
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ALMA D'ANIELLO

**Sull'esistenza di sottogruppi nilpotenti
auto-normalizzanti in alcuni gruppi semplici**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 73 (1982), n.6, p. 203–206.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_73_6_203_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 dicembre 1982

Presiede il Presidente della Classe GIUSEPPE MONTALENTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Teoria dei gruppi. — *Sull'esistenza di sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti in alcuni gruppi semplici.* Nota I di ALMA D'ANIELLO, presentata (*) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — We consider the Suzuki groups and we show that there are no nilpotent self-normalizing subgroups and there are three conjugacy classes of F-projectors, where F is the formation of supersoluble groups.

1. In un suo lavoro del 1961 [3] R. W. Carter ha dimostrato che, in un gruppo finito risolubile, esiste una ed una sola classe di coniugio di sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti (sottogruppi di Carter).

In un lavoro del 1963 [4] poi W. Gaschütz, allo scopo di generalizzare il risultato di Carter, ha introdotto i concetti di formazione e di F-proiettore, dimostrando che, se F è una formazione saturata non vuota, ogni gruppo finito risolubile ha una ed una sola classe di coniugio di F-proiettori, e che, quando F è la formazione dei gruppi nilpotenti, questi coincidono con i sottogruppi di Carter.

Un gruppo finito non risolubile può non contenere alcun sottogruppo nilpotente autonormalizzante, come succede, ad esempio, per A_5 o può contenerne, come succede, ad esempio, per A_n ($n > 5$) [1].

In questa Nota si studia l'esistenza di sottogruppi siffatti nei gruppi di Suzuki, mentre nella successiva Nota II si studia l'analogo problema nei gruppi di Mathieu e nel gruppo di Janko J_1 .

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1982.

Qui si prova che nei gruppi di Suzuki non esistono sottogruppi di Carter (e quindi F-proiettori, con F formazione dei gruppi nilpotenti), ed esistono tre classi di coniugio di F-proiettori, con F formazione dei gruppi supersolubili.

2. Si prova che non esistono sottogruppi di Carter nei gruppi di Suzuki facendo uso dei seguenti risultati.

TEOREMA 1. ([7] Teorema 9). *Sia $G(q)$ il gruppo di Suzuki sul campo $GF(q)$ ($q = 2^{2m+1}$, $m > 0$). $G(q)$ contiene i seguenti sottogruppi:*

H : un gruppo di Frobenius di ordine $q^2(q-1)$;

B_0 : un gruppo diedrale di ordine $2(q-1)$;

A_i : un gruppo ciclico di ordine $q \pm r + 1$ ($i = 1, 2$) dove $r^2 = 2q$;

B_i : il normalizzante $N_G(A_i)$, il cui ordine è $4(q \pm r + 1)$.

Se q è una potenza di s , $G(q)$ contiene un sottogruppo isomorfo a $G(s)$.

Viceversa ogni sottogruppo di $G(q)$ o isomorfo a $G(s)$ per qualche s tale che $s^m = q$, o è coniugato in $G(q)$ a qualche sottogruppo di H o B_i ($i = 1, 2$).

PROPOSIZIONE 1. ([7] Proposizione 1). *Sia H il gruppo di Frobenius del teorema precedente con $H = [Q]K$.*

Allora:

a) K è ciclico di ordine $q-1$;

b) Q è un 2-sottogruppo di Sylow di G ;

c) se $1 \neq x \in Q$, allora $C_G(x) \leq Q$.

Si nota inoltre che K è un sottogruppo di Hall di G . Essendo K ciclico, quindi nilpotente, i sottogruppi di Hall di G di ordine $q-1$ sono coniugati di K . Poichè B_0 è normalizzante di un gruppo di ordine $q-1$, cioè di un coniugato di K , segue che anche il normalizzante di K ha ordine $2(q-1)$.

Nel seguito le lettere H, B_0, A_i, B_i, Q e K avranno lo stesso significato che hanno nel Teorema 1 e nella Proposizione 1.

PROPOSIZIONE 2. *Se G è un gruppo di Suzuki, G non contiene sottogruppi di Carter.*

Dimostrazione. Sia, per assurdo, T un sottogruppo di Carter di G . Distinguiamo due casi:

1°. $|T|$ sia pari.

Sia $T_2 \neq 1$ un 2-sottogruppo di Sylow di T , allora esiste un 2-sottogruppo di Sylow G_2 di G tale che $T_2 \leq G_2$. T è nilpotente, pertanto $T = T_2 \times T_{2'}$. Si ha $T_{2'} \leq C(T_2)$; d'altra parte, per la Proposizione 1, risulta $C(x) \leq G_2$, per ogni $x \in T_2$. È allora $T_{2'} \leq G_2$ ovvero $T_{2'} = 1$. Allora $T = T_2 = G_2$. Ma G_2 è coniugato a Q e quindi non è autonormalizzato.

2°. $|T|$ sia dispari.

Per il Teorema 1 si può verificare, a meno di coniugio, una delle seguenti eventualità:

a) $T \leq H = [Q]K$. Poichè $|T|$ è dispari, deve essere $T \leq \bar{K}$, con $\bar{K}$ coniugato di K e quindi ciclico. T non può essere autonormalizzante essendo $K < N_G(K)$;

b) $T \leq G(s) (s^m = q)$;

c) $T \leq N_G(K)$, con $N_G(K)$ coniugato a B_0 e quindi diedrale. $N_G(K) = [K] \langle x \rangle$ con $x^2 = 1$, pertanto deve essere $T \leq K$. T non può essere autonormalizzato perchè caratteristico in K che è strettamente contenuto nel suo normalizzante;

d) $T \leq B_i = N_G(A_i) = [A_i] \langle a_i \rangle$ con A_i ciclico di ordine dispari ed $a_i^4 = 1$. Poichè $|T|$ è dispari, risulta $T \leq A_i$. T non è autonormalizzato essendo $A_i < N_G(A_i)$.

Il gruppo G pertanto non contiene sottogruppi nilpotenti autonormalizzanti c.v.d.

COROLLARIO. *Sia F la formazione dei gruppi nilpotenti. Non esistono F -proiettori nei gruppi di Suzuki.*

Dimostrazione. È immediata. Infatti, in qualunque gruppo finito (anche non risolubile) gli F -proiettori, quando F è la formazione dei gruppi nilpotenti, sono nilpotenti autonormalizzanti, quindi di Carter.

3. Sia ora F la formazione dei gruppi supersolubili. Dimostriamo la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 3. *Sia $G(q)$ il gruppo di Suzuki sul campo $GF(q)$, $q = 2^{2m+1}$ e $m > 0$. I sottogruppi B_i ($i = 0, 1, 2$) sono F -proiettori. Essi sono, a meno di coniugio, tutti e soli gli F -proiettori di G .*

Dimostrazione. Per le Proposizioni 15 e 16 di [7] si ha, a meno di coniugio, $B_0 = [K] \langle x \rangle$ con $x^2 = 1$, $B_i = [A_i] \langle a_i \rangle$ con $a_i^4 = 1$ ($i = 1, 2$). I B_i ($i = 0, 1, 2$) sono supersolubili perchè estensione di gruppi ciclici mediante gruppi ciclici. Poichè B_i è un sottogruppo massimale di G , è un F -proiettore con tutti i suoi coniugati.

Altri eventuali F -proiettori sono contenuti in H o in un suo coniugato.

Il gruppo di Frobenius $H = [Q]K$ non è supersolubile. Infatti, per la (6.11) di [8] una eventuale serie normale a fattori ciclici di H è del tipo

$$H = K_n Q \geq \dots \geq K_1 Q \geq Q \geq Q' \geq 1$$

con $K_i \leq K$ ($i = 1, \dots, n$). Q' è isomorfo per la (6.8) e la (6.9) di [8] al gruppo additivo del campo $GF(q)$, pertanto è un 2-gruppo abeliano elementare non ciclico.

Se P fosse un F -proiettore contenuto in H , P dovrebbe contenere K o un suo coniugato. Infatti essendo H/Q ciclico, P deve essere supplemento di Q e dall'essere $H = [Q]K$ segue che $|K|$ divide $|P|$ onde, essendo K di Sylow per H , P contiene un coniugato di K .

Pertanto un eventuale F -proiettore contenuto in H dovrebbe essere, a meno di coniugio, del tipo $\overline{Q}K$ con $\overline{Q} \leq Q$. Ma se $\overline{Q}K$ fosse supersolubile dovrebbe contenere un sottogruppo ciclico di ordine 2 normale, onde vi sarebbe in $\overline{Q}$, e in Q , un elemento di periodo 2 normalizzato da K , e ciò è assurdo perché, per la (6.5) di [8], l'unico elemento di Q normalizzato da K è l'unità. Quindi H , e con lui i suoi coniugati, non contiene F -proiettori.

Osserviamo che:

a) se F è la formazione dei gruppi supersolubili, gli F -proiettori nei gruppi di Suzuki non sono coniugati, risulta infatti $B_i \cong B_j$ se $i \neq j$;

b) se P è contenuto in Q , K , A_1 o A_2 , P non è F -proiettore per ogni formazione F contenente i gruppi ciclici poiché $N_G(Q)/Q$, $N_G(K)/K$ e $N_G(A_i)/A_i$ ($i = 1, 2$) sono ciclici;

c) se $P = B_i$, H ($i = 0, 1, 2$), P è F -proiettore per ogni formazione F tale che P appartiene ad F e F non contiene i gruppi semplici.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. C. BELLANI TAMBURINI e L. DI MARTINO (1976) - *I sottogruppi nilpotenti auto-normalizzanti di S_n e di A_n* , « Rend. Sc. Ist. Lomb. », A 110, 235-241.
- [2] M. C. BELLANI TAMBURINI e L. DI MARTINO (1975) - *Sottogruppi nilpotenti auto-normalizzanti in $GL_2(q)$ e $GL_3(q)$* , « Rend. Sc. Ist. Lomb. », A 109, 213-227.
- [3] R. CARTER (1961) - *Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups*, « Math. Z. », 75, 136-139.
- [4] W. GASCHÜTZ (1963) - *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen*, « Math. Z. », 80, 300-305.
- [5] B. HUPPERT (1967) - *Endliche Gruppen I*, Berlin-Heidelberg, New York.
- [6] S. A. SYSKIN (1980) - *Abstract properties of the simple sporadic groups*, « Uspeki Mat. Nauk », 35, (5), 181-212. (Trad. ingl.: « Russian Math. Surv. », 35, (5), 209-246).
- [7] M. SUZUKI (1962) - *On a class of doubly transitive groups*, « Ann. of Math. », 75, (1), 105-145.
- [8] J. TITS (1962) - *Ovoïdes et Groupes de Suzuki*, « Arch. Math. », XIII, 187-198.