
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

DIONIGI GALLETTTO, BRUNO BARBERIS

Sul collasso di un ammasso di materia disgregata.

Nota I

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 78 (1985), n.4, p. 138–147.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_78_4_138_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Sul collasso di un ammasso di materia disgregata* (*).
 Nota I di DIONIGI GALLETO (**) e BRUNO BARBERIS (**), presentata (***)
 dal Corrisp. D. GALLETO.

SUMMARY. — Starting from the considerations developed in [4], it is shown that the only forces at a distance exerted among the elements of an isolated spherical cluster of incoherent matter which, preserving homogeneity, is collapsing are those expressed by Newton's law of gravitation and those of the elastic type. Furthermore the reverse is shown, that is if the forces at a distance are of these two types during the collapse the homogeneity is preserved.

1. In [4], con specifico riferimento alle forze a distanza (forze gravitazionali) che si esercitano tra punti o elementi materiali, si è osservato che si possono sempre immaginare esperienze o dispositivi, sia pure soltanto ideali, atti a fornire una valutazione autonoma, ossia indipendente da ogni considerazione dinamica, di dette forze. Ciò premesso, facendo ricorso al principio di sovrapposizione delle forze simultanee e al terzo principio della dinamica, si sono introdotti i concetti di massa gravitazionale attiva e passiva e si è provato che essi sono identificabili, dando luogo alla cosiddetta *massa gravitazionale*. Identificando poi, in accordo con quanto indica l'esperienza, la massa gravitazionale con la massa inerziale (con che si può parlare semplicemente della loro massa), partendo dalla considerazione di due punti materiali $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ (per i quali le posizioni rispetto ad un assegnato riferimento sono state indicate rispettivamente con P_1 e P_2 (ovviamente con $P_1 \neq P_2$)) ed escludendo che la forza a distanza che si esercita tra essi possa dipendere esplicitamente dal tempo e dal loro eventuale stato di moto, si è provato che la suddetta forza non può che essere del seguente tipo:

$$(1) \quad \mathbf{F}_{12} = -m_1 m_2 f(|P_1 P_2|) \mathbf{u}_{12},$$

dove $\mathbf{F}_{12}$ è la forza esercitata da $\mathcal{P}_1$ su $\mathcal{P}_2$, m_1 e m_2 sono le masse di $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, $\mathbf{u}_{12}$ è il versore $\frac{P_1 P_2}{|P_1 P_2|}$ e $f(|P_1 P_2|)$ è una funzione della sola distanza $|P_1 P_2|$, positiva per $P_1 \neq P_2$ non appena si assuma che $\mathbf{F}_{12}$, in accordo con quanto indica l'esperienza, abbia carattere attrattivo.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.

(**) Istituto di Fisica Matematica «J.-Louis Lagrange», Università di Torino,
 Via Carlo Alberto, 10 - 10123 Torino.

(***) Nella seduta del 13 aprile 1985.

Il suddetto risultato, come è già stato osservato al n. 7 di [4], si può estendere senza difficoltà, ricorrendo a (1) e ancora al principio di sovrapposizione delle forze simultanee, sia al caso di un sistema discreto di punti sia al caso di un sistema continuo.

Ad esempio, nel caso di un sistema continuo e limitato $\mathcal{U}$, ritenuto omogeneo, si ottiene che il risultante $\mathbf{g}(P, t)$ delle forze a distanza specifiche (forze per unità di massa) esercitate all'istante t su un qualunque elemento $\mathcal{P}$ di $\mathcal{U}$ dagli altri suoi elementi $\mathcal{Q}$ risulta espresso da

$$(2) \quad \mathbf{g}(P, t) = \mu(t) \int_{\mathcal{C}} f(|PQ|) \frac{\mathbf{PQ}}{|PQ|} d\mathcal{C},$$

dove con P, Q e $\mathcal{C}$ si sono indicate rispettivamente le posizioni degli elementi $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ e la configurazione assunta da $\mathcal{U}$ nell'istante t e con $\mu(t)$ la sua densità.

Stante il suo significato fisico, la funzione $f(|PQ|)$ risulta ovviamente definita per ogni $P \neq Q$. Essa, in più, verrà ritenuta continua. Stante poi il suo significato fisico, è evidente che l'integrale (2), almeno nell'ipotesi che il mezzo sia tridimensionale – e, più precisamente, che $\mathcal{C}$ sia un dominio –, va ritenuto convergente nel senso usuale del termine ⁽¹⁾.

2. Si prenda ora in esame il caso di un ammasso sferico isolato $\mathcal{U}$ di materia disgregata ed elettricamente neutra che, sotto l'azione delle forze a distanza (le uniche forze effettive alle quali, stante l'ipotesi fatta, sono soggetti i suoi elementi e che, conformemente a quanto indica l'esperienza, hanno carattere attrattivo), sia soggetto a collasso e si supponga che esso, ritenuto inizialmente omogeneo e in quiete rispetto al riferimento inerziale $\mathcal{T}_O$ con origine nel centro O dell'ammasso, durante il collasso si mantenga omogeneo.

Indicato con $[t_1, t_0]$ l'intervallo di tempo (aperto a destra) in cui ha luogo il collasso (t_1 corrisponde all'istante in cui ha inizio il collasso, mentre t_0 corrisponde all'istante in cui l'ammasso si ridurrebbe ad un punto materiale ⁽²⁾), si ha che gli elementi di $\mathcal{U}$ si muovono rispetto a $\mathcal{T}_O$ di moto radiale e la condizione che $\mathcal{U}$ si mantenga omogeneo, ossia che in detto intervallo risulti $\mu =$

(1) Ossia, tenendo presente che la funzione $f(|PQ|)$ viene ritenuta continua per $P \neq Q$, nel senso che, comunque considerata una successione di aperti $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n, \dots$ contenenti P e tali che risulti per ogni n : $\mathcal{A}_n \supset \mathcal{A}_{n+1}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } \mathcal{A}_n = 0$, e indicato con $\mathcal{D}_n$ il dominio $\mathcal{C} - \mathcal{C} \cap \mathcal{A}_n$, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}_n} f(|PQ|) \frac{\mathbf{PQ}}{|PQ|} d\mathcal{C}$$

esista finito (con ovvio significato del termine) ed indipendente dalla successione considerata.

(2) Che tale evenienza, come conseguenza delle ipotesi fatte, almeno in astratto si verifichi segue dal fatto che le configurazioni assunte da $\mathcal{U}$ durante il collasso si mantengono sferiche.

$= \mu(t)$, comporta che, comunque scelti gli elementi $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ su uno stesso raggio e indicate con $P_1(t)$ e $P_2(t)$ le loro rispettive posizioni nella configurazione $\mathcal{S}_{r(t)}$ di $\mathcal{U}$ nell'istante t (con $r(t)$ raggio della configurazione in detto istante), risulti

$$(3) \quad \frac{\rho_1(t)}{\rho_2(t)} = \frac{\rho_1(t_1)}{\rho_2(t_1)},$$

dove si è posto

$$|OP_i| = \rho_i \quad (i = 1, 2).$$

Infatti, ritenendo, ovviamente, che a elementi distinti di $\mathcal{U}$ corrispondano immagini distinte ad ogni istante dell'intervallo $[t_1, t_0]$ in cui ha luogo il collasso, gli elementi interni o esterni a una qualsiasi superficie materiale chiusa di $\mathcal{U}$ si mantengono durante il collasso ad essa interni o esterni. Sussistono pertanto le due eguaglianze

$$\mu(t) \rho_i^3(t) = \mu(t_1) \rho_i^3(t_1) \quad (i = 1, 2),$$

da cui segue subito (3).

L'eguaglianza (3) non esprime altro che, come d'altronde è ovvio, durante il collasso le configurazioni assunte da $\mathcal{U}$ si mantengono tra loro omotetiche.

Da (3) segue

$$\frac{\ddot{\rho}_1(t)}{\rho_1(t)} = \frac{\ddot{\rho}_2(t)}{\rho_2(t)} = \varphi(t),$$

eguaglianza esprime che per ogni $\rho(t) \in (0, r(t)]$ risulta

$$(4) \quad \ddot{\rho}(t) = \varphi(t) \rho(t),$$

con la funzione $\varphi(t)$ per ora completamente indeterminata e per la quale, anzi, almeno per ora, non si può escludere la dipendenza dai parametri $r_1 = r(t_1)$ e $\mu_1 = \mu(t_1)$ ⁽³⁾. Su essa verrà fatta la sola ipotesi che sia continua nel suo inter-

(3) L'indipendenza di $\varphi(t)$ dai parametri r_1 e μ_1 che caratterizzano l'ammasso comporterebbe che ad ogni istante t la parte di $\mathcal{U}$ esterna alla sfera $\mathcal{S}_{\rho(t)}$ di centro O e raggio $\rho(t)$ non darebbe alcun contributo al moto degli elementi di $\mathcal{U}$ appartenenti alla sfera $\mathcal{S}_{\rho(t)}$. Da ciò seguirebbe necessariamente, come è ben noto (si veda, ad es., [1], 2):

$$f(x) = \frac{k}{x^2},$$

con $x = |PQ|$ e k costante. Si otterrebbe cioè che le forze a distanza sarebbero in tal caso proprio espresse dalla legge di gravitazione universale. Nulla però autorizza per ora a ritenere che la funzione $\varphi(t)$ sia effettivamente indipendente dai parametri r_1 e μ_1 . Si veda in proposito quanto osservato nella prossima nota 5.

vallo di definizione (t_1, t_0) , intervallo che si può subito estendere all'intervallo $[t_1, t_0)$ non appena si tenga conto del significato fisico di $\varphi(t) \rho(t)$, espresso dal primo membro di (4).

Comunque considerato l'elemento $\mathcal{P}$ di $\mathcal{U}$ e indicata con $P(t)$ la sua posizione nella configurazione $\mathcal{S}_{r(t)}$, l'eguaglianza (4) esprime che

$$(5) \quad \frac{d^2 OP}{dt^2} = \varphi(t) OP.$$

Poiché nell'intervallo di tempo $[t_1, t_0)$ la densità $\mu(t)$ di $\mathcal{U}$ (funzione ovviamente continua di t) è crescente in senso stretto, nel suddetto intervallo il tempo t può essere espresso come funzione di μ : $t = t(\mu)$, con il dominio di definizione di $t(\mu)$, funzione continua di μ , dato da $[\mu_1, \infty)$. Ne segue che l'eguaglianza (5) si può scrivere

$$(6) \quad \frac{d^2 OP}{dt^2} = \Phi(\mu) OP,$$

con la funzione $\Phi(\mu) = \varphi(t(\mu))$ definita nell'intervallo $[\mu_1, \infty)$ e ivi continua, e per la quale, come per la $\varphi(t)$ che la origina, non si può, almeno per ora, escludere la dipendenza da r_1 e μ_1 .

3. Essendo le forze a distanza le uniche forze a cui sono soggetti gli elementi di $\mathcal{U}$ nel loro moto rispetto al riferimento inerziale $\mathcal{T}_O$, si ha che il secondo membro di (5), sia pure con la funzione $\varphi(t)$ indeterminata, si può interpretare come il risultante delle forze a distanza specifiche agenti su $\mathcal{P}$ all'istante t . In altri termini, comunque scelto P in $\mathcal{S}_{r(t)}$, $\varphi(t) OP$ fornisce in detto istante il risultante $\mathbf{g}(P, t)$ delle forze a distanza specifiche agenti su quell'elemento $\mathcal{P}$ di $\mathcal{U}$ che ha come immagine in $\mathcal{S}_{r(t)}$ il punto P .

Ricordando (2), risulta quindi:

$$(7) \quad \int_{\mathcal{S}_r} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} dc = \frac{\varphi(t)}{\mu(t)} OP,$$

ossia, osservando che il primo membro dipende da t soltanto tramite il raggio $r(t)$ e quindi tramite il volume $v(t)$ di $\mathcal{S}_{r(t)}$:

$$(8) \quad \int_{\mathcal{S}_r} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} dc = -\lambda(v) OP,$$

con $\lambda(v)$ funzione incognita di v e dove il segno negativo a secondo membro è stato introdotto per comodità espositiva. Si può inoltre a questo punto osservare che, essendo il primo membro di (8) indipendente da r_1 e μ_1 , anche $\lambda(v)$ è indipendente da detti parametri.

L'equazione (8), nelle due funzioni incognite $f(x)$ ($x = |PQ|$) e $\lambda(v)$, risulta verificata per ogni $P \in \mathcal{S}_r$, nonché per ogni $r \in (0, r_1]$, e quindi per ogni $v \in (0, v_1]$, con $v_1 = \frac{4}{3} \pi r_1^3$ volume della configurazione iniziale.

Con l'ipotesi che la funzione $f(x)$ sia di classe C^2 , assumendo che r vari nell'intervallo $(0, +\infty)$ e che quindi l'intervallo di definizione di $f(x)$ sia $(0, +\infty)$, l'equazione (8) è stata risolta in [2], 7-9 e, con riferimento al caso n -dimensionale ($n \geq 2$) e con la presente limitazione per r (e quindi con l'intervallo di definizione di $f(x)$ dato da $(0, 2r_1]$), in [3], 3.5, 3.6. Per essa si è dedotto che risulta

$$(9) \quad f(x) = \frac{k}{x^2} + \beta x, \quad \lambda(v) = \beta v + \frac{4}{3} \pi k,$$

con k e β costanti arbitrarie.

Nella presente Nota, con esplicito riferimento al problema fisico che la origina, la suddetta equazione - anzi, più precisamente, l'equazione (7) - verrà risolta facendo ricorso alla sola ipotesi della continuità della funzione $f(x)$, il cui dominio di definizione è, come già si è osservato, l'intervallo $(0, 2r_1]$.

4. A tale scopo si osservi che, tenendo conto di (6), l'equazione (7) si può scrivere

$$(10) \quad \int_{\mathcal{S}_r} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} dc = \frac{\Phi(\mu)}{\mu} OP,$$

equazione verificata per ogni $P \in \mathcal{S}_r$ e per ogni $r \in (0, r_1]$ e da cui, essendo il primo membro indipendente da r_1 e μ_1 , segue che anche $\frac{\Phi(\mu)}{\mu}$ deve essere indipendente da r_1 e μ_1 , con la conseguenza che, comunque variando μ_1 , e quindi μ (stante il vincolo $\mu_1 r_1^3 = \mu r^3$), il suddetto rapporto deve risultare indipendente da μ .

Pertanto, fatta la posizione

$$(11) \quad \Phi(\mu) = \tilde{\Phi}(\mu) + \Phi_0,$$

dove con Φ_0 si è indicato l'eventuale addendo costante che compare in $\Phi(\mu)$, si ottiene che deve essere

$$(12) \quad \tilde{\Phi}(\mu) = \kappa \mu,$$

con il fattore κ costante.

Inoltre, dovendo essere anche $\frac{\Phi_0}{\mu}$ indipendente da μ (e quindi indi-

pendente dai parametri r_1 e μ_1), si ha che anche la costante Φ_0 deve dipendere linearmente da μ , ciò che può accadere se e solo se, supposta ovviamente $\Phi_0 \neq 0$, risulta

$$(13) \quad \Phi_0 = \gamma v \mu = \gamma M,$$

con M massa dell'ammasso e γ costante (e quindi anch'essa indipendente dai parametri r_1 e μ_1).

Fatte per comodità espositiva le posizioni

$$\kappa = -\frac{4}{3} \pi k, \quad \gamma = -\beta,$$

da (11), (12), (13) segue quindi

$$(14) \quad \Phi(\mu) = -\left(\frac{4}{3} \pi k + \beta v\right) \mu,$$

con che l'equazione (10) diventa

$$(15) \quad \int_{\mathcal{S}_r} f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} dc = -\left(\frac{4}{3} \pi k + \beta v\right) OP,$$

equazione che, come già si è detto, deve essere verificata per ogni $P \in \mathcal{S}_r$ e per ogni $r \in (0, r_1]$.

Il confronto di (8) con (15) comporta intanto che deve sussistere la seconda delle (9) in tutto l'intervallo $(0, v_1]$.

Si ha inoltre, ricordando (5), (6) e (14):

$$(16) \quad \varphi(t) = -\frac{4}{3} \pi k \mu(t) - \beta M.$$

5. Indicata con $f_1(x)$ una qualsiasi primitiva di $f(x)$, risulta, con evidente significato dei simboli:

$$f(|PQ|) \frac{PQ}{|PQ|} = \text{grad}_Q f_1(|PQ|)$$

e pertanto, sussistendo anche nel presente caso il teorema del gradiente, l'equazione (15) si può scrivere, per ogni P interno a $\mathcal{S}_r$ e quindi, per motivi di continuità, anche per ogni P appartenente alla frontiera $\partial \mathcal{S}_r$ di $\mathcal{S}_r$:

$$(17) \quad \int_{\partial \mathcal{S}_r} f_1(|PQ|) \mathbf{n} d\sigma = -\left(\frac{4}{3} \pi k + \beta v\right) OP,$$

con $\mathbf{n}$ versore della normale esterna a $\partial \mathcal{S}_r$.

Supposto $P \in \partial \mathcal{S}_r$ e posto

$$x = |PQ|, \quad \vartheta = \widehat{POQ},$$

si ha

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{x^2}{2r^2},$$

da cui segue

$$x \, dx = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta.$$

Si ha quindi

$$\int_{\partial \mathcal{S}_r} f_1(x) \cos \vartheta \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{2r} f_1(x) \left(1 - \frac{x^2}{2r^2}\right) x \, dx \, d\varphi,$$

e pertanto, proiettando l'equazione (17) sulla semiretta congiungente O con P, si ottiene

$$(18) \quad \int_0^{2r} f_1(x) \left(1 - \frac{x^2}{2r^2}\right) x \, dx = -\frac{2}{3}kr - \frac{2}{3}\beta r^4.$$

Da (18), tramite derivazione, si deduce agevolmente che è

$$f(2r) = \frac{k}{4r^2} + 2\beta r,$$

eguaglianza che sussiste per ogni $r \in (0, r_1]$, e che è appunto la prima delle (9), verificata in tutto l'intervallo $(0, 2r_1]$. Per quanto concerne le costanti k e β , poiché, stante il carattere attrattivo delle forze a distanza, è, come è stato richiamato al n. 1, $f(x) > 0$ per $x > 0$, si ha che dette costanti non possono essere negative. Ovviamente la loro determinazione va demandata all'esperienza.

Si può quindi concludere che, nelle ipotesi in cui ci si è posti per le forze a distanza ⁽⁴⁾, si ha:

I. *Le forze a distanza che si esercitano tra gli elementi di un ammasso sferico omogeneo di materia disgregata che sia soggetto a collasso conservando l'omoge-*

(4) E cioè nelle ipotesi che esse non dipendano esplicitamente dal tempo e dall'eventuale stato di moto degli elementi tra cui si esercitano e che la funzione $f(|P_1 P_2|)$ sia continua per $P_1 \neq P_2$.

neità possono essere soltanto del tipo di quelle espresse dalla legge di gravitazione universale oppure del tipo di quelle elastiche.⁽⁵⁾

Ritenendo, come indica l'esperienza, che le forze a distanza non crescano in grandezza al crescere di x , segue necessariamente $k > 0$, $\beta = 0$, ossia

$$f(x) = \frac{k}{x^2},$$

e cioè che le forze a distanza (forze gravitazionali) che si esercitano tra gli elementi dell'ammasso risultano espresse proprio dalla legge di gravitazione universale (con k costante di gravitazione universale).

6. A completamento del risultato I si può poi osservare che ⁽⁶⁾:

II. Se un ammasso sferico inizialmente omogeneo è soggetto a collasso sotto l'azione di forze a distanza del tipo di quelle espresse dalla legge di gravitazione universale oppure del tipo di quelle elastiche, esso durante il collasso si mantiene omogeneo.

Continuando ad indicare con $\mathcal{U}$ l'ammasso e con M la sua massa, con t_1 l'istante in cui ha inizio il collasso, con $r(t)$ il suo raggio all'istante t , con $r_1 = r(t_1)$ il suo raggio all'istante t_1 , si osservi in proposito, per provare l'asserto, che la legge secondo cui varia $r(t)$ durante il collasso nel caso in cui le forze a distanza siano espresse dalla legge di gravitazione universale è data dalla soluzione dell'equazione

$$(19) \quad \ddot{r} = -k \frac{M}{r^2}$$

soddisfacente alle condizioni iniziali

$$(20) \quad r(t_1) = r_1, \quad \dot{r}(t_1) = 0,$$

soluzione che esiste ed è unica in tutto l'intervallo $[t_1, t_0)$.

(5) Qualora la costante β sia diversa da 0 – caso in cui le forze a distanza di tipo elastico non sono nulle – da (16) segue che $\varphi(t)$ dipende effettivamente da M , ossia dai parametri μ_1 e r_1 che caratterizzano l'ammasso. La funzione $\varphi(t)$ è indipendente da M , ossia dai suddetti parametri, soltanto se $\beta = 0$. Le stesse osservazioni ovviamente sussistono per $\Phi(\mu)$, come subito segue da (14).

(6) Nonostante le varie e numerose ricerche fatte, gli Autori non hanno trovato traccia in nessun trattato o lavoro da loro consultato di questo teorema, che, d'altra parte, stante il suo contenuto, non può che essere noto. Gli Autori hanno pertanto ritenuto opportuno presentare in questa Nota una dimostrazione di tale teorema.

Comunque considerato un elemento $\mathcal{P}$ di $\mathcal{U}$, si indichi con $\rho(t)$ la sua distanza da O all'istante t e si ponga $\rho_1 = \rho(t_1)$ e

$$(21) \quad \alpha = \frac{\rho_1}{r_1}.$$

Indicata con M_α la massa della parte dell'ammasso contenuta nella sfera $\mathcal{S}_{\rho(t)}$ di centro O e raggio $\rho(t)$, risulta, tenendo presente (21):

$$(22) \quad M_\alpha = \text{cost.} = \frac{4}{3} \pi \mu_1 \rho_1^3 = \alpha^3 M,$$

dove con μ_1 si è indicata la densità di $\mathcal{U}$ all'istante t_1 , istante in cui $\mathcal{U}$ è per ipotesi omogeneo. La legge secondo cui varia $\rho(t)$ durante il collasso, sempre nel caso in cui le forze a distanza siano espresse dalla legge di gravitazione universale, è data dalla soluzione dell'equazione

$$(23) \quad \ddot{\rho} = -k \frac{M_\alpha}{\rho^2}$$

soddisfacente alle condizioni iniziali

$$(24) \quad \rho(t_1) = \rho_1, \quad \dot{\rho}(t_1) = 0.$$

Tenendo presente (22), l'equazione (23) si può scrivere

$$(19') \quad \ddot{y} = -k \frac{M}{y^2},$$

dove si è posto

$$(25) \quad y(t) = \frac{\rho(t)}{\alpha},$$

mentre le condizioni iniziali (24), sempre ricordando (21), assumono la forma

$$(20') \quad y(t_1) = r_1, \quad \dot{y}(t_1) = 0.$$

L'equazione (19') è identica all'equazione (19) e le condizioni iniziali (20') sono identiche alle (20) e pertanto la soluzione $y(t)$ di (19') soddisfacente a (20') coincide con $r(t)$. Da (25) segue quindi

$$(26) \quad \rho(t) = \alpha r(t)$$

in tutto l'intervallo $[t_1, t_0]$ e, stante l'arbitrarietà con cui è stato scelto l'elemento $\mathcal{P}$ di $\mathcal{U}$, per ogni $\alpha \in [1, 0)$.

L'eguaglianza (26), verificata, come si è detto per ogni $\alpha \in [1, 0)$, esprime che, nel caso in cui le forze a distanza siano espresse dalla legge di gravitazione universale, durante il collasso le configurazioni di $\mathcal{U}$ si mantengono tra loro omotetiche, che è quanto basta per concludere che $\mathcal{U}$ durante il collasso si mantiene omogeneo. Quest'ultima deduzione, pressoché ovvia, per brevità si tralascia.

Nel caso in cui le forze a distanza siano del tipo di quelle elastiche le leggi secondo cui variano $r(t)$ e $\rho(t)$ sono date dalle soluzioni delle equazioni

$$(27) \quad \ddot{r} = -\beta M r \quad , \quad \ddot{\rho} = -\beta M \rho$$

soddisfacenti alle condizioni iniziali (20) e (24) rispettivamente. In questo caso è sufficiente dividere per α entrambi i membri della seconda delle (27) e fare la posizione (25) per ricondurre questa equazione alla prima delle (27) ed ottenere quindi che anche in questo caso sussiste l'eguaglianza (26), ecc.

I risultati I e II permettono pertanto di concludere che:

III. *Le forze a distanza sono del tipo di quelle espresse dalla legge di gravitazione universale oppure del tipo di quelle elastiche se e solo se durante il collasso l'ammasso sferico si mantiene omogeneo.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] GALLETTO D. e BARBERIS B. (1978) - *Further Remarks on a Paper by P.T. Landsberg*, « Atti Accad. Sci. Torino », 112, 103-107.
- [2] GALLETTO D. (1982) - *Un teorema di inversione nella teoria del campo di attrazione newtoniano*, « Atti Accad. Sci. Torino », 116, 349-356.
- [3] GALLETTO D. (1983) - *Some Converse Theorems in Newtonian Field Theory and Their Applications*, « Applicable Anal. », 15, 313-337.
- [4] GALLETTO D. e BARBERIS B. (1984) - *Sulla legge di gravitazione universale. I*, « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. », Ser. VIII, 76, 359-366.