Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMBERTO BOTTAZZINI

All'origine della teoria degli insiemi di Cantor

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2018), n.3, p. 179–191.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2018_1_3_3_179_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2018.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 3, N. 3, Dicembre 2018, 179-191

All'origine della teoria degli insiemi di Cantor

Umberto Bottazzini
E-mail: umberto.bottazzini@unimi.it

Sommario: *Dopo l'abilitazione a* Privatdozent *a Halle nel 1869 con una tesi di teoria dei numeri, le ricerche di Cantor prendono una nuova direzione. Sotto l'influenza di Heine, in un gruppo di articoli apparsi in rapida successione Cantor affronta il problema dell'unicità della rappresentazione di una funzione in serie trigonometrica, una questione riportata d'attualità dalla pubblicazione (postuma, nel 1868) della tesi di abilitazione di Riemann (1854). In quei lavori si trova il germe della teoria degli insiemi elaborata da Cantor nel successivo decennio.*

Abstract: *After becoming* Privatdozent *at Halle, where he habilitated in 1869 with a thesis on number theory, Cantor gave his research a new direction. Under Heine's influence, in a bunch of papers following each other in quick succession he tackled the problem of uniqueness of the representation of a function in trigonometric series, a matter of renewed interest due to the (posthumous, in 1868) publication of Riemann's* Habilitationsschrift *(1854). In those papers one can find the germ of the theory of sets that Cantor worked out in the following decade.*

1. – Dall'*Habilitationsschrift* di Riemann

Nella primavera del 1868 appare a stampa nelle "Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen" il testo della *Habilitationsschrift* (1854) di Bernhard Riemann che Richard Dedekind, l'amico di una vita, ha ritrovato manoscritto tra le carte del *Nachlass* del grande matematico morto in Italia due anni prima.

La redazione lasciata da Riemann non è ultimata e il testo non è pronto per la stampa. "A quanto sembra, l'autore non ne aveva previsto la pubblicazione", sostiene Dedekind nella presentazione, giustificando la decisione di pubblicare comunque quella memoria "sia per il grande interesse dell'argomento in sé sia per la maniera in cui sono trattati i più importanti principi dell'analisi infinitesimale". Si tratta di "un capolavoro", Darboux non esita a dichiarare in una lettera a Houël del marzo 1873, e la definizione di integrale definito una delle "perle" che vi sono contenute. "È da essa che ho tratto una quantità di funzioni che non hanno derivata" (in [Dugac 1976, 27]).

Nei primi paragrafi del suo scritto di abilitazione *Sulla rappresentabilità di una funzione mediante una serie trigonometrica* Riemann ricostruisce a grandi linee la storia della questione grazie ad "alcuni suggerimenti del celebre matematico, al quale si deve il primo fondamentale lavoro sull'argomento" [Riemann 1854, 227]. In questo modo egli riconosce il suo debito verso Lejeune Dirichlet, l'autore della memoria [Dirichlet 1829] che ha segnato una svolta nella teoria delle serie di Fourier. Con Dirichlet, in visita a Göttingen nelle vacanze autunnali del 1852, Riemann ebbe allora diversi incontri. Ad esempio, raccontava in una lettera al padre che "l'altra mattina Dirichlet è stato da me per quasi due ore. Mi ha dato le informazioni di cui avevo bisogno per la mia tesi di abilitazione in maniera così esauriente che il mio lavoro ne è risultato essenzialmente facilitato; altrimenti avrei dovuto cercare a

Accettato: il 5 novembre 2018.

lungo in biblioteca su diverse cose" (in [Riemann 1990, 546]).

Le condizioni di Dirichlet per la rappresentabilità in serie trigonometrica di una funzione $f(x)$ periodica di 2π sono così riassunte da Riemann:

1. $f(x)$ dev'essere integrabile,
2. $f(x)$ non possiede infiniti massimi e minimi,
3. dove il suo valore varia con salto la $f(x)$ assume il valor medio tra i valori dei limiti sinistro e destro.

La condizione 1. implica che la funzione presenti al più un numero finito di discontinuità (altrimenti non sarebbe Cauchy-integrabile), mentre la condizione 3. dice implicitamente che le discontinuità della $f(x)$ sono solo di prima specie.

Per studiare la rappresentabilità di una funzione in serie trigonometrica, senza assoggettarla a queste condizioni, "una via diretta, come quella seguita da Dirichlet, per la natura della questione non è percorribile", afferma Riemann [1854, 239]. Quindi, "si rende necessaria" anzitutto un'estensione del concetto di integrale a funzioni (limitate) che presentino (al più) un'infinità numerabile di punti di discontinuità. Da qui una nuova definizione di integrale data da Riemann, corredata dalla condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia Riemann-integrabile.

Dal momento che "una via diretta" non è percorribile, la strategia di Riemann rovescia il procedimento fino ad allora adottato nei lavori dedicati all'argomento. Invece di mostrare che se una funzione gode della tale e tal'altra proprietà allora è rappresentabile in serie di Fourier, Riemann si chiede: se una funzione è rappresentabile in serie trigonometrica, cosa ne consegue per il suo andamento, e come varia il suo valore per variazioni continue dell'argomento?

Per rispondere egli considera dunque la serie trigonometrica

(1) $$\Omega = A_0 + A_1 + A_2 + \dots$$

dove

$$A_0 = \frac{1}{2} b_0,$$

$$A_1 = a_1 \sin x + b_1 \cos x,$$

$$A_2 = a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x, \quad \dots$$

e chiama $f(x)$ il suo valore, di modo che – Riemann afferma – questa funzione è determinata solo per quei valori di x per cui la serie Ω converge (e dunque i suoi termini necessariamente tendono a zero).

Si danno due casi:

a) al crescere di n i coefficienti a_n, b_n (e di conseguenza i termini della serie Ω) tendono a 0 *per ogni valore* di x. (In altre parole, $A_n \to 0$ uniformemente al crescere di n.)

b) i coefficienti possono tendere a zero solo *per particolari valori* di x.

Cominciando col primo caso, Riemann considera la serie ottenuta da Ω integrando due volte termine a termine:

$$C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \dots - \frac{A_n}{n^2} - \dots = F(x)$$

e dimostra che la serie così ottenuta è convergente. Infatti, se si indica con R il resto dopo i primi n termini e $\varepsilon = max|A_m|$ per $m > n$ e ogni x, si ha

$$|R| < \varepsilon \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \right) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

La funzione $F(x)$ è dunque continua e gode, in particolare, delle proprietà stabilite dai seguenti teoremi:

Teorema I. – *Se la serie Ω converge a $f(x)$, anche l'espressione* (2)

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

dove α e β tendono a zero ma il loro rapporto $\frac{\alpha}{\beta}$ rimane finito, converge a $f(x)$.

(Dapprima Riemann suppone che $\alpha = \beta$, per cui la (2) si può scrivere come $A_0 + \sum_{n=1} A_n \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \right)^2$ che egli dimostra convergere a $f(x)$, e poi riconduce a questo il caso generale quando $\alpha \neq \beta$.)

In maniera analoga egli mostra che

Teorema II. – *Per ogni x,*

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{2\alpha}$$

è infinitesimo insieme ad α.

A questo punto Riemann enuncia e prova una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza, per una data $f(x)$, di una serie trigonometrica che ha $f(x)$ come somma di Riemann generalizzata. (Infatti, è la derivata seconda generalizzata di $F(x)$ data da (2).)

In maniera analoga Riemann tratta il caso b), in cui la serie (1) ha termini che convergono a 0 come $1/n$ per un valore di x ma non *per ogni valore* di x. (Allo scopo Riemann considera le serie ottenute sostituendo $x+t$ e $x-t$ in (1). Sommando poi termine a termine egli ottiene la serie

$$2A_0 + 2A_1 \cos t + 2A_2 \cos 2t + \ldots + 2A_n \cos nt + \ldots$$

i cui termini al crescere di n tendono a 0 per ogni t, e si riconduce così al caso a).

Da questi risultati prenderà le mosse Cantor nei suoi primi lavori dedicati alle serie trigonometriche.

2. – Serie trigonometriche e convergenza uniforme

All'oscuro dell'*Habilitationsschrift* di Riemann, in quegli anni anche Weierstrass affronta il problema della rappresentazione di una funzione arbitraria in serie (e integrali) di Fourier in uno dei suoi primi corsi all'Università di Berlino. Di quel corso sulla teoria e applicazioni delle serie trigonometriche e degli integrali definiti, tenuto nel semestre invernale (*WS*) 1857/58, ci è pervenuto solo il titolo. Molti anni dopo, in una lettera a Hermann Amandus Schwarz del 14 marzo 1885, in cui annunciava il suo teorema sull'approssimazione di una funzione $f(x)$ continua su un intervallo (a, a') mediante una serie assolutamente e uniformemente convergente di polinomi trigonometrici, lo stesso Weierstrass ricordava che "la mancanza di rigore" riscontrata in tutte le opere che aveva allora sottomano, e "i vani sforzi da lui fatti all'epoca per sopperire a tale mancanza" lo convinsero ad evitare di tenere ancora un corso di lezioni su quell'argomento (in [Bottazzini and Gray 2013, 373]). (Nell'ultimo suo corso di lezioni, tenuto nel semestre estivo (*SS*) 1886 e dedicato a capitoli scelti della teoria delle funzioni, per la prima volta in 30 anni Weierstrass ritornò sul problema della rappresentazione di funzioni arbitrarie (reali) in serie solo per enunciare e dimostrare il teorema di approssimazione che porta il suo nome.)

Nel *WS* 1859/60 Weierstrass tenne per la prima volta un corso di "Introduzione all'analisi", continuato nel successivo *SS* 1860. Anche di questo corso non ci è pervenuto alcun manoscritto. Tuttavia, per farsi un'idea del contenuto si può forse guardare agli appunti (inediti) delle lezioni presi da Schwarz, che seguì un corso analogo tenuto da Weierstrass all'Istituto commerciale (*Gewerbeinstitut*) di Berlino nell'estate 1861.

Nelle sue lezioni Weierstrass presentò risultati fondamentali sulle serie infinite, come il teorema che una serie convergente $\sum \varphi_n(x)$ di funzioni continue su un intervallo $[a, b]$ rappresenta una funzione continua se per m crescente e r intero positivo arbitrario "la somma $\varphi_m(x) + \varphi_{m+1}(x) + \ldots + \varphi_{m+r}(x)$ [in valore assoluto] può essere resa più piccola di ogni data grandezza [positiva] arbitraria [ε]". Seguendo Gudermann, Weierstrass chiamò questo modo di convergenza "convergenza in ugual grado" (o uniforme convergenza, come si dice oggi). Così come il teorema secondo cui, date due serie di funzioni $\sum \varphi_n(x)$ e $\sum \varphi'_n(x)$, continue su un dato intervallo e tali che $\varphi'_n(x)$ è la derivata del termine corrispondente $\varphi_n(x)$ per ogni n, nell'ipotesi della uniforme convergenza delle serie la funzione $\varphi'(x) = \sum \varphi'_n(x)$ è la derivata della funzione $\varphi(x) = \sum \varphi_n(x)$. (Molti anni dopo, il 6 marzo 1881, riferendosi alla traduzione in francese dell'articolo [Weierstrass 1880], dove ripeteva la sua definizione di convergenza uniforme delle serie e enunciava alcuni teoremi su quelle serie, Weierstrass osservava a Schwarz: "Il mio ultimo articolo ha creato tra i francesi più sensazione di quanto in realtà meriti; le persone sembrano finalmente realizzare il significato del concetto di convergenza uniforme" (in [Bottazzini and Gray 2013, 464-465])).

Gli appunti di Schwarz provano che, nonostante le affermazioni da lui fatte in seguito e ripetute da Mittag-Leffler, a quell'epoca Weierstrass non possedeva ancora una soddisfacente teoria dei numeri reali. Secondo [Dugac 1973, 56], nel 1863 Weierstrass cominciò a elaborare la propria teoria dei numeri reali e la presentò nelle sue lezioni su "Teoria generale delle funzioni analitiche" del *WS* 1863/64. Ne ebbero certo notizia sia Schwarz che Cantor, allora entrambi studenti a Berlino, come conferma Eduard Heine che, nel suo articolo [Heine 1872] sugli elementi di teoria delle funzioni, compresa la teoria dei numeri reali, riconosceva apertamente di aver tratto ispirazione dagli appunti delle lezioni di Weierstrass presi dai suoi studenti e da "comunicazioni orali dello stesso Weierstrass, e dei sig. Schwarz and Cantor" [Heine 1872, 182].

3. – Teoremi di Heine

Con l'eccezione di un iniziale semestre trascorso a Zurigo, e un secondo a Göttingen nell'estate del 1866, Georg Cantor studia a Berlino dove segue le lezioni di Kummer, Kronecker e Weierstrass e conclude gli studi nel dicembre 1867 con una dissertazione di teoria dei numeri approvata *magna cum laude*. Nel periodo berlinese Cantor stringe amicizia con Schwarz (più anziano di due anni), che nel 1867 ottiene un posto da straordinario (*Extraordinarius*) a Halle. In vista di una sua chiamata come ordinario al Politecnico di Zurigo, l'odierno ETH (*Eidgenössische Technische Hochschule*), Schwarz suggerisce per tempo all'amico di prendere l'abilitazione a *Privatdozent* a Halle, per poter poi succedergli dopo il suo trasferimento a Zurigo.

Così, seguendo il consiglio di Schwarz, nella primavera 1869 Cantor si stabilisce ad Halle dove, nello stesso anno, ottiene l'abilitazione con una tesi sulle trasformazioni delle forme quadratiche ternarie sotto la direzione di Heine e un posto da *Privatdozent*. Ad Halle, sotto l'influenza di Heine, professore ordinario e collega anziano, le ricerche del giovane Cantor prendono una direzione completamente nuova.

All'epoca Heine sta lavorando alla stesura dell'articolo *Sulle serie trigonometriche* [Heine 1870]. Che cosa vi afferma Heine? La dimostrazione di Weierstrass della necessità dell'uniforme convergenza per l'integrazione termine a termine di una serie di funzioni ha reso inattendibile la dimostrazione che una funzione $f(x)$ limitata su $[-\pi, \pi]$ può essere rappresentata *al più in un modo* in una serie della forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{3}$$

Dopo i lavori di Dirichlet e Riemann (e Lipschitz) le cose stavano in questi termini: era stato dimostrato che, sotto ipotesi di natura abbastanza generale, una funzione può essere rappresentata in serie trigonometrica della forma (3), ma non in *quanti modi* ciò possa accadere. Tuttavia, continua Heine, il significato attribuito alla rappresentazione di una funzione in serie trigonometrica è in larga misura affidato all'unicità della rappresentazione, ossia alla certezza che – qualunque sia il metodo adottato– si arriva sempre alla stessa serie. È questo il problema sul quale Heine attira l'attenzione del suo giovane collega, convinto com'è che "Cantor farà prima o poi qualcosa di significativo, poiché ad un insolito acume unisce una fantasia assolutamente straordinaria".

Una serie che converge ("è uguale", dice Heine) a una funzione *discontinua* anche se limitata, non può essere uniformemente convergente; invece non si sa ancora se una serie che rappresenta un funzione *continua* debba essere uniformemente convergente (cosa che si è sempre tacitamente assunta). Tutto ciò non viene chiarito neppure nel seguito di questo lavoro, ammette Heine che sottolinea: *"a tutt'oggi non si sa neppure con certezza se sia possibile rappresentare una funzione continua data con una serie trigonometrica uniformemente convergente"*.

Nel 1876 Paul du Bois Reymond darà una risposta negativa alla questione sollevata da Heine costruendo con il suo *Infinitärkalkül* il controesempio di una funzione $f(x)$ continua, il cui sviluppo in serie di Fourier non converge in punti isolati. La $f(x)$ è definita in questo modo:

- $f(0) = 0$
- per $x \neq 0, f(x) = \rho(x) \sin \psi(\chi)$ dove per $x \to 0$, $\psi(x) \to \infty$ con infiniti massimi e minimi e $\rho(x) \to 0$. "Questa funzione – afferma du Bois Reymond – è continua in un intervallo contenente il punto $x = 0$, e per un intervallo che esclude l'origine, è continua insieme a tutte le sue derivate, eppure non è rappresentabile per $x = 0$".

A partire dalla stessa funzione, con la stessa tecnica 'infinitaria', du Bois Reymond costruisce altri esempi di funzioni il cui sviluppo in serie di Fourier diverge in ogni intervallo infinitesimo.

I controesempi di du Bois Reymond non soddisfano alle condizioni di Dirichlet, dalle quali discende il teorema che Heine formula nella maniera seguente:

TEOREMA I. – *La serie di Fourier di una funzione* $f(x)$ *che ha un numero finito di massimi e minimi converge uniformemente se* $f(x)$ *è continua su* $[-\pi,\pi]$ *e* $f(\pi)=f(-\pi)$. *In tutti gli altri casi è solo in generale uniformemente convergente*

dove, spiega Heine, "in generale" significa "tranne in un numero finito di punti".

Egli enuncia poi i due seguenti teoremi:

TEOREMA II. – *Una funzione* $f(x)$ *in generale continua, non necessariamente limitata, si lascia sviluppare al più in un modo in una serie della forma (3) se la serie è in generale uniformemente convergente. La serie rappresenta in generale la funzione da* $-\pi$ *a* π.

Se si sviluppa la funzione in serie di Fourier – commenta Heine – si deve rinunciare al fatto che la serie rappresenti esattamente la funzione (come ha mostrato Dirichlet, infatti, nei punti di discontinuità la serie fornisce il valor medio tra il limite sinistro e destro della funzione nel punto.) Ci si può poi chiedere, continua Heine, se per una funzione, che è *esattamente* rappresentata in serie di Fourier, la rappresentazione è unica, o invece può essere rappresentata da un'altra serie della forma (3). "Dal sig. Cantor – al quale ho comunicato queste mie ricerche – sono stato indotto a estendere la questione anche al caso in cui non è più richiesta la coincidenza [tra il valore della funzione e quello dato dalla serie] nei punti di discontinuità".

Se si rinuncia alla coincidenza nei punti di discontinuità, e in altri punti in numero finito, il Teorema II fornisce il risultato poiché afferma non solo che la serie è determinata, ma anche che coincide con lo sviluppo della funzione in serie di Fourier (se esiste).

Il Teorema II si può porre nella seguente forma:

TEOREMA III. – *Se una serie della forma (3) è in generale uniformemente convergente, e rappresenta in generale lo zero, allora tutti i coefficienti* a_n, b_n *della serie si devono annullare, e la serie rappresenta dappertutto lo zero.*

Teorema che Heine dimostra considerando separatamente il caso di serie di seni e serie di coseni.

Sarà proprio riformulando opportunamente questo teorema, senza l'ipotesi della convergenza uniforme, che Cantor riuscirà a dimostrare l'unicità della rappresentazione di una funzione in serie trigonometrica.

4. – Primi lavori di Cantor

"Mi fa piacere che i teoremi, di cui ti ho mandato la dimostrazione, abbiano trovato la tua approvazione. Il tuo desiderio di vederli presto pubblicati nel Journal di Borchardt [ossia nel *Journal für die reine und angewandte Mathematik*] sarà soddisfatto, dal momento che si trova già presso Borchardt un lavoro, in cui questo argomento è trattato con una certa maggior generalità" (in [Meschkowski and Nilson 1991, 24]). Così il 30 marzo 1870 Cantor comunica a Schwarz di aver inviato a Borchardt, segretario di redazione del *Journal* edito da Kronecker e Weierstrass, l'articolo *Su un teorema riguardante le serie trigonometriche* [Cantor 1870a] (datato 20 marzo 1870) che inaugura i suoi lavori sulle serie trigonometriche.

Il punto di partenza di Cantor è lo scritto di abilitazione di Riemann, e l'obiettivo esplicitamente dichiarato è il seguente:

TEOREMA – *Se due successioni infinite di grandezze* a_n, b_n *sono tali che, per ogni valore di* x *in un intervallo* $(a<x<b)$ *dato,*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0$$

allora al crescere di n, $a_n \to 0$ *e* $b_n \to 0$ ([Cantor 1870a, 71]).

Se si applica questo risultato alle serie trigonometriche, aggiunge Cantor, allora ne consegue che una tale serie (3) può convergere per tutti i valori x di un intervallo dato solo se i coefficienti a_n e b_n tendono a zero al crescere di n. Cosa apparentemente nota a Riemann, osserva ancora Cantor, che si è tuttavia limitato al caso in cui i coefficienti della serie fossero i coefficienti di Fourier. (Il teorema enunciato da Cantor è anche noto come teorema di Cantor-Lebesgue, giacché questi nelle sue *Leçons sur les séries trigonométriques* [Lebesgue 1906, 110-111] così lo ha riformulato:

TEOREMA DI CANTOR – *Se una serie trigonometrica è convergente per tutti i punti di un intervallo, i suoi coefficienti tendono a zero.*

Per dimostrarlo Lebesgue mostra che la serie $\sum \rho_n \cos n(x-\alpha_n)$ non può convergere che per un insieme di valori di x di misura nulla quando ρ_n non tende a zero al crescere di n. "Questo teorema, che Riemann sembra aver considerato come evidente, è stato dimostrato per la prima volta da Cantor", riconosce Lebesgue.)

La dimostrazione di Cantor si basa su un lemma relativo alle successioni numeriche che gli consente di stabilire che, data una successione

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n, \ldots \qquad (G)$$

tale che in ogni sotto-successione infinita (G') estratta da (G) si possano trovare termini che sono minori di una grandezza δ arbitrariamente data, allora $\lim \rho_n = 0$.

Ne segue come corollario che [Cantor 1870a, 76]:

Data una successione infinita (G) di grandezze, se da ogni successione (G') estratta da (G) si può estrarre una nuova successione

$$\rho_u, \rho_v, \rho_w, \ldots \qquad (G'')$$

i cui termini diventano infinitesimi al crescere dell'indice, allora

$$\lim \rho_n = 0.$$

Come osserva Zermelo in nota [Cantor 1932, 79], si tratta essenzialmente del teorema: una successione numerica infinita e limitata, che ha lo zero come solo punto di accumulazione, converge a zero.

Per dimostrare il teorema enunciato all'inizio Cantor riscrive $a_n \sin nx + b_n \cos nx$ nella forma $\rho_n \cos(\varphi_n - nx)$ dove $\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e $0 < \varphi_n < 2\pi$, con $\sin \varphi_n = \dfrac{a_n}{\rho_n}$, $\cos \varphi_n = \dfrac{b_n}{\rho_n}$. È sufficiente mostrare che $\lim \rho_n = 0$ per concludere immediatamente che

$$\lim a_n = 0 \qquad \lim b_n = 0$$

cosa che Cantor fa applicando il lemma e il corollario sopra menzionati.

> "Questo lavoro – continua la lettera di Cantor a Schwarz del 30 marzo – potrebbe preannunciare la mia dimostrazione dell'unicità di una serie trigonometrica convergente per ogni valore di x. Questa dimostrazione è stata *riconosciuta come completamente rigorosa* dal sig. Weierstrass; in particolare egli ha controllato il contributo che gli hai fatto avere [v. oltre], e l'*ha giudicato corretto*. Fosse dipeso da lui, avrei già da tempo preparato questo articolo per la stampa. Ma a ciò si oppone il fatto che il sig. Heine gli ha inviato un articolo simile [Heine 1870]; il sig. Weierstrass ritiene che potrebbe ritirarlo, in particolare spera di convincerlo della correttezza della maniera di concludere sulla quale poggia la tua dimostrazione. A proposito, anche il sig. Kronecker si oppone al teorema di Bolzano-Weierstrass dell'estremo inferiore e superiore; ma questo non mi trattiene dal pubblicare la mia dimostrazione, poiché ritengo questo teorema non solo giusto ma anche il fondamento delle più importanti verità matematiche" (in [Meschkowski and Nilson 1991, 24]).

Per comprendere appieno il senso delle parole di Cantor occorre fare un passo indietro nel tempo. Infatti, questa lettera conclude una fitta corrispondenza intrecciata tra Halle, Berlino e Zurigo tra febbraio e marzo di quell'anno.

4.1 – *Un lemma di Schwarz*

Se una funzione $f(x)$ è rappresentabile in serie trigonometrica (3) convergente per ogni valore di x, scrive Cantor [Cantor 1870b, 80] nell'articolo che ha già inviato a Weierstrass, è "importante" sapere se la rappresentazione è unica. Tuttavia non si può decidere la questione dell'unicità dicendo che si moltiplica ogni termine della serie per $\cos n(x-t)dx$ per poi integrare termine a termine. Infatti questa procedura è lecita, e si può senz'altro (*ohne Bedenken*) adottare, solo se il resto R_n della serie (3) soddisfa la condizione che "per ogni ε si può determinare un intero m tale che per $n \geq m$, $|R_n| < \varepsilon$ per tutti i valori di x considerati" (ossia la serie è uniformemente convergente, il che non accade nei punti di discontinuità di $f(x)$, come ha già osservato Heine).

Seguendo quella via non si arriva dunque alla dimostrazione di unicità. Cantor allora riprende il punto di vista di Riemann e richiama il suo teorema [Cantor 1870a, 71] che se una serie trigonometrica come la (1) è convergente per tutti i punti di un intervallo, allora al crescere di n i suoi coefficienti diventano infinitesimi.

Egli suppone che ci siano *due* serie trigonometriche convergenti per ogni valore di x, e che assumono lo stesso valore e dunque rappresentano la stessa funzione $f(x)$. Sottraendo termine a termine si ha una rappresentazione convergente dello 0

$$0 = C_0 + C_1 + \ldots + C_n + \ldots \tag{4}$$

dove

$$C_0 = \frac{1}{2}d_0, \qquad C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$$

e i coefficienti c_n, d_n tendono a 0 al crescere di n. A questo punto costruisce la funzione di Riemann

$$F(x) = C_0\frac{x^2}{2} - C_1 - \ldots - \frac{C_n}{n^2} - \ldots$$

che ha la proprietà che discende dalla (2) per cui, per ogni valore di x, la derivata seconda

$$\frac{F(x+2\alpha) - 2F(x) + F(x-2\alpha)}{\alpha^2}$$

tende a 0 per α tendente a 0.

Si tratta di dimostrare che $F(x)$ è lineare, come aveva già provato Heine per le serie di seni e coseni in cui aveva scisso la dimostrazione del Teorema III nell'ipotesi della convergenza uniforme in generale della serie (3). Così, il 17 febbraio Cantor si rivolge a Schwarz chiedendogli se c'è modo di provare la linearità di $F(x)$. Nel giro di pochi giorni questi riesce a rispondere positivamente alla domanda dell'amico, stabilendo il seguente lemma [Schwarz 1890, vol. 2, 341-343] di importanza cruciale nella dimostrazione cantoriana.

Se, come insegna [Riemann 1854, §8], si considera una funzione $F(x)$ continua per ogni valore x dell'intervallo $a \leq x \leq b$ e tale che

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha^2} = 0 \qquad a < x < b$$

allora $F(x)$ è una funzione lineare di x.

Per provarlo Schwarz considera la funzione

$$\varphi(x) = \varepsilon\Big[F(x) - F(a) - \frac{x-a}{b-a}(F(b) - F(a))\Big] - \\ -\frac{1}{2}k(x-a)(b-x)$$

dove $\varepsilon = \pm 1$ e $k > 0$ arbitrario. La funzione $\varphi(x)$ è continua per ogni $x \in [a, b]$, è tale che

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\varphi(x+\alpha) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\alpha)}{\alpha^2} = k \quad a < x < b$$

e inoltre

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

A questo punto Schwarz dimostra (per assurdo) che per nessun valore $x \in (a, b)$ si ha $\varphi(x) > 0$. Supposto infatti che $\varphi(x) > 0$ per un qualche valore di $x \in (a, b)$, allora anche $g = \sup_{x\in(a,b)} \varphi(x) > 0$. "Applicando un argomento dimostrativo di cui il sig. Weierstrass ha fatto ripetutamente uso nelle sue lezioni", afferma Schwarz, si ottiene che per almeno un valore $x_0 \in (a, b)$ si ha $\varphi(x_0) = g$. Di conseguenza si avrebbe

$$\varphi(x_0+\alpha) - 2\varphi(x_0) + \varphi(x_0-\alpha) \leq 0$$

contro il fatto che per valori di α abbastanza piccoli il valore di

$$\frac{\varphi(x+\alpha) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\alpha)}{\alpha^2}$$

differisce da $k(> 0)$ di tanto poco quanto si vuole. Ne segue che

$$\left|F(x) - F(a) - \frac{x-a}{b-a}(F(b) - F(a))\right| < \frac{1}{2}k(x-a)(b-x)$$

ma essendo il primo termine indipendente da k arbitrario, dev'essere uguale a zero.

In definitiva,

$$F(x) = F(a) - \frac{x-a}{b-a}(F(b) - F(a))$$

ossia ogni funzione $F(x)$ che soddisfa le condizioni date è una funzione lineare.

Il 27 febbraio Schwarz comunica a Cantor la sua dimostrazione, aggiungendo di non poter esimersi dal manifestare la sua gioia "per i bei, e mi sembra maturi, frutti della nostra corrispondenza; ciascuno di noi sarebbe giunto difficilmente a dimostrare in maniera rigorosa che una funzione si può davvero sviluppare solo in un modo in serie trigonometrica" (in [Purkert und Ilgauds 1987, 35]).

Il giorno stesso Schwarz chiede a Heine un parere sulla dimostrazione del suo lemma che, come scriverà Cantor nell'articolo pubblicato [Cantor 1870b, 82], si basa essenzialmente sul teorema dell'estremo superiore, frequentemente citato e dimostrato da Weierstrass nelle sue lezioni: se g è l'estremo superiore di una funzione $f(x)$ continua su un intervallo chiuso $[a, b]$, allora esiste almeno un valore $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = g$.

Heine prende tempo, e solo dopo lunghe riflessioni nella sua risposta l'8 marzo riconosce che il lemma dimostrato da Schwarz, di cui il 28 febbraio ha avuto notizia anche da Cantor, contribuisce in maniera essenziale a generalizzare i risultati che egli stesso ha ottenuto e inviato a Borchardt [Heine 1870]. Ma nonostante queste continue ricerche, egli "non ha voluto tirare troppo per le lunghe" il proprio articolo, anzitutto perché Cantor non tocca la questione della convergenza uniforme in generale delle serie, e in secondo luogo perché egli considera il suo lavoro in sé concluso. "La significativa generalizzazione, cui aspira Cantor quando Le chiede una dimostrazione del lemma, consiste in ciò, che egli vuole dimostrare che per la $F(x)$ [è] ancora $= a + bx$ quando si richiede solo la convergenza invece della convergenza uniforme". Tuttavia, conclude Heine, "non nego che la Sua dimostrazione del lemma secondo il principio di Bolzano-Weierstrass, per quanto bella, *non* mi sembra completamente dimostrativa (*völlig beweisend*), e pertanto non posso ammettere che il teorema sia stabilito. Cantor mi dice di aver comunicato a Weierstrass le sue ricerche – credo anche una comunicazione della Sua dimostrazione del lemma" (in [Dauben 1979, 307-308]).

Heine non si sbaglia e difatti, come sappiamo dalla lettera di Cantor a Schwarz sopra citata, Weierstrass ha invece riconosciuto come *completamente rigorosa* e *corretta* sia la dimostrazione di Cantor sia quella di Schwarz. Tuttavia, nella primavera del 1870 l'ammissibilità dei metodi di Weierstrass per provare il lemma di Schwarz o teoremi analoghi sembra esser stata argomento di vivaci discussioni tra i matematici berlinesi.

4.2 – *Discussioni a Berlino*

Il 25 marzo Schwarz aveva scritto a Cantor: "devo farti una comunicazione che certo ti interesserà: da qualche ora sono in possesso di una dimostrazione che mi sembra rigorosa del teorema che, se per ogni singolo valore x dell'intervallo $a \leq x \leq b$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = 0$$

allora $F(x)$ è una costante" (in [Meschkowski 1961, 78-79]).

I lemmi per arrivare a dimostrarlo, affermava Schwarz, erano tratti proprio dalle lezioni di Weierstrass al *Gewerbeinstitut* di Berlino da lui seguite nel 1861. Anzitutto, (*Lemma* 1) data una $f(x)$ continua e derivabile con continuità su $[a, b]$, se per un determinato $x_0 \in (a, b)$ si ha $f'(x_0) \neq 0$, allora nell'intorno di x_0 esistono sempre valori di x tali che $f(x) > f(x_0)$ e valori di x tali che $f(x) < f(x_0)$. Inoltre (*Lemma* 2) se per x_1 e x_2 in (a, b) si ha $f(x_1) = f(x_2)$, allora esiste necessariamente almeno un valore x compreso tra x_1 e x_2 tale che $f'(x) = 0$. Infine (*Lemma* 3), se è sempre $f'(x) > 0$ per $x \in [a, b]$ allora $f(b) > f(a)$, e $f(b)$ è il massimo ($f(a)$ il minimo) di $f(x)$ sull'intervallo. Fin qui i *Lemmi* di Weierstrass.

Se $F(x)$ soddisfa le condizioni del teorema, continuava Schwarz, ne segue che è sempre $F'(x) = 0$. Egli poi considerava le funzioni

$$F(x) - F(a) - k(x - a)$$

e

$$F(x) - F(a) + k(x - a)$$

con

$$(k > 0)$$

le cui derivate sono $-k$ e k. Per $x = a$ le due funzioni sono entrambe nulle e, per il *Lemma* 3,

$$F(b) - F(a) - k(b - a) < 0,$$

$$F(b) - F(a) + k(b - a) > 0.$$

Ne segue che $F(b) - F(a) = 0$ poiché il suo valore è sempre compreso tra $k(b - a)$ e $-k(b - a)$ e k può esser preso arbitrariamente piccolo. Ora, concludeva Schwarz, al posto di b si può prendere qualunque valore x, con $a < x < b$, e dunque $F(x) = F(a)$.

Nella lettera del 30 marzo Cantor informava Schwarz che Wilhelm Thomé, "che ha profondamente meditato su queste questioni, è *completamente* d'accordo" con la dimostrazione cantoriana dell'unicità della rappresentazione. Anche Thomé faceva affidamento sul teorema di Bolzano, e nelle sue lezioni aveva dato la stessa dimostrazione (data da Schwarz) che "se $F'(x) = 0$ allora $F(x) = c$" (costante).

Prima di procedere alla stesura finale del suo lavoro Cantor chiedeva inoltre a Schwarz l'autorizzazione a inserire il suo lemma nel proprio articolo, e concludeva: "Hai ragione a dire che abbiamo la fortuna di poter chiamare Weierstrass nostro maestro; sono d'accordo di cuore". Nella risposta a Cantor a stretto giro di posta, il 1 aprile Schwarz dichiarava non solo di acconsentire, ma di provare un vero piacere che l'amico facesse "un così buon uso" del suo "piccolo contributo". Inoltre, confessava a Cantor che nelle sue lezioni Weierstrass aveva sostenuto l'opinione che senza il modo di trarre conclusioni, che era stato ulteriormente sviluppato dallo stesso Weierstrass sui principi di Bolzano, in molte ricerche non si sarebbe potuto ottenere il risultato cercato. Di obiezioni di Kronecker contro quel metodo, egli non sapeva nulla. Invece, continuava Schwarz, "non posso descriverti la gioia che Weierstrass abbia trovato le conclusioni *completamente corrette*. Il tuo teorema è un significativo progresso nella teoria delle serie trigonometriche, e per questo progresso mi rallegro ancor più che se l'avessi realizzato io stesso. Puoi credermi, sono fiero che la scuola matematica di Berlino, alla quale apparteniamo entrambi, possa festeggiare un trionfo, ancora un risultato tangibile col quale un'importante questione scientifica ha trovato una risposta *completa*" (in [Meschkowski 1967, 228-229]).

Anche se all'epoca Schwarz affermava di non saperne nulla, le discussioni a Berlino su questo tipo di argomenti dovettero andare avanti per parecchio tempo. Lo raccontava Heine allo stesso Schwarz il 26 maggio dopo una visita nella capitale prussiana. Annunciandogli che stava in quel momento correggendo le bozze del suo articolo [Heine 1870] che "sarebbe apparso nel corrente volume del *Journal* dopo le tante trattative con Kronecker che voleva indurlo a ritirarlo", Heine ripercorreva le vicende di quel suo lavoro: l'aveva mandato a Borchardt in febbraio, lì Kronecker l'aveva visto, se l'era fatto dare e l'aveva trattenuto presso di sé senza che Heine ne sapesse nulla fino alla sua visita a Berlino. Il suo articolo, lamentava Heine, sarebbe dunque apparso molto tempo dopo che i punti essenziali erano già stati resi noti, per esempio da Karl Thomae, anch'egli *Privatdozent* ad Halle come Cantor. Nel suo *Abriss* pubblicato ad Halle nel mese di aprile, infatti, Thomae afferma che "in un lavoro di prossima pubblicazione il sig. Heine risponderà alla questione dell'unicità della rappresentazione di una funzione in serie di Fourier" e poi riporta alla lettera, senza dimostrazione, il Teorema II stabilito da Heine [Thomae 1870, 52].

"Stavolta le cose erano andate in maniera assai strana a Berlino", continuava la lettera di Heine. "Kronecker e Weierstrass si erano trovati molto spesso a discutere delle dimostrazioni di Cantor e mie. Assai spesso Kronecker ci dice (a Cantor e me), ora ho concesso a Weierstrass questo e quel punto, mentre Weiertrass, pur richiesto, non voleva concedere niente". C'era una strana eccitazione, concludeva Heine, e alla fine "non si giunse ad un vero e proprio accordo". Della loro perdurante divergenza di opinioni dava conferma ancora il 6 giugno Schwarz scrivendo a Cantor: "il sig. prof. Kronecker dichiarava in una lettera che mi ha inviato (3.6.70) che le conclusioni di Bolzano sono apertamente fallaci e mi diceva che mio suocero [Kummer], Borchardt e Heine stanno dalla sua parte. Mi fa piacere che tu, Thomae, e io stiamo dalla parte di Weierstrass".

In seguito Schwarz ebbe a dire che Weierstrass conosceva il teorema di Bolzano fin dal 1870, o anche prima, e lo usava nelle sue ricerche. Scrivendo a Dini il 3 marzo 1871 sottolineava il ruolo essenziale di quel teorema nel metodo dimostrativo di Weierstrass, ma non mancava di menzionare che, contro di esso, Kronecker aveva sollevato obiezioni basate sul fatto che "non c'è alcun metodo per realizzare effettivamente, per esempio numericamente, i procedimenti richiesti dalla procedura dimostrativa in un caso dato"(in [Bottazzini 1994, 204]).

4.3 – *Dimostrazioni di Cantor dell'unicità*

Forte dell'autorità di Weierstrass, Cantor riporta nel suo lavoro (datato 6 aprile 1870) il lemma e la dimostrazione di Schwarz che, per ogni x, $F(x) = cx + c'$, da cui segue

$$C_0 \frac{x^2}{2} - cx - c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \ldots + \frac{C_n}{n^2} + \ldots$$

ma per la periodicità del II membro $C_0 = c = 0$.

Ne segue che la serie

$$-c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \ldots + \frac{C_n}{n^2} + \ldots$$

è tale che per ogni ε si può associare un intero m per cui per $n \geq m$ e ogni x si ha $|R_n| < \varepsilon$. La serie dunque converge uniformemente e si può moltiplicare per $\cos n(x-t)dx$ e integrare termine a termine. Ne risulta

$$c_n \sin nt + d_n \cos nt = 0$$

e quindi $c_n = d_n = 0$ per ogni n, ossia la rappresentazione dello 0 è unica. Da qui il teorema di unicità che Cantor formula nei seguenti termini:

> Se una funzione di una variabile reale $f(x)$ è data da una serie trigonometrica convergente per ogni valore di x allora non esiste nessuna altra serie della stessa forma che converge per ogni valore di x e rappresenta la funzione $f(x)$ [Cantor 1870b, 83].

Qualche mese più tardi Cantor ritorna sull'argomento con una breve *Notiz*, che appare a stampa nel gennaio 1871 [Cantor 1871a], in cui presenta un paio di osservazioni sul teorema di unicità appena dimostrato. La prima osservazione si basa su una comunicazione verbale di Kronecker, che in fondo ha origine nel modo in cui Riemann ha trattato il caso in cui la serie (1) ha termini che convergono a 0 per un valore di x ma non *per ogni valore* di x. Accogliendo il suggerimento di Kronecker, Cantor riesce a rendere la dimostrazione di unicità della rappresentazione indipendente dal suo teorema del marzo 1870. Data una quantità (arbitraria) u, egli sostituisce nella serie (4) al posto di x dapprima $u + x$, poi $u - x$ e poi somma le due serie ottenendo

$$(5) \quad 0 = e_0 + e_1 \cos x + e_2 \cos 2x + \ldots + e_n \cos nx + \ldots$$

dove $e_n = c_n \sin nu + d_n \cos nu$. Se si sostituisce x al posto di u, i coefficienti e_n coincidono con i termini C_n della serie (4), e dunque le conclusioni stabilite per quest'ultima serie in [Cantor 1870b] si applicano "senza alcuna variazione" (*ohne Änderung*) anche alla serie (5), per cui

$$e_n = c_n \sin nu + d_n \cos nu = 0$$

dal che si conclude, per l'arbitrarietà di u, che $c_n = d_n = 0$.

(Di lì a breve, con la stessa tecnica suggerita da Kronecker, Cantor riesce a dare della dimostrazione del suo teorema del marzo 1870 una formulazione che "forse non lascia nulla a desiderare per chiarezza e semplicità" [Cantor 1871b, 87]).

Ben più significativa, e foriera di fecondi sviluppi, è la seconda osservazione che riguarda "una certa estensione" del teorema di unicità, le cui ipotesi si lasciano modificare "nel senso che per certi valori di x viene meno o la rappresentazione dello 0 mediante la serie (4) o la convergenza della serie" [Cantor 1871a, 85]. Sia

$$\ldots < x_1 < x_0 < x_1 < \ldots$$

un'infinità di tali valori, soggetti alla condizione che in intervalli finiti gli x_n siano *solo in numero finito*. In ogni intervallo $(x_\nu, x_{\nu+1})$, osserva Cantor, la funzione $F(x)$ di Riemann è ancora una funzione lineare della forma $F(x) = k_\nu x + l_\nu$. Resta solo da provare l'identità di tutte queste funzioni. Allo scopo, Cantor considera una coppia di intervalli contigui (e dunque due funzioni contigue $k_\nu x + l_\nu$, e $k_{\nu+1} x + l_{\nu+1}$) e applica lo stesso procedimento che Heine ha adottato in [Heine 1870, 359], ispirato a [Riemann 1854, §8]: dalla continuità di $F(x)$ e dal Teorema II di Riemann (v. sopra) si ha

$$F(x_{\nu+1}) = k_\nu x_{\nu+1} + l_\nu$$

e

$$\lim \frac{x_{\nu+1}(k_{\nu+1} - k_\nu) + l_{\nu+1} - l_\nu + \alpha(k_{\nu+1} - k_\nu)}{\alpha} = 0$$

per

$$\lim \alpha = 0$$

il che è possibile solo se $k_\nu = k_{\nu+1}$ e $l_\nu = l_{\nu+1}$, afferma Cantor, stabilendo in questo modo l'identità della $F(x)$ per tutti gli intervalli $(x_\nu, x_{\nu+1})$ per ogni ν.

"Questa estensione del teorema non è affatto l'ultima", egli avverte [Cantor 1871a, 85], annunciando di essere in possesso di una ulteriore estensione del suo teorema "basata su un procedimento rigoroso", che avrebbe comunicato in una prossima occasione. Occasione che si sarebbe presentata ben presto.

5. – Ulteriore estensione del teorema di unicità

In una lettera del 26 marzo 1870 Schwarz aveva segnalato a Cantor uno scritto di Hermann Hankel, *Ricerche sulle funzioni discontinue e infinitamente spesso oscillanti*, ispirato alla tesi di abilitazione di Riemann e apparso a Tübingen una ventina di giorni prima, il 6 marzo, come *Universitätsprogramm*. Cantor l'aveva studiato a fondo, e nella recensione scritta per il *Literalisches Zentralblatt* (18 febbraio 1871) raccontava di essere stato particolarmente colpito dal 'principio di condensazione delle singolarità' introdotto da Hankel. Principio che, a partire da una funzione $\varphi(x)$ che presenta in un punto, per es. nell'origine $x = 0$, una singolarità (per es. una discontinuità) consente di generare una funzione $f(x)$ con singolarità in tutti i punti razionali come

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi(\nu\pi x)$$

dove c_ν sono opportuni fattori di convergenza.

Di fatto, l'idea di estendere il suo teorema di unicità a una infinità x_ν di punti 'eccezionali' poteva proprio essergli venuta dallo studio del *Programm* di Hankel. (Una diecina d'anni dopo Cantor ritornerà sulla questione per generalizzare il 'principio' di Hankel.)

Comunque sia, l'estensione del teorema, annunciata in [Cantor 1871a, 85], trova forma l'anno seguente in un articolo [Cantor 1872] che segna una svolta nelle sue ricerche. L'estensione che egli intende dimostrare consiste nel fatto che

> si può rinunciare alla convergenza o alla coincidenza della somma delle serie per un numero *infinito* di valori della x nell'intervallo $(0, 2\pi)$ senza che venga meno la validità del teorema. Allo scopo – continua Cantor – sono costretto a premettere, anche se per la maggior parte solo per cenni, alcune considerazioni utili a mettere in luce certi fatti che sempre si presentano non appena siano date delle grandezze numeriche in numero finito o infinito [Cantor 1872, 92].

Quelle "considerazioni" non sono altro che la teoria cantoriana dei numeri reali, di cui si limita a schizzare gli elementi essenziali. Com'è noto, i numeri reali sono definiti da Cantor mediante successioni 'fondamentali' (così le chiamerà in seguito) di numeri razionali $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ossia tali che per ogni $\varepsilon > 0$ razionale esiste un intero n_1 per cui $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$ per $n \geq n_1$ e m intero positivo arbitrario. Se questa condizione è soddisfatta Cantor afferma che "*la successione ha un limite determinato* (bestimmte) b". (Come egli stesso chiarirà una diecina d'anni dopo, con ciò intende che alla successione fondamentale $\{a_n\}$ è associato un simbolo b, evitando in questo modo un circolo vizioso, un errore logico messo in luce per prima volta da Weierstrass).

In maniera analoga, Cantor considera poi successioni 'fondamentali' di numeri $\{b_n\}$ generando così a partire dal dominio dei numeri reali B un nuovo dominio numerico C e, ripetendo il procedimento λ volte, un dominio numerico L di tipo λ. "Il concetto di numero, così come è stato qui sviluppato – commenta Cantor – contiene in sé il germe per una estensione infinita, in sé necessaria e assoluta" [Cantor 1872, 95].

Stabilito con un assioma che a ogni numero è associato un punto della retta, le cui coordinate sono uguali a quel numero, Cantor passa poi a studiare la natura degli insiemi di punti della retta, cominciando col definire "punto limite" [punto di accumulazione] di un insieme di punti P ("un punto della retta tale che in ogni suo intorno si trovano *infiniti* punti di P").

Per ogni insieme di punti P Cantor considera poi l'insieme P' (*primo insieme di punti derivato di* P) definito come l'insieme dei punti-limite di P. Se P' è un insieme infinito si può considerare il suo insieme derivato P'', e poi reiterare l'operazione di "derivazione", che agli occhi di Cantor appare l'analogo della generazione dei domini numerici $B, C, \ldots, L$, fino a ottenere un insieme di punti P di ν-esimo tipo (se $P^{(\nu)}$ comprende solo un numero finito di punti il suo derivato è l'insieme vuoto e l'operazione di derivazione si arresta). Per un insieme siffatto si può ancora formulare il teorema di unicità della rappresentazione di una funzione in serie trigonometrica [Cantor 1872, 99]:

TEOREMA – *Se sussiste un'equazione della forma*

$$0 = C_0 + C_1 + \ldots + C_n + \ldots$$

dove $C_0 = \frac{1}{2} d_0$ *e* $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$ *per tutti i valori di* x *ad eccezione di quelli corrispondenti ai punti di un insieme di* ν*-esimo tipo* P *dato nell'intervallo* $(0, 2\pi)$ *dove* ν *denota un numero intero arbitrariamente grande, allora vale*

$$d_0 = 0, \quad c_n = d_n = 0.$$

La dimostrazione ricalca la strategia adottata in [Cantor 1871a] per provare che la funzione $F(x)$ di Riemann è lineare. Ormai, però, l'interesse di Cantor era essenzialmente rivolto agli insiemi (derivati) di punti. Nell'enunciato del teorema si era limitato a insiemi di punti di prima specie, ossia insiemi tali che $P^{(\nu)} = \emptyset$ per $\nu < \infty$. Ma all'epoca era già andato ben oltre e aveva considerato insiemi di seconda specie, quelli per cui $P^{(\infty)} \neq \emptyset$. (Di conseguenza, $P^{(\infty)} = \emptyset$ caratterizza gli insiemi di punti di prima specie.) Inoltre, nell'operazione di derivazione era possibile procedere oltre $P^{(\infty)}$ e considerare $P^{(\infty+1)}$, $P^{(\infty+n)}$, $\ldots$, $P^{(\infty^n)}$, $P^{(\infty^\infty)}$ o insiemi derivati di ordine superiore

$$\text{(6)} \quad P^{(n\infty^\infty)}, P^{(\infty^{\infty+1})}, P^{(\infty^{\infty+n})}, P^{(\infty^{n\infty})}, P^{(\infty^{\infty^n})}, P^{(\infty^{\infty^\infty})}, \ldots$$

in "una generazione dialettica di concetti che si spinge sempre più avanti, e libera da ogni arbitrarietà resta in sé necessaria e conseguente", dirà Cantor in [Cantor 1880], aggiungendo tuttavia in una nota (p. 358) che Zermelo ha ritenuto di non includere nell'edizione delle opere di Cantor: "sono giunto [alla successione (6)] dieci anni fa; vi ho fatto cenno in occasione di una peculiare rappresentazione del concetto di numero (Math. Ann. Bd. V) [ossia [Cantor 1872]]".

Si può invece concludere con Zermelo che l'estensione del concetto di insieme derivato oltre ogni indice finito ν "ha poi portato l'autore, per necessità interna, alla creazione del concetto di numeri ordinali transfiniti

$$\omega, \omega + 1, \ldots, \omega^2, \ldots$$

In questo concetto di 'derivato superiore' di un insieme di punti possiamo dunque riconoscere l'autentico germe della 'teoria degli insiemi' cantoriana, e nella teoria delle serie trigonometriche il suo luogo di nascita" (in [Cantor 1932, 102]).

References

[Bottazzini 1994] BOTTAZZINI, U. 1994. *Va' pensiero. Immagini della matematica nell'Italia dell'Ottocento*. Il Mulino, Bologna.

[Bottazzini and Gray 2013] BOTTAZZINI, U. and J. GRAY. 2013. *Hidden Harmony-Geometric Fantasies. The Rise of Complex Function Theory*. Springer, New York.

[Cantor 1870a] CANTOR. G. 1870a. *Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz*. Journal rei. angew. Math. **72**, 130-138 in *Ges. Abh.* 71-79.

[Cantor 1870b] CANTOR. G. 1870b. *Beweis, dass eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene function f(x) [etc]*. Journal rei. angew. Math. **72**, 139-142 in *Ges. Abh.* 80-83.

[Cantor 1871a] CANTOR. G. 1871a. *Notiz zu dem Aufsatz: Beweis [etc]*. Journal rei. angew. Math. **73**, 294-296 in *Ges. Abh.* 84-86.

[Cantor 1871b] CANTOR. G. 1871b. *Über trigonometrische Reihen.* Math. Annalen **4**, 139-143 in *Ges. Abh.* 87-91.

[Cantor 1872] CANTOR. G. 1872. *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrische Reihen*. Math. Annalen **5**, 123-132 in *Ges. Abh.* 92-102.

[Cantor 1880] CANTOR. G. 1880. *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*. Math. Annalen **17**, 355-358 in *Ges. Abh.* 145-148.

[Cantor 1932] CANTOR. G. 1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Zermelo, E. (ed.). Springer, Berlin.

[Dauben 1979] DAUBEN, J.W. 1979. *Georg Cantor: his mathematics and philosophy of the infinite*. Harvard University Press, Cambridge, Mass.

[Dirichlet 1829] DIRICHLET, P.G.L. 1829. *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*. Journal rei. angew. Math. **4**, 157-169 in *Werke* 1, 117-132.

[Dirichlet 1889-1897] DIRICHLET, P.G.L. 1889-1897. *G. Lejeune-Dirichlet's Werke*. Kronecker, L. and L. Fuchs (eds). 2 vols. G. Reimer, Berlin. (Rep. Chelsea, New York 1969.)

[du Bois-Reymond 1876] DU BOIS-REYMOND, P. 1876. *Zusätze zur Abhandlung: Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln.* Math. Ann. **10**, 431-445.

[Dugac 1973] DUGAC, P. 1973. *Éléments d'analyse de Karl Weierstrass*. Archive Hist. Ex. Sciences **10**, 41-176.

[Dugac 1976] DUGAC, P. 1976. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Vrin, Paris.

[Heine 1870 HEINE, E. 1870. *Über trigonometrisce Reihen.* Journal rei. angew. Math. **71**, 363-365.

[Heine 1872] HEINE, E. 1872. *Die Elemente der Functionenlehre*. Journal rei. angew. Math. **74**, 172-188.

[Lebesgue 1906] LEBESGUE, H. 1906. *Leçons sur les séries trigonométriques*, Gauthier-Villars, Paris.

[Meschkowski 1961] MESCHKOWSKI, H. 1961. *Denkweisen grosser Mathematiker. Ein Weg zur Geschichte der Mathematik.* Vieweg, Braunschweig.

[Meschkowski 1967] MESCHKOWSKI, H. 1967. *Probleme des unendlichen: Werk und Leben Georg Cantors*. Vieweg, Braunschweig.

[Meschkowski and Nilson 1991] MESCHKOWSKI, H. and W. NILSON. (eds). 1991. *Georg Cantor: Briefe*. Springer, Berlin.

[Purkert und Ilgauds 1987] PURKERT, W. und H. J. ILGAUDS. 1987. *Georg Cantor, 1845-1918*. Birkhäuser, Basel.

[Riemann 1854] RIEMANN, G.F.B. 1854, *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*. Göttingen Abh. 13 (1867) 87-132 in *Werke*, 229-297.

[Riemann 1990] RIEMANN, G.F.B. 1990. *Bernhard Riemanns gesammelte mathematische Werke und wissenschaftliche Nachlass*. 3rd. ed. Narasimhan, R. (ed.). Springer, New York.

[Schwarz 1890] SCHWARZ H.A. 1890. *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. 2 vols. Springer, Berlin. (Rep. Chelsea, New York 1972.)

[Thomae 1870] THOMAE, J. 1870. *Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen*. Nebert, Halle.

[Weierstrass 1880] WEIERSTRASS, K.T.W. 1880. *Zur Funktionenlehre*. Monatsberichte Berlin, 719-743. *Nachtrag*. Monatsberichte Berlin (1881) 228-230. (Rep. in Weierstrass 1886, 67-101, 102-104.) In Math. Werke **2**, 201-233. (Trad. fr: *Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques*. Bull. sci. math. (**2**) 5 (1881) 157-183.)

[Weierstrass 1886] WEIERSTRASS, K.T.W. 1886. *Abhandlungen aus der Funktionenlehre*. Springer, Berlin.

[Weierstrass 1894-1927] WEIERSTRASS K.T.W. 1894-1927. *Mathematische Werke von Karl Weierstrass*. 7 vols. Mayer and Müller, Berlin. Rep. Olms, Hildesheim.

Bottazzini Umberto

Umberto Bottazzini ha insegnato storia della matematica in diverse università italiane e straniere. È stato editor-in-chief di Historia Mathematica*, ed è membro del comitato editoriale delle principali riviste internazionali di storia della matematica. Nel 2006 ha vinto il premio Pitagora per la divulgazione matematica. Dal 2012 è Fellow* dell'American Mathematical Society, che nel 2015 gli ha attribuito il Leon Albert Whiteman Memorial Prize per la storia della matematica. Da oltre trent'anni collabora alla pagina di Scienza e filosofia de Il Sole24ore-Domenica. Tra i suoi libri più recenti: La patria ci vuole eroi. Matematici e vita politica nell'Italia del Risorgimento *(con P. Nastasi, Zanichelli, 2013),* Numeri *(Il Mulino 2015),* Infinito *(Il Mulino 2018).*