \frac{2h_n}{a_n}} \right).$$

Nel seguito consideriamo fissato l'apotema $a_n = a$ per ogni n , per cui al crescere del numero dei lati la lunghezza del lato relativo tenderà a diminuire. Quindi se si valuta il limite per $n \rightarrow +\infty$, tenendo conto che la lunghezza del lato generico tende a zero come

$$l_n = 2a \tan \frac{\pi}{2n}$$

e che $h_n \rightarrow 0$ come

$$h_n = \frac{l_n}{2} \left(\frac{1 - \cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \right) \sim \frac{\pi^2 a}{8n^2},$$

si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = 2\pi a.$$

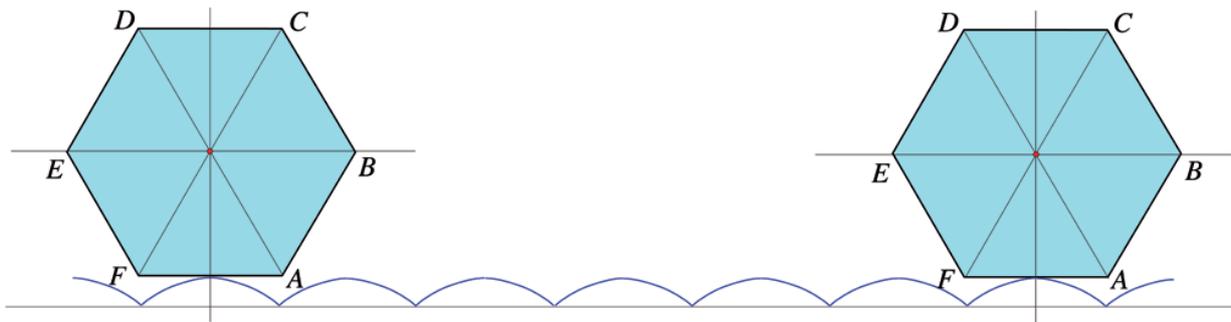


FIGURA 15 – Giro completo di una ruota esagonale

La ruota poligonale tende a una ruota circolare di raggio a , come era intuitivo aspettarsi.

5. – Ruote non poligonali

In generale si può pensare anche a ruote di forma diversa da quella di un poligono regolare, ruote che abbiano forme simmetriche rispetto a un centro intorno al quale siano libere di ruotare. E di nuovo si può ricercare un profilo del terreno su cui tali ruote possano rimanere in contatto puntiforme, senza scivolare. Dal punto di vista della cinematica si dovrà richiedere che il centro della ruota rimanga alla stessa quota e che la ruota si trovi punto per punto tangente al profilo. Comunque sia, però, la realizzazione tecnica di una bicicletta siffatta comporta vari problemi meccanici la cui descrizione esula dallo scopo di questa nota.

Possiamo, inoltre, affrontare una specie di problema inverso a quello della ruota poligonale, pensando di fissare il profilo del suolo e di cercare la forma della ruota adatta a muoversi su di esso nelle condizioni sin qui considerate. Ad esempio, se il profilo del terreno fosse costituito da lati di quadrati, fosse cioè a zig-zag, determinato da mezzi quadrati, una ruota ad esso adatta avrebbe quattro petali, ciascuno formato da due metà di catenarie invertite discusse nei paragrafi precedenti (Figura 16).

Ripetiamo questa costruzione anche nel caso di terreni il cui profilo sia costituito da porzioni di poligoni regolari. La Figura 17 mostra una ruota costruita con petali fatti da semicatenarie invertite, ricavate dal rotolamento di un esagono regolare.

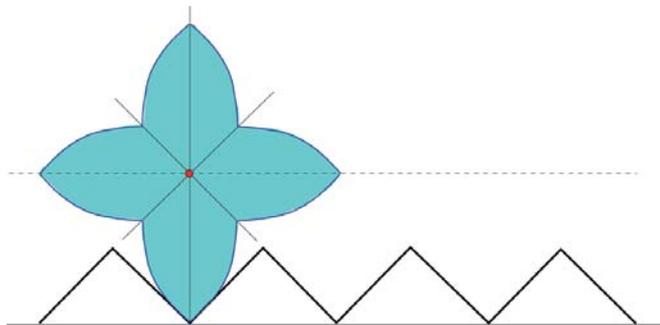


FIGURA 16 – Terreno a zig-zag

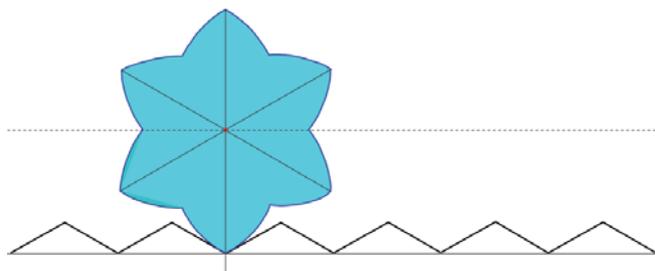


FIGURA 17

6. – Note ulteriori

E così parrebbe d'essere giunti alla fine, lasciando l'analisi di altri casi particolari al lettore volenteroso e curioso, armato di strumenti elementari del calcolo, quelli che fin qui abbiamo usato, e corroborato da fantasia costruttiva. Non è altro che una parvenza, però, perché tutto quanto noi abbiamo mostrato nelle pagine precedenti è solo l'inizio.

Le ruote sono due, si sa, così com'è noto che su quell'unica che abbiamo considerato c'è un telaio che la lega all'altra, e per quanto questo possa considerarsi rigido con buona approssimazione, giusto con la possibilità di far ruotare il manubrio, di sicuro non è rigido il ciclista, il cui movimento assicura stabilità del moto con riassetamenti del corpo, e determina la forza motrice attraverso la spinta delle gambe. Di forze, sin qui, non abbiamo discusso ma la loro presenza è inevitabile quando si voglia descrivere la dinamica della bicicletta in maniera che si possa ritenere accettabile per la nostra percezione fisica.

Le questioni geometriche connesse a quel moto sono molteplici. Non ultime sono la relazione avanzamento-retroavanzamento-ruote e la rappresentazione della deformazione di ciclista e ruote. Tutta questa geometria diventa meccanica non appena consideriamo le interazioni tra tutti questi elementi e aggiungiamo le informazioni che specificano i materiali coinvolti e il tipo di contatto ruota-terreno. Quest'ultimo non è puntiforme, come abbiamo schematizzato finora, anche se poi si sviluppa su un'area molto piccola, ma comunque di dimensione finita, un aspetto che influenza il moto e, soprattutto, la stabilità del moto stesso.

Se lanciamo su un piano una bicicletta a ruote circolari, lasciandola a se stessa fino a quando non cada, adagiandosi al suolo, e osserviamo il sistema dinamico transitorio, emerge complessità anche solo in termini di scelta di uno schema tipo d'Alembert-Lagrange che possa descrivere quel moto quando si voglia considerare l'attrito ruota-terreno e la sensibilità alle fluttuazioni del sistema avantreno-retroreno, correlata al manubrio. D'altra parte, la stessa ipotesi di contatto privo di scivolamento è semplificativa in alcune circostanze, come quelle che coinvolgono un fondo bagnato.

Ancora più complessa è la descrizione della bicicletta con ciclista, un corpo deformabile in grado di esercitare controllo sulla bicicletta con azioni interne al sistema stesso – il che vuol dire evitando di posare uno o entrambi i piedi per terra, o una mano su un muro o altro – oppure, al contrario, dovute proprio all'interazione con l'ambiente.

Occuparsi di questi aspetti di controllo espone all'incontro con problemi analitici e geometrici perfino avvincenti, di certo non affrontabili con gli strumenti elementari che hanno sostenuto le considerazioni raccolte nelle pagine che precedono quest'ultimo paragrafo. La teoria dei sistemi dinamici, la geometria delle strutture di contatto e la teoria delle equazioni alle derivate parziali sono settori della matematica coinvolti nell'analisi della meccanica della bicicletta, molto più ricca di quello che appare un modestissimo estro meccanico a una prima occhiata, perfino affettuosa, come fu quella di Gianni Brera.

D'altra parte, tutta l'evidenza fenomenologica che ci circonda racchiude potenzialmente non banale ricchezza matematica. Essa stessa, la matematica, emerge dalla nostra istintiva tendenza alla catalogazione interpretativa degli eventi del mondo. E possiamo ritenere che sia proprio quest'aspetto a determinare l'efficacia della matematica nella descrizione dei fenomeni naturali. D'altra parte, ciò che rappresentiamo in termini matematici non è proprio la natura in sé ma, essenzialmente, ciò che di essa osserviamo e immaginiamo. L'analisi di questi aspetti, però, ha bisogno di uno spazio e di una profondità che sfuggono allo sforzo fatto per raccogliere queste poche note; per cui, non senza serenità, scegliamo di fermarci qui.

Ringraziamenti

Gli autori sono grati al Dott. Ing. Francesco Ricci per discussioni sull'argomento. Questo lavoro è stato svolto con gli auspici del GNFM-INDAM.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] ALI S. (2017), *A unified dynamic algorithm for wheeled multibody systems with passive joints and nonholonomic constraints*, Multibody Syst. Dyn., **41**, 317-346.
- [2] BOYER F., POREZ M., MAUNY J. (2018), *Reduced dynamics of the non-holonomic Whipple bicycle*, J. Nonlinear Sci., **28**, 483-493.
- [3] CHEN C.-K., CHU T.-D., ZHANG, X.-D. (2019), *Modeling and control of an active stabilizing assistant system for a bicycle*, Sensors, **19**, art. n. 248.
- [4] ESCALONA J. L., RECUERO A. M. (2012), *A bicycle model for education in multibody dynamics and real-time interactive simulation*, Multibody Syst. Dyn., **27**, 383-402.
- [5] GETZ N. H., MARSDEN J. E. (1995), *Control for an autonomous bicycle*, Proc. 1995 IEEE Int. Conf. Robotics Autom., **2**, 1397-1402.
- [6] GÓRECKI H. (2018), *Mathematical model of a bicycle and its stability analysis*, Studies in Systems, Decision and Control, **107**, 641-663.
- [7] HALL L., WAGON S. (1992), *Roads and wheels*, Math. Mag., **65**, 283-301.
- [8] HERLIHY D. V. (2004) *Bicycle: The history*. New Haven and London: Yale University Press.
- [9] KOON W. S., MARSDEN J. E. (1997), *The Hamiltonian and Lagrangian approaches to the dynamics of nonholonomic systems*, Rep. Math. Phys., **40**, 21-62.
- [10] JEONG H. B., AHN C. K., YOU S. H., SOHN, K. M. (2019), *Finite-memory estimation for vehicle roll and road bank angles*, IEEE Trans. Ind. Elect., **66**, 5423-5432.
- [11] LEVI M. (2017), *Schrödinger's equation and "bike tracks"*, J. Geom. Phys., **115**, 124-130.
- [12] LIMBEER D. J. N., SHARMA A. (2010), *Burst oscillations in the accelerating bicycle*, J. Appl. Mech. Trans. ASME, **77**, art. n. 061012.
- [13] MACDERMID P. W., FINK P. W., MILLER M. C., STANNARD S. (2017), *The impact of uphill cycling and bicycle suspension on downhill performance during cross-country mountain biking*, J. Sports Sci., **35**, 1355-1363.
- [14] MERTEN E. A. (2014), *Application of evolutionary structural optimisation; reinventing the (bicycle) wheel*, Appl. Mech. Mat., **553**, 830-835.
- [15] MELJAARD J. P., PAPADOPOULOS JIM M., RUINA A., SCHWAB A. L. (2011), *History of thoughts about bicycle self-stability*. <http://arxiv.org>, 2011. eCommons@Cornell.
- [16] MoMath National Museum of Mathematics, <http://momath.org/>
- [17] ROBISON I. G. B. (1960), *Rockers and rollers*, Math. Mag., **33**, 139-144.

- [18] ROZENBLAT G. M. (2016), *The controlled motion of a bicycle*, J. Appl. Math. Mech., **80**, 133-140.
- [19] SCHWAB A. L., DE LANGE P. D. L., HAPPEE R., MOORE J. K. (2013), *Rider control identification in bicycling using lateral force perturbation tests*, Proc. Inst. Mech. Eng.s, Part K: J. Multi-body Dyn., **227**, 390-406.
- [20] SPICER J. B. (2013), *Effects of the nonlinear elastic behavior of bicycle chain on transmission efficiency*, J. Appl. Mech. Trans. ASME, **80**, art. n. 021005.
- [21] TABACHNIKOV S. (2017), *On the bicycle transformation and the filament equation results and conjectures*, J. Geom. Phys., **115**, 116-123.
- [22] WILSON D. G. (2004). *Bicycling Science*. The MIT Press, 3rd edition.
- [23] WU Y.-C., CHEN L.-A. (2016), *A gear-shifting mechanism with a rotary configuration for applications in a 16-speed bicycle transmission hub*, Trans. Canadian Soc. Mech. Eng., **40**, 597-606.
- [24] ZAGORSKI S. B. (2019), *Derivation of a multi-body model of an articulated vehicle*, Int. J. Vehicle Perf., **5**, 129-164.



Giovanni Frosali

Giovanni Frosali è stato ordinario di Meccanica Razionale nell'Università di Firenze dal 1997 al 2018 e direttore dal 1989 al 1994 del Dipartimento di Matematica "V. Volterra" nell'Università di Ancona, attualmente Università Politecnica delle Marche, dove era stato chiamato da ordinario nel 1987. Ha prevalentemente indirizzato la sua attività di ricerca scientifica su problemi fisico-matematici che emergono nella teoria del trasporto, in particolare nei semiconduttori, e più in generale nella teoria cinetica; più di recente il suo interesse si è spostato sulla meccanica anolonomica. Nell'Università di Firenze, Giovanni Frosali è stato promotore e curatore del Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Matematica, attiva dal 2004 al 2009.



Paolo Maria Mariano

Paolo Maria Mariano insegna meccanica dei solidi e meccanica teorica nell'Università di Firenze dal 2005; coordina il gruppo di meccanica teorica del Centro di Ricerca Matematica "E. De Giorgi"; dirige (con C. Dafermos e R. D. James) la serie di volumi "Trends in Continuum Mechanics" (Springer, Heidelberg); è "advisory editor" della rivista "Math. Methods in the Appl. Sciences", "associate editor" del "J. Opt. Theory Applications" e, per il settore della matematica, delle "Phil. Trans. Royal Society". Si occupa principalmente di meccanica dei corpi complessi, cioè dotati di microstruttura attiva. In merito, i suoi interessi di ricerca riguardano la costruzione della struttura generale della meccanica dei corpi complessi, la derivazione di modelli per classi specifiche di materiali e lo studio delle loro proprietà analitiche e geometriche. Si occupa anche di questioni epistemologiche relative alla modellistica matematica