Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Diego Pigozzi

Sull'equilibrio termoelastico di un particolare solido incomprimibile

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **70** (1981), n.3, p. 148–153.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1981_8_70_3_148_0>

Meccanica dei continui. — *Sull'equilibrio termoelastico di un particolare solido incomprimibile.* Nota di DIEGO PIGOZZI [(*)], presentata [(**)] dal Socio G. GRIOLI.

SUMMARY. — We consider an incompressible elastic solid which admits a configuration of equilibrium having the shape of a rectangular parallelepiped C^* when external forces are absent. We look for a thermoelastic transformation mapping that configuration onto a cylindrical wedge C.

The problem we consider is analogous to the one where both C^* and C are cylindrical crowns. This case has been considered by T. Manacorda [(1)].

Referring C to a system of cylindrical coordinates r, ϑ and $\mathfrak{z}$, we show that the transformation we look for is compatible in general with a temperature field, T, depending upon r only. On the contrary, a field T depending upon ϑ only or upon $\mathfrak{z}$ only, does not solve our problem unless the constitutive equations of the body satisfy certain conditions that we write explicitly.

1. PREMESSE

Supporrò che il solido nella configurazione di equilibrio spontaneo C^* sia meccanicamente e termicamente isotropo oltre che omogeneo e a temperatura uniforme.

Con riferimento a una terna trirettangola levogira avente gli assi paralleli a tre spigoli del prisma uscenti da un medesimo vertice, siano X, Y, Z le coordinate del generico punto P^* di C^*; si indicheranno inoltre con x, y, z le coordinate rispetto allo stesso riferimento del punto P corrispondente di P^* nella posizione attuale C e con $r, \vartheta, \mathfrak{z}$ le sue coordinate cilindriche legate a quelle cartesiane dalle relazioni $x = r \cos \vartheta$, $y = r \operatorname{sen} \vartheta$, $z = \mathfrak{z}$.

La trasformazione termomeccanica stazionaria che porta il corpo ad assumere la configurazione di equilibrio C a forma di cuneo cilindrico di asse z, sia caratterizzata dalle relazioni

$$\text{(1)} \qquad X = F(r) \quad , \quad Y = G(\vartheta) \quad , \quad Z = H(\mathfrak{z})$$

e da una certa distribuzione di temperatura.

Siano $r_0 \leq r \leq r_1$, $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$, $\mathfrak{z}_0 \leq \mathfrak{z} \leq \mathfrak{z}_1$, le limitazioni che definiscono la regione occupata dal solido deformato.

(*) Seminario Matematico, via Belzoni, 7 - 35100 Padova. Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 marzo 1981.

(1) MANACORDA T.; *Sulla termoelasticità dei solidi incomprimibili*, « Riv. di Matematica Univ. », Parma, (2) *1* (1960).

Le funzioni F , G , H, potranno supporsi soddisfacenti alle relazioni

$$F' > 0 \quad , \quad G' > 0 \quad , \quad H' > 0 \tag{2}$$

(l'apice indica derivazione rispetto alla variabile da cui la funzione dipende).

Nelle coordinate r , ϑ , z siano $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ rispettivamente il tensore metrico fondamentale nella configurazione di riferimento C* e in quella attuale C. Dalle 1) si ha per le componenti covarianti di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{array}{llllll} a_{11} = F'^2 & , \; a_{22} = G'^2 & , \; a_{33} = H'^2 & , \; a_{ij} = 0 & \text{per } i \neq j \\ b_{11} = 1 & , \; b_{22} = r^2 & , \; b_{33} = 1 & , \; b_{ij} = 0 & \text{per } i \neq j . \end{array} \tag{3}$$

Le componenti covarianti dei versori normali (interni) alle superfici che costituiscono il contorno di C sono espresse dalle uguaglianze

$$\begin{array}{llll} \overset{0}{\mu}_1 = 1 & , \; \overset{0}{\mu}_2 = 0 & , \; \overset{0}{\mu}_3 = 0 & \text{sulla superficie } r = r_0 \\ \overset{1}{\mu}_1 = -1 & , \; \overset{1}{\mu}_2 = 0 & , \; \overset{1}{\mu}_3 = 0 & \text{sulla superficie } r = r_1 \\ \overset{0}{\eta}_1 = 0 & , \; \overset{0}{\eta}_2 = r & , \; \overset{0}{\eta}_3 = 0 & \text{sulla superficie } \vartheta = \vartheta_0 \\ \overset{1}{\eta}_1 = 0 & , \; \overset{1}{\eta}_2 = -r & , \; \overset{1}{\eta}_3 = 0 & \text{sulla superficie } \vartheta = \vartheta_1 \\ \overset{0}{\xi}_1 = 0 & , \; \overset{0}{\xi}_2 = 0 & , \; \overset{0}{\xi}_3 = 1 & \text{sulla superficie } z = z_0 \\ \overset{1}{\xi}_1 = 0 & , \; \overset{1}{\xi}_2 = 0 & , \; \overset{1}{\xi}_3 = -1 & \text{sulla superficie } z = z_1 . \end{array} \tag{4}$$

Il determinante iacobiano della trasformazione delle X , Y , Z nelle x , y , z è fornito dalla relazione

$$D = \frac{r}{F' G' H'} . \tag{5}$$

La condizione di incomprimibilità a temperatura costante è pertanto espressa dalla relazione

$$f(T) = \frac{r}{F' G' H'} . \tag{6}$$

Si ammetterà per il flusso termico la legge di Fourier supponendo che esso sia proporzionale al gradiente della temperatura, ipotesi che è compatibile con quella di isotropia.

In condizioni di stazionarietà l'equazione del calore assume allora l'espressione

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r L \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(L \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(L \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \tag{7}$$

ove $L > 0$ è il coefficiente di conducibilità termica che si suppone dipendente dalle a_{rs} oltre che da T.

Siano t^{ij} le componenti contravarianti nelle coordinate r, ϑ, z del tensore degli sforzi $\boldsymbol{t}$, avendo assunto $\boldsymbol{t}\underline{n}$ come la forza specifica esercitata dalla parte del corpo in cui penetra la $\underline{n}$ verso l'altra.

Per l'ipotesi di isotropia meccanica e di incomprimibilità, l'energia libera $\mathcal{T}$ si deve pensare dipendente dagli invarianti primo e secondo $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ del tensore di deformazione oltre che dalla temperatura T.

Nel caso iperelastico le equazioni costitutive sono espresse da

$$
\begin{aligned}
& t^{11} = -\pi + 2\rho F'^2 \left[\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\mathcal{T}_1} + \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\mathcal{T}_2}\left(\frac{G'^2}{r^2} + H'^2\right)\right] \\
& t^{22} = -\frac{\pi}{r^2} + 2\rho\frac{G'^2}{r^4}\left[\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\mathcal{T}_1} + \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\mathcal{T}_2}\left(F'^2 + H'^2\right)\right] \\
& t^{33} = -\pi + 2\rho H'^2\left[\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\mathcal{T}_1} + \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\mathcal{T}_2}\left(F'^2 + \frac{G'^2}{r^2}\right)\right] \\
& t^{ij} = 0 \qquad \text{per} \quad i \neq j
\end{aligned} \tag{8}
$$

qualora si indichi con ρ la densità di massa nella configurazione C con e π uno scalare che rappresenta la reazione vincolare interna dovuta al vincolo di incomprimibilità.

Le equazioni di Cauchy tenuto conto delle $(8)_4$ si presentano nella forma

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial t^{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}t^{11} - rt^{22} = 0, \\
& \frac{\partial t^{22}}{\partial\vartheta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial t^{33}}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

D'ora in avanti si supporrà che la temperatura in C dipenda da una sola delle variabili r, ϑ, z.

2. Caso $T = T(r)$

La (6) implica

$$
F' = \frac{r}{f(T(r))\gamma\chi} \quad , \quad G' = \gamma \quad , \quad H' = \chi \tag{10}
$$

con γ e χ costanti arbitrarie. Il coefficiente L dipenderà dunque dalla sola r dato che a questa condizione soddisfano T e F'^2. L'equazione (7) si riduce pertanto a

$$
L\frac{dT}{dr} = c \tag{11}
$$

con c costante; la (11) tenuto conto di $(10)_1$ e della dipendenza di L da T e dalla deformazione serve per la determinazione di T (r).

Fissati due valori qualsiasi T_0, T_1 si può dimostrare [2] che esiste una sola funzione $T(r)$ soluzione di (11) soddisfacente le

$$T(r_0) = T_0 \quad , \quad T(r_1) = T_1 . \tag{12}$$

Sulla rimanente frontiera di C non c'è flusso di calore. Infatti, tenuto conto del parallelismo del flusso di calore a grad T, dell'indipendenza di T da ϑ, $\mathfrak{z}$ e delle espressioni (4) si deduce

$$\operatorname{grad} T \cdot \underline{\eta}^0 = \operatorname{grad} T \cdot \underline{\eta}^1 = \operatorname{grad} T \cdot \underline{\xi}^0 = \operatorname{grad} T \cdot \underline{\xi}^1 = 0. \tag{13}$$

La conoscenza di $T(r)$ determina $F'(r)$ e quindi la a_{rs} e il tensore $\boldsymbol{t}$ a meno del parametro vincolare π per la cui determinazione sono utili le (9). Le $(9)_{2,3}$ escludono la dipendenza di π e quindi di tutte le t^{ij} da ϑ e da $\mathfrak{z}$.

Posto allora

$$T^{11} = t^{11} + \pi \quad , \quad T^{22} = t^{22} + \frac{\pi}{r^2} \quad , \quad T^{33} = t^{33} + \pi \tag{14}$$

e tenuto conto di $9)_1$ si ottiene

$$\pi(r) = T^{11}(r) - T^{11}(r_0) + \pi_0 + \int_{r_0}^{r} \left(\frac{T^{11}}{\tau} - \tau T^{22} \right) d\tau \tag{15}$$

avendo indicato con π_0 una costante arbitraria.

Indicando con $\underline{\phi} = - t\underline{n}$ la forza specifica che si presenta sul contorno del corpo per mantenerlo nella posizione di equilibrio forzato C, ove $\boldsymbol{n}$ rappresenta la normale al contorno orientata verso l'interno, dalle (4), $(8)_4$ si deduce che $\underline{\phi}$ è sempre normale alle superfici che delimitano il contorno.

Se si assume ad esempio

$$\pi_0 = \pi(r_0) = T^{11}(r_0) - \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{T^{11}}{\tau} \ \tau T^{22} \right) d\tau \tag{16}$$

si ottiene per la componente di $\underline{\phi}$ secondo la normale interna

$$\begin{aligned} &\underline{\phi} \cdot \underline{\mu}^1 = - t^{11}(r_1) = 0 && \text{sulla superficie } r = r_1 \\ &\underline{\phi} \cdot \underline{\mu}^0 = - t^{11}(r_0) = - \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{T^{11}}{\tau} - \tau T^{22} \right) d\tau && \text{sulla superficie } r = r_0 . \end{aligned} \tag{17}$$

La superficie $r = r_1$ si può dunque assumere priva di forze superficiali mentre la superficie $r = r_0$ deve essere sollecitata da una pressione o trazione (a seconda che sia positivo o negativo il secondo membro di $(17)_2$) costante.

(2) Vedi nota 1.

Si ha inoltre

$$\underline{\phi} \cdot \underline{\eta} = -t^{22} r^2 = r\left(\frac{T^{11}}{r} - rT^{22}\right) - \int_r^{r_1} \left(\frac{T^{11}}{\tau} - \tau T^{22}\right) d\tau \tag{18}$$

sulle superfici $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_1$,

$$\underline{\phi} \cdot \underline{\xi} = -t^{33} = T^{11} - T^{33} - \int_r^{r_1} \left(\frac{T^{11}}{\tau} - \tau T^{22}\right) d\tau \tag{19}$$

sulle superfici $z = z_0$, $z = z_1$.

3. Caso in cui è $T = T(z)$; $T = T(\vartheta)$

Si mostrerà che esistono soluzioni solo nei casi eccezionali in cui le equazioni costitutive soddisfano a particolari condizioni. Per brevità si tratterà solo il caso $T = T(z)$ essendo l'altro del tutto analogo.

Se T dipende dalla sola z la (6) comporta

$$\frac{F'}{r} = \varphi \quad , \quad G' = \gamma \quad , \quad H' = \frac{1}{\varphi\gamma f(T(z))} \tag{20}$$

ove φ, γ sono delle costanti.

L'equazione (7) diventa

$$L\left(\varphi^2 r^2 , \frac{1}{\varphi^2 \gamma^2 f^2 (T(z))} , T(z)\right) \frac{dT}{dz} = g(r) \tag{21}$$

con g arbitraria funzione di r. Per la (21) il rapporto g/L deve dipendere dalla sola z; ciò significa che la L deve decomporsi nel prodotto

$$L = g\bar{L} \tag{22}$$

con $\bar{L}$ funzione di T e H'.

Per quei materiali per cui risulti soddisfatta la (22) l'equazione del calore diventa

$$\bar{L} \frac{dT}{dz} = 1 . \tag{23}$$

La dimostrazione dell'esistenza e unicità di una soluzione di (23) ove si supponga $T(z_0) = T_0$, $T(z_1) = T_1$ è analoga a quella richiamata nel n. 2 basta pensare che $\bar{L}$ è ancora positiva.

Il resto del contorno è senza flusso di calore.

Per quanto riguarda l'aspetto tensionale si osservi che la $(9)_2$ esclude la dipendenza di π da ϑ mentre le $(9)_1$, $(9)_3$ forniscono le equazioni

$$
(24) \qquad \begin{aligned}
\frac{\partial \pi}{\partial r} &= \frac{\partial T^{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} T^{11} - r T^{22} \\
\frac{\partial \pi}{\partial z} &= \frac{\partial T^{33}}{\partial z} .
\end{aligned}
$$

Le 24) richiedono la condizione di integrabilità

$$
(25) \qquad \frac{\partial^2 T^{33}}{\partial r \, \partial z} = \frac{\partial^2 T^{11}}{\partial r \, \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{11}}{\partial z} - r \frac{\partial T^{22}}{\partial z}
$$

che si presenta come una condizione costitutiva sulla $\mathscr{T}$.

Si può concludere dunque che trasformazioni termomeccaniche del tipo considerato in questo paragrafo sono compatibili solo per quei materiali per cui le funzioni L e $\mathscr{T}$ soddisfano rispettivamente le (22), (25).