
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PIERRE LOUIS LIONS

**Remarques sur les équations linéaires elliptiques du
second ordre sous forme divergence dans les
domaines non bornés**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 79 (1985), n.6, p. 178–183.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_79_6_178_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Equazioni a derivate parziali. — *Remarques sur les équations linéaires elliptiques du second ordre sous forme divergence dans les domaines non bornés.* II. Nota di PIERRE LOUIS LIONS (*), presentata (**) dal Corrisp. E. MAGENES.

RIASSUNTO. — Si dimostra l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema $Au = f$, $u \in H_0^1(\Omega)$ nel caso in cui Ω è un aperto di $\mathbf{R}^n$ non limitato, A è un operatore variazionale ellittico del secondo ordine a coefficienti misurabili e limitati e f appartiene a $H^{-1}(\Omega)$.

I. INTRODUCTION

Cette Note est en quelque sorte la suite de [6]: en effet, nous résolvons ici une question laissée ouverte dans [6]. Plus précisément, nous considérons des équations linéaires elliptiques du second ordre du type

$$(1) \quad Au = f \quad , \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^N$, $f \in H^{-1}$ est donnée et A l'opérateur défini par

$$(2) \quad A\varphi = - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + \sum_i b_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + c\varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

avec $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$. Nous supposons

$$(3) \quad \exists \nu > 0, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^N, \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2 \quad \text{p.p. } x, \quad c \geq \nu \text{ p.p. } x.$$

Il convient de noter que nous ne supposons pas que Ω est borné. Le principal résultat de cette note est le:

THÉOREME - *Sous l'hypothèse (3), il existe une unique solution u de (1) dans $H_0^1(\Omega)$.*

(*) CEREMADE - Université Paris-Dauphine, Place de Lattre de Tassigny, 75775 PARIS Cedex 16 (France).

(**) Nella seduta del 22 novembre 1985.

Remarques. i) Nous avons montré précédemment dans [6] un résultat comparable pour $f \in L^2 + L^{2N/(N+2)}$ (si $N \geq 3$ par exemple). En fait, dans [6], est démontrée une estimation L^p sur u si f est bornée dans L^p pour $1 \leq p \leq \infty$.

ii) Les relations de ce type de résultats avec divers résultats connus sont détaillés dans [6].

iii) Le résultat précédent et sa démonstration étendent ceux de [6] sur deux points: d'une part, l'estimation L^2 est démontrée directement sans passer par l'interpolation entre L^1 et L^∞ ; d'autre part, nous pouvons traiter des seconds membres f dans H^{-1} ce qui n'était pas le cas dans [6] (voir la dernière section de [6]).

Même si le résultat précédent étend ceux de [6], nous verrons que la démonstration utilise essentiellement les mêmes « ingrédients » techniques que dans [6]. L'idée nouvelle est de décomposer f grâce à une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de $\mathbf{R}^N$ par des cubes unité. On remarque ensuite que, lorsque f est à support compact, la résolution de (1) n'est pas difficile et donne une solution qui décroît exponentiellement à l'infini. Et cette décroissance permet de s'assurer que la somme « des contributions de f sur tous les cubes » reste bornée grâce au lemme de Cotlar [2] (voir aussi A.W. Knap et E.M. Stein [5], A.P. Calderon et R. Vaillancourt [1] – la forme de ce lemme que nous utilisons est tirée de L. Hörmander [4]). L'auteur tient à remercier l'Institut Mittag-Leffler où ce travail a été mené à bien et le Professeur L. Hörmander pour leur hospitalité.

II. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Rappelons (cf. [6]) qu'il nous suffit d'obtenir une borne L^2 sur u lorsque f est bornée dans H^{-1} (qui ne dépende que des bornes L^∞ des coefficients et de v dans (3)), et que sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que $\Omega = \mathbf{R}^N$, a_{ij} , b_i , c , f sont réguliers.

Nous noterons q un point générique de $\mathbf{Z}^N \times \mathbf{Z}^N : q = (q_1, q_2)$ avec $q_1, q_2 \in \mathbf{Z}^N$. Soit $\chi_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $0 \leq \chi_0 \leq 1$, $\chi_0 \equiv 1$ sur $[-1/3, +1/3]$, $\chi_0 \equiv 0$ si $|x| \geq 2/3$, $\chi_0(x) = 1 - \chi_0(1-x)$ si $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $\chi_0(x) = 1 - \chi_0(-1-x)$ si $x \in [-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$. Enfin on note $\chi(x) = \prod_{i=1}^N \chi_0(x_i)$ et si $q_1 \in \mathbf{Z}^N$, $\chi_{q_1}(x) = \chi(x - q_1)$. Nous introduisons maintenant les opérateurs suivants dont nous vérifierons ci-dessous qu'ils sont bien définis: pour $f \in H^{-1}$, $u = R_q f \in L^2$ est donnée par $u = \chi_{q_1} \cdot v$ où v est la solution de

$$(4) \quad Av = \chi_{q_2} f \quad \text{dans } D'(\mathbf{R}^N), \quad v \in H^1(\mathbf{R}^N).$$

Remarquer que, au moins formellement, $A^{-1} = \sum_{q \in \mathbf{Z}^{2N}} R_q$.

Nous allons dans ce qui suit vérifier que les opérateurs R_q sont bien définis sur H^{-1} , qu'ils sont bornés et que, si R_q^* désigne l'opérateur adjoint (de L^2 dans H^1), on a

$$(5) \quad \forall q, q', \quad \|R_q^* \circ R_{q'}'\|^{1/2}, \quad \|R_q \circ i \circ R_{q'}^*\|^{1/2} \leq C e^{-\alpha|q-q'|}$$

où i est l'isomorphisme de H^1 sur H^{-1} donné par $-\Delta + 1$, où C ne dépend pas de q, q' et où α est une constante positive qui ne dépend que des bornes L^∞ des coefficients et de ν dans (3). Nous pouvons alors conclure en appliquant le lemme de Cotlar [2] (voir [4]).

Le fait que R_q est défini et borné sur H^{-1} est dû au fait que (4) admet une unique solution v dans H^1 car $\chi_{q_2} f \in H^{-1}$ et $\chi_{q_2} f$ est à support compact et que $\|v\|_{H^1} \leq C \|\chi_{q_2} f\|_{H^{-1}} \leq C' \|f\|_{H^{-1}}$. En effet, nous avons vu dans la section 3 de [6] que l'on a toujours une estimation $L^2 + L^p$ pour p assez grand ($p \in [p_0, +\infty]$) sur une solution u de (1). Ensuite nous observons que l'étape 2 de la démonstration du Théorème dans [6] montre qu'il existe $\gamma > 0$ ne dépendant que des bornes L^∞ des coefficients et de ν de (3) telle que pour $|x - q_2| \geq \sqrt{N}$

$$(6) \quad |v(x)| \leq C \|\chi_{q_2} f\|_{H^{-1}} \exp\{-\gamma|x - q_2|\} \leq C \|f\|_{H^{-1}} \exp\{-\gamma|x - q_2|\}.$$

Ceci permet bien sûr de démontrer les assertions énoncées plus haut sur R_q . Observons également que (6) implique aisément la première partie de (5): en effet nous avons pour tout $q, q', f \in H^{-1}, g \in H^{-1}$

$$\left| \int (R_{q'} f)(R_q g) dx \right| \leq \left| \int \chi_{q_1} \chi_{q_1'} v w dx \right|$$

où v, w sont les solutions de

$$(4') \quad Av = \chi_{q_2'} f, \quad Aw = \chi_{q_2} g \quad \text{dans } D'(\mathbb{R}^N), \quad v, w \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Or, si $|q_1 - q_1'| \geq \frac{2}{3} \sqrt{N}$, $\chi_{q_1} \chi_{q_1'}$, ont des supports disjoints et l'intégrale ci-dessus est nulle. De plus, si $|q_1 - q_1'| \leq \frac{2}{3} \sqrt{N}$, $|q_2 - q_2'| \leq 2 \sqrt{N}$ on majore l'intégrale par

$$\left| \int v w dx \right| \leq C \|f\|_{H^{-1}} \|g\|_{H^{-1}}.$$

Enfin, si $|q_1 - q_1'| \leq \frac{2}{3} \sqrt{N}$ et $|q_2 - q_2'| \geq 2 \sqrt{N}$, on remarque que grâce à (6)

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x-q'_2| \leq \sqrt{N}} v w \, dx \right| &\leq C \|g\|_{H^{-1}} \int_{|x-q'_2| \leq \sqrt{N}} |v| \exp \{-\gamma |x - q_2|\} \, dx \\ &\leq C \|f\|_{H^{-1}} \|g\|_{H^{-1}} \exp \{-\gamma |q_2 - q'_2|\}. \end{aligned}$$

L'intégrale sur $\{|x - q_2| \leq \sqrt{N}\}$ se majore de la même manière. Enfin, sur l'ensemble $E = \{|x - q_2| \geq \sqrt{N}, |x - q'_2| \geq \sqrt{N}\}$, on obtient:

$$\begin{aligned} \left| \int_E v w \, dx \right| &\leq C \|f\|_{H^{-1}} \|g\|_{H^{-1}} \int_E \exp \{-\gamma (|x - q_2| + |x - q'_2|)\} \, dx \\ &\leq C \|f\|_{H^{-1}} \|g\|_{H^{-1}} \exp \left\{ -\frac{\gamma}{2} |q_2 - q'_2| \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas, la première partie de (5) est démontrée.

Pour démontrer la deuxième partie de (5), il nous suffit de majorer convenablement pour tous, $f, g \in L^2$

$$(7) \quad \left| \int \nabla (R_q^* f) \cdot \nabla (R_q^* g) + (R_q^* f) (R_q^* g) \, dx \right|.$$

Pour ce faire, nous identifions tout d'abord R_q^* . En effet, si $f \in L^2$ nous allons démontrer que $u = R_q^* f$ est donnée par

$$(8) \quad \begin{aligned} u &= \chi_{q_2} w, \quad \text{où } w \text{ est la solution de} \\ A^* w &= \chi_{q_1} f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \quad w \in H^1 \end{aligned}$$

et

$$A^* = - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i(x)) + c(x).$$

En fait, l'identification de R_q^* est aisée une fois démontré le fait que (8) admet une unique solution. A nouveau (voir [6]) seule l'existence pose un problème que l'on résout en remarquant par exemple que si on multiplie (8) par $|w|^{p-2} w$ pour $2 > p > 1$ on obtient grâce à (3)

$$\begin{aligned} \nu(p-1) \int |w|^{p-2} |\nabla w|^2 \, dx - C_0(p-1) \int |w|^{p-1} |\nabla w| \, dx + \nu \int |w|^p \, dx &\leq \\ &\leq \int (\chi_{q_1} f) |w|^{p-2} w \, dx \leq \|\chi_{q_1} f\|_{L^p} \|w\|_{L^p}^{p-1} \\ &\leq C \|f\|_{L^2} \|w\|_{L^p}^{p-1}. \end{aligned}$$

On en déduit pour $p = 1$ petit (ne dépendant que des bornes L^∞ des coefficients et de ν dans (3)) une estimation L^p de w . Et d'après les résultats de [3] (Théorèmes 8.25-8.26), cette estimation implique une estimation L^2 sur l'ensemble $\{|x - q_1| < R\}$ ($\forall R < \infty$) ainsi qu'une estimation L^∞ sur l'ensemble $\{|x - q_1| \geq \sqrt[p]{N}\}$. Combiné avec l'estimation $L^p(\mathbf{R}^N)$, on déduit enfin une estimation $L^2(\mathbf{R}^N)$ sur w qui permet de prouver aisément l'existence de w .

La démonstration de la deuxième partie de (5) (et la majoration de l'intégrale (7)) est alors une conséquence facile des majorations suivantes

$$(9) \quad |w(x)| \leq C \exp\{-\delta |x - q_1|\} \|f\|_{L^2} \quad \text{si} \quad |x - q_1| \geq \sqrt[p]{N}$$

$$(10) \quad \left(\int_{B(x,1)} |\nabla w(y)|^2 dy \right)^{1/2} \leq C \exp\{-\delta |x - q_1|\} \|f\|_{L^2}.$$

où $C, \delta > 0$ sont des constantes qui ne dépendent que des bornes L^∞ des coefficients et de ν dans (3). Or (10) se déduit de (9) en remarquant d'une part que

$$\|w\|_{H^1} \leq C \|f\|_{L^2}$$

et d'autre part qu'en multipliant (8) par $\zeta^2(y) w(y)$ on obtient si $|x - q_1| \geq \sqrt[p]{N} + 2$

$$\nu \int \zeta^2 |\nabla w|^2 dy \leq C \int \zeta |\nabla \zeta| |w| |\nabla w| dy$$

où

$$\zeta(y) = \zeta_0(y - x) \quad , \quad \zeta_0 \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N) \quad , \quad 0 \leq \zeta_0 \leq 1.$$

Supp $\zeta_0 \subset B(0, 2)$, $\zeta_0 \equiv 1$ sur $B(0, 1)$. Ceci implique bien sûr

$$\left(\int_{B(x,1)} |\nabla w|^2 dy \right)^{1/2} \leq C \left(\int_{B(x,2)} w^2 dy \right)^{1/2}$$

et on voit bien que (9) implique (10).

La démonstration de (9) est en fait très semblable à la démonstration faite dans [6] de la décroissance exponentielle. D'après les arguments invoqués ci-dessus on sait que

$$(11) \quad |w| \leq C \|f\|_{L^2} \quad \text{pour} \quad |x - q_1| \geq \sqrt[p]{N}$$

et on va montrer que pour $\delta > 0$ suffisamment petit

$$|w(x)| \exp \{ \delta |x - q_1| \} \leq C \quad \text{pour } |x - q_1| \geq \sqrt{N}.$$

Pour ce faire, on observe que $w_\delta = w(x) \exp \{ \delta |x - q_1| \}$ vérifie l'équation

$$-\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} w_\delta \right) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (h_i^\delta w_\delta) + c^\delta w_\delta + \sum_i \beta_i^\delta \frac{\partial w_\delta}{\partial x_i} = 0$$

pour $|x - q_1| > 3\sqrt{N}$;

où

$$b_i^\delta = b_i + \delta \sum_j \frac{x_j - q_{1,j}}{|x - q_1|} a_{ji}, \quad \beta_i^\delta = - \sum_j a_{ij} \frac{x_j - q_{1,j}}{|x - q_1|},$$

$$c^\delta = c - \delta \sum_i b_i \frac{x_i - q_{1,i}}{|x - q_1|} - \delta^2 \sum_{i,j} a_{ij} \frac{x_i - q_{1,i}}{|x - q_1|} \frac{x_j - q_{1,j}}{|x - q_1|}.$$

Nous allons obtenir dans ce qui suit une estimation L^p sur w_δ pour $\delta > 0$ petit, $p > 1$ et $p-1$ petit. Cette estimation nous permet de conclure grâce à l'équation précédente et aux inégalités de Harnack faibles (voir [6]). Soit $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq \varphi_0 \leq 1$, $\varphi_0 \equiv 0$ pour $|x| \leq 1$, $\varphi_0 \equiv 1$ pour $|x| \geq 2$, on pose $\varphi = \varphi_0((x - q_1)/(\sqrt{N}))$ et on multiplie l'équation ci-dessus par $\varphi |w|^{p-2} w$. En utilisant (11), le fait que $\|w\|_{H^1} \leq C \|f\|_{L^2}$ et en choisissant $p > 1$ proche de 1, $\delta > 0$ petit, on obtient aisément les bornes voulues en intégrant par parties (voir plus haut pour un calcul très semblable).

RÉFÉRENCES

- [1] A.P. CALDERON et R. VAILLANCOURT (1972) – *On the boundedness of pseudo differential operators*. « J. Math. Soc. Japan », 23 p. 374-378.
- [2] M. COTLAR (1955) – *A combinatorial inequality and its application to L^2 spaces*. « Rev. Mat. Cuyana », 1, 41-55.
- [3] D. GILBARG et N.S. TRUDINGER (1977) – *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, Berlin.
- [4] L. HÖRMANDER (1985) – *The analysis of linear partial differential operators*. III, Springer, Berlin.
- [5] A.W. KNAPP et E.M. STEIN (1969) – *Singular integrals and the principal series*. « Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. », 63, 281-284.
- [6] P.L. LIONS – *Remarques sur les équations linéaires elliptiques du second ordre sous forme divergence dans des domaines non bornés*. « Rend. Acc. Naz. Lincei ».