
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ATTILIO ADAMI

**Uno schema di calcolo dello sviluppo del risalto
idraulico**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 75 (1983), n.3-4, p.
111-118.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_75_3-4_111_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1983_8_75_3-4_111_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica dei fluidi. — *Uno schema di calcolo dello sviluppo del risalto idraulico.* Nota (*) di ATTILIO ADAMI (**), presentata dal Corrisp. E. MARCHI.

ABSTRACT. — The flow inside the hydraulic jump is interpreted in terms of diffusion of a two-dimensional turbulent jet. The classical theoretical-experimental results of turbulent diffusion can be consequently utilized and, on the basis of continuity and momentum equations, the water depth and the distribution of flow velocity for any cross section are shown to be determined for given Froude number of upstream flow.

1. PREMESSA

Il risalto idraulico è nel tempo stesso il più noto ed il più incognito fenomeno della meccanica dei moti a pelo libero, sebbene esso abbia suscitato l'interesse di famosi ricercatori, tra i quali vanno ricordati Bidone [1], Belanger [2] e Bakhmeteff [3]. Nonostante questo grande interesse alcuni aspetti anche importanti non sono stati ancora chiariti: per esempio a tutt'oggi manca una teoria completa che spieghi puntualmente lo sviluppo del risalto. Sull'argomento si reperisce in letteratura solo la trattazione dovuta a Rajaratnam nel 1965 [4], il quale utilizza la similitudine tra il risalto e la corrente di un getto di parete (l'anglosassone « wall jet ») che progressivamente si espande.

Lo schema proposto da Rajaratnam ha la limitazione di essere applicabile quando il getto è completamente sviluppato e cioè quando l'ascissa corrente è maggiore di 15 volte la profondità della corrente a monte del risalto. Vi è anche da ricordare che a questo schema possono essere applicate le critiche che si fanno in generale alla teoria del getto di parete che ipotizza una similitudine cinematica molto discutibile dal punto di vista teorico.

Nella presente Nota si illustra uno schema di calcolo che prende lo spunto dall'osservazione di Rajaratnam sull'analogia tra il risalto e la diffusione turbolenta di un getto. Qui tuttavia ci si propone di esaminare soprattutto la parte iniziale del risalto e comunque risalti con bassi numeri di Froude, ove l'effetto della parete è ancora limitato ad uno strato così piccolo da potersi trascurare; di conseguenza si adotta il modello concettuale della diffusione turbolenta di un getto isolato.

(*) Pervenuta all'Accademia il 27 ottobre 1983.

(**) Istituto di Idraulica, Università di Padova.

Nella trattazione che segue si è trascurato l'effetto di mescolamento tra aria e acqua che si sviluppa soprattutto nel vortice di copertura del risalto: è questo un altro limite della trattazione, limite che appare accettabile in quanto, come detto, la trattazione viene proposta per bassi numeri di Froude.

2. LO SCHEMA PROPOSTO

Come si è detto, lo sviluppo di un risalto idraulico ricorda in modo evidente la diffusione di un getto bidimensionale turbolento in uno spazio indefinito. Per meglio dire, il risalto può essere simulato da un semigetto, fungendo il fondo da piano di simmetria. In queste condizioni il moto può essere schematizzato come in fig. 1: a monte del risalto il moto è uniforme con velocità co-

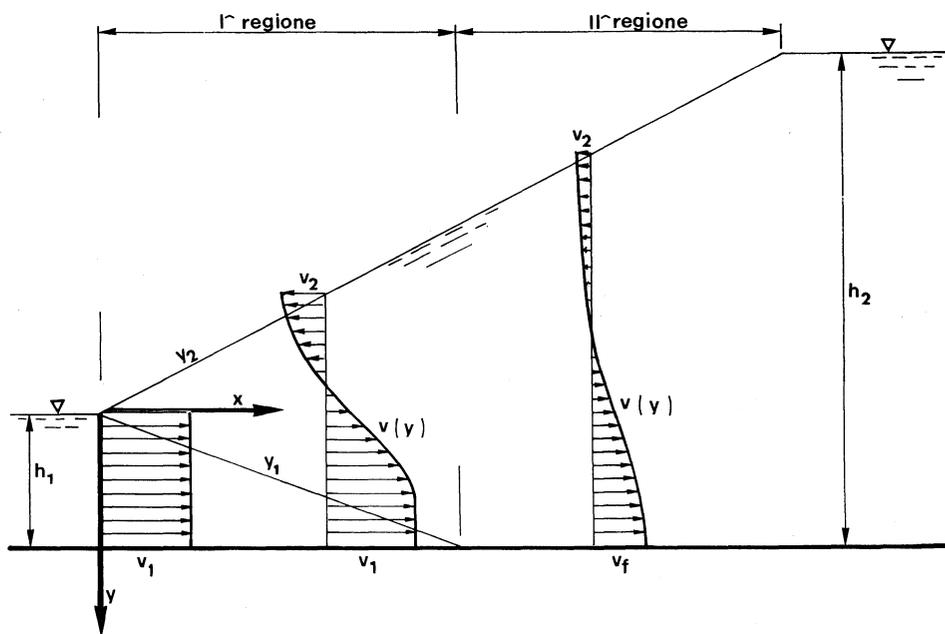


Fig. 1. - Lo sviluppo del risalto secondo lo schema proposto.

stante v_1 e profondità h_1 ; a partire dalla sezione iniziale (ove si pone l'origine delle ascisse) si sviluppa a partire dall'estremo superiore uno strato limite (compreso tra y_1 e y_2) che via via si allarga mentre al di sotto si mantiene un nucleo con velocità indisturbata che progressivamente diminuisce di spessore.

Secondo quanto è noto dallo studio della diffusione turbolenta, la distribuzione della velocità nel getto turbolento mantiene una forma sempre simile nel senso che può essere espressa da un'unica funzione cui, seguendo Schlichting e Abramovich, può essere assegnata la seguente forma:

$$(1) \quad \frac{v_1 - v(y)}{v_1 - v_2} = \left[1 - \left(\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \right)^{3/2} \right]^2.$$

Lo spessore dello strato limite d'altra parte è crescente con legge lineare, per cui si può assumere:

$$(2) \quad y_1 - y_2 = Cx,$$

ove a C si può dare, secondo diversi Autori, il valore 0,3.

Questa prima regione del moto termina quando il nucleo avente la velocità indisturbata si riduce a zero, ossia quando $y_1 = h_1$. A questa zona segue una seconda, in cui lo strato limite occupa tutto il campo di moto e la velocità dell'asse del getto (nel nostro caso la velocità al fondo) va progressivamente diminuendo.

Alcuni ricercatori, vedi ad esempio Milan [5], hanno mostrato che questa seconda regione si suddivide a sua volta in due zone, la più esterna delle quali, detta di moto completamente sviluppato è sede ancora di un processo di diffusione a sviluppo sostanzialmente lineare, e con una distribuzione di velocità che rispetta la similitudine nel senso anzidetto. Tra questa zona e la prima regione del moto esiste una zona intermedia, detta di transizione, nella quale la linearità dello sviluppo della diffusione turbolenta non può essere assunta.

Nel presente caso però questa zona di transizione è stata trascurata perchè la sua messa in conto comporterebbe un'assai maggiore complicatezza algoritmica ripagata da un modesto aumento di precisione dei risultati.

Come è noto nella zona di moto completamente sviluppato la velocità nell'asse del getto (per noi nel fondo) va progressivamente decrescendo in modo proporzionale alla radice quadrata della distanza. Si può porre cioè:

$$(3) \quad \frac{v_f}{v_1} = \sqrt{\frac{x_1}{x}}$$

dove v_f è la velocità nel fondo dell'ascissa generica e x_1 è l'ascissa alla quale si ha il passaggio dalla I alla II regione del moto.

Data la similitudine della distribuzione cinematica, si può scrivere in ogni sezione, in analogia alla (1):

$$(4) \quad \frac{v_f - v(y)}{v_f - v_2} = \left[1 - \left(\frac{y - y_2}{h_1 - y_2} \right)^{3/2} \right]^2.$$

Con le ipotesi poste e con l'ulteriore condizione che la divergenza e la curvatura delle linee di corrente siano piccole cosicchè la pressione segua la distribuzione idrostatica, è agevole scrivere l'equazione dinamica e quella di continuità nel seguente modo:

I regione :

$$(5) \quad \frac{1}{2} \gamma h_1^2 + \rho h_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \gamma (h_1 - y_2)^2 + \rho (h_1 - y_1) v_1^2 + \rho \int_{y_2}^{y_1} v^2 dy$$

$$(6) \quad h_1 v_1 = (h_1 - y_1) v_1 + \int_{y_2}^{y_1} v dy .$$

La (5), la (6) e la (2), tramite l'utilizzo della (1), costituiscono un insieme di 3 equazioni in 4 incognite (y_1, y_2, v_2, x) che consente la determinazione delle prime tre in funzione della quarta.

II regione :

$$(7) \quad \frac{1}{2} \gamma h_1^2 + \rho h_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \gamma (h_1 - y_2)^2 + \rho \int_{y_2}^{h_1} v^2 dy$$

$$(8) \quad h_1 v_1 = \int_{y_2}^{h_1} v dy .$$

La (7) e la (8), tramite l'utilizzo della (3) e della (4), costituiscono un sistema di due equazioni in tre incognite (y_2, v_2, x) che consente la determinazione delle prime due in funzione di x .

3. SVILUPPO DEI CALCOLI

Prima di proseguire è opportuno osservare che gli integrali che compaiono nelle relazioni precedenti possono essere facilmente risolti utilizzando la (1) e la (4). Infatti, nella I regione, chiamando $n = v_2/v_1$, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \int_{y_2}^{y_1} v dy &= v_1 \int_{y_2}^{y_1} \frac{v}{v_1} dy = v_1 \int_{y_2}^{y_1} \left\{ 1 - (1-n) \left[1 - \left(\frac{y-y_2}{y_1-y_2} \right)^{3/2} \right]^2 \right\} dy = \\ &= v_1 (y_1 - y_2) (0,55 + 0,45 n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{y_2}^{y_1} v^2 dy &= v_1^2 \int_{y_2}^{y_1} \left(\frac{v}{v_1} \right)^2 dy = v_1^2 \int_{y_2}^{y_1} \left\{ 1 - (1-n) \left[1 - \left(\frac{y-y_2}{y_1-y_2} \right)^{3/2} \right]^2 \right\}^2 dy \\ &= v_1^2 (y_1 - y_2) (0,416 + 0,316 n^2 + 0,268 n) . \end{aligned}$$

Lo stesso risultato si ottiene per la seconda regione, salvo la sostituzione di y_1 con h_1 e di v_1 con v_f .

Tornando allora al sistema della (5) e della (6), rapidi ed elementari passaggi matematici consentono una scrittura delle stesse equazioni nella seguente forma adimensionale nella quale F_1 indica, come usuale, il numero di Froude della corrente a monte v_1/\sqrt{gh} , e le lettere maiuscole indicano le stesse grandezze delle analoghe lettere minuscole, ma ora rapportate tutte a h_1 . Si ottiene allora per la I regione:

$$(5') \quad \frac{1}{2} Y_2^2 - Y_2 - Y_1 F_1^2 + F_1^2 (Y_1 - Y_2) (0,416 + 0,268 n + 0,316 n^2) = 0$$

$$(6') \quad -Y_1 + (Y_1 - Y_2) (0,55 + 0,45 n) = 0$$

$$(2') \quad Y_1 - Y_2 = 0,3 X.$$

Analogamente per la seconda regione si ottiene:

$$(7') \quad \frac{1}{2} Y_2^2 - Y_2 - F_1^2 + \frac{X_1}{X} F_1^2 (1 - Y_2) (0,416 + 0,268 n + 0,316 n^2) = 0$$

$$(8') \quad \sqrt{\frac{X_1}{X}} (1 - Y_2) (0,55 + 0,45 n) - 1 = 0.$$

Le equazioni così descritte mostrano che il solo parametro che influenza tutto il fenomeno è il numero di Froude a monte, cosa del resto ampiamente nota.

La via più agevole per la soluzione dei sistemi sopra scritti è quella numerica che può essere percorsa con l'ausilio di elaboratori molto semplici. Un procedimento può essere il seguente: una volta fissato il valore di X , si assegna ad arbitrio un valore ad n (ricordando che $n \leq 1$, dato che $v_2 = v_1$ solo al termine del risalto) e quindi ricavati Y_1 dalla (6') e Y_2 dalla (2'), si verifica se sia soddisfatta la (5'), lavorando per tentativi successivi. Il risultato cui si perviene è la completa ricostruzione del campo di moto, dato che si ottiene per ogni sezione il valore della quota del pelo libero, quelli della corrente al fondo ed in superficie, e lo spessore dello strato limite turbolento nella I regione.

4. RISULTATI OTTENUTI

La soluzione numerica delle equazioni ottenute consente, come detto, la determinazione in ogni sezione della quota del pelo libero e della distribuzione della velocità. La fig. 2 illustra per esempio il campo di moto di un risalto con $F_1 = 3$: è visibile il vortice superiore che si prolunga per una lunghezza pari a circa 5,8 volte la profondità di valle h_2 .

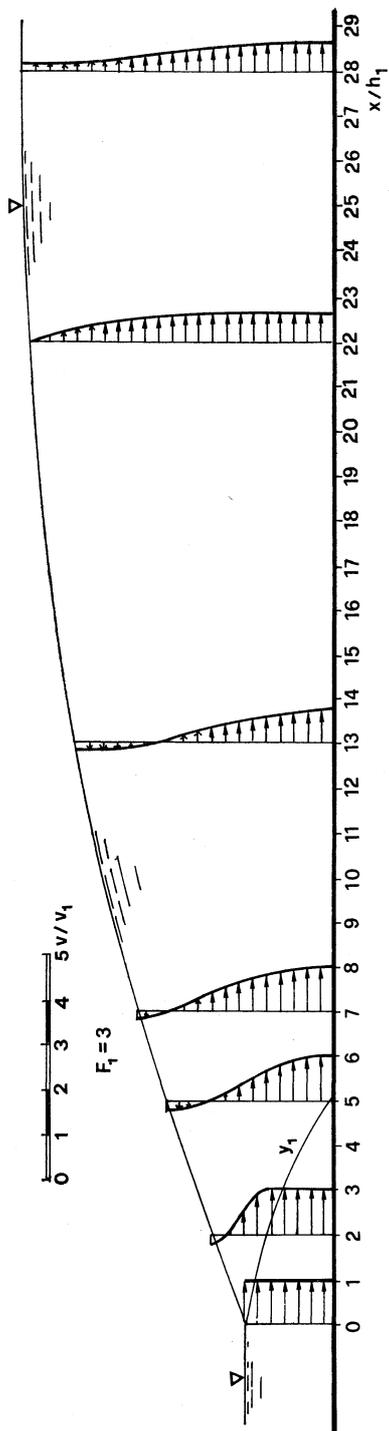


Fig. 2. - Lo sviluppo del risalto con $F_1 = 3$, quale risulta dallo schema proposto.

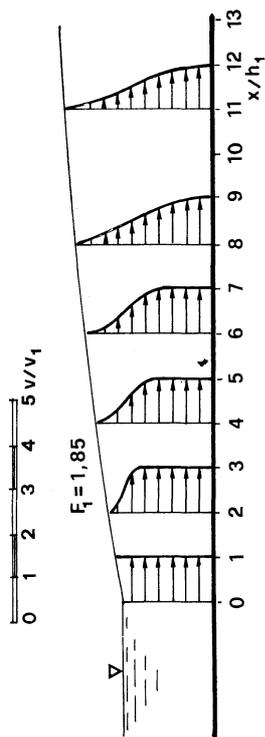


Fig. 3. - Lo sviluppo del risalto con $F_1 = 1,85$ quale risulta dallo schema proposto.

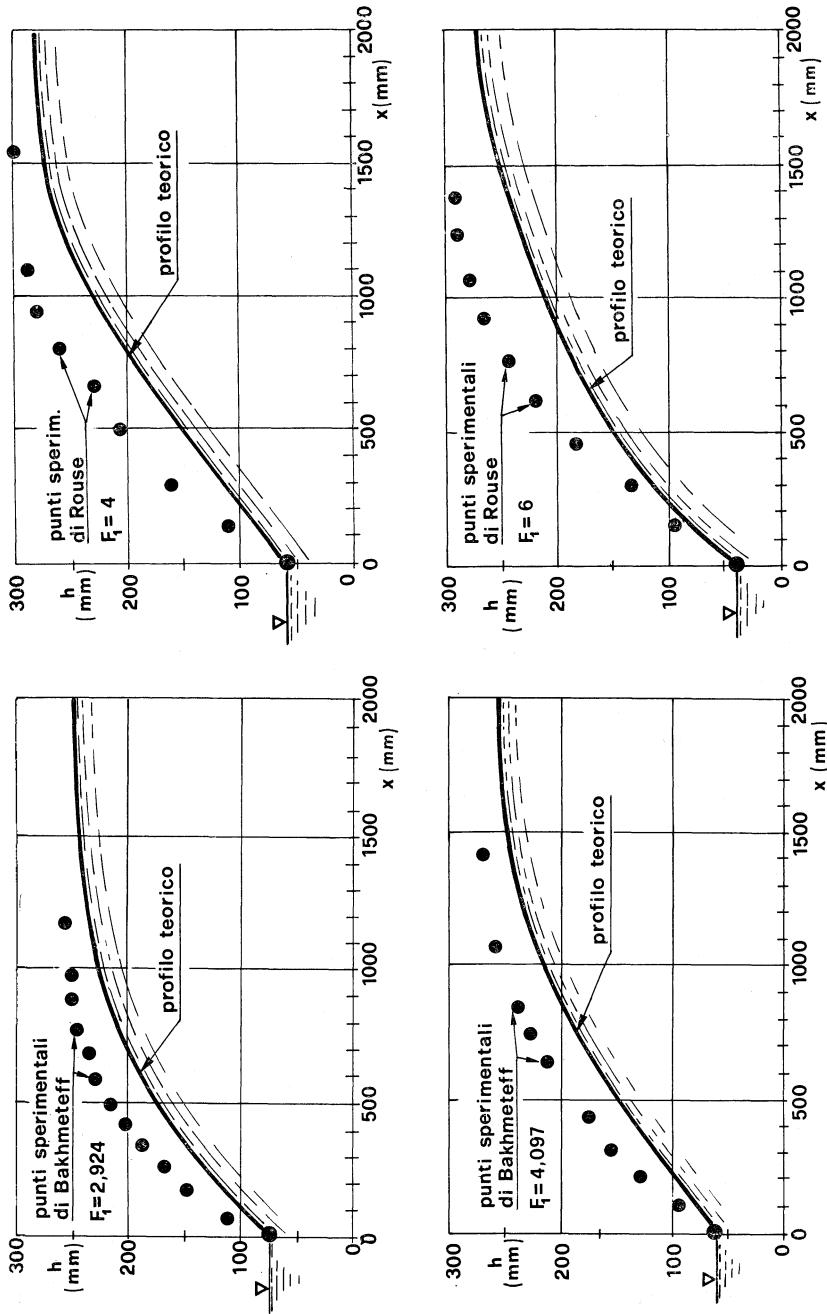


Fig. 4. - Confronto tra alcuni risultati sperimentali reperibili in letteratura e quelli forniti dallo schema proposto.

Un altro risultato che si ottiene è che per bassi numeri di Froude non si ha la formazione del vortice superiore, nel senso che la velocità si mantiene positiva ovunque. La fig. 3 mostra il campo di moto con $F_1 = 1,85$ che appare come un limite dato che per valori di F_1 superiori comincia ad apparire l'inversione di corrente.

Naturalmente lo schema di calcolo abbisogna di un riscontro sperimentale. In letteratura sono reperibili rilievi sperimentali di pelo libero: la fig. 4 mostra il confronto tra alcuni di questi, di due diversi Autori (Bakhmeteff [3] e Rouse [6]), e quanto derivante dal calcolo testè proposto. Si nota che la quota del pelo libero calcolata è costantemente e sensibilmente inferiore a quella sperimentale, ma questo trova forse giustificazione nella già rammentata non messa in conto nel calcolo della miscelazione tra aria e acqua.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BIDONE S. (1826) - *Expériences sur la propagation du remous*. Torino, « Memorie », 30.
- [2] BELANGER J.B. (1828) - *Essai sur la solution numérique de quelques problèmes relatifs au mouvement permanent*. Paris.
- [3] BAKHMETEFF B.A. e MATZKE A.E. (1963) - *The hydraulic jump in terms of dynamic similarity*. « Transactions ASCE », 101.
- [4] RAJARATNAM N. (1965) - *The hydraulic jump as a wall jet*. Proc. ASCE, HY 5, September 1965.
- [5] MILAN G. (1980) - *Caratteristiche cinematiche della zona di transizione di un getto turbolento circolare*. Atti del XVII Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche, Palermo.
- [6] ROUSE M. e SIAO T. RAJARATNAM (1958) - *Turbulence characteristics of the hydraulic jump*. Transaction ASCE, 1958.