Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Remigio Russo

Sui teoremi di reciprocità dell'elasticità lineare classica in domini non limitati

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **70** (1981), n.2, p. 117–125.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1981_8_70_2_117_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1981.

Fisica matematica. — *Sui teoremi di reciprocità dell'elasticità lineare classica in domini non limitati* (*). Nota di REMIGIO RUSSO, presentata (**) dal Socio G. GRIOLI.

SUMMARY. — We extend the well-known reciprocal theorems of linear elasticity to unbounded domains. The theorems do not require that the elastic body is isotropic and homogeneous.

1. INTRODUZIONE

È nota l'importanza assunta in elasticità lineare classica dai teoremi di reciprocità di Betti e di Graffi [1]. Il primo asserisce che il sistema delle equazioni dell'elastostatica lineare risulta autoaggiunto, mentre il secondo costituisce il naturale corrispettivo elastodinamico del primo.

Tali teoremi vengono solitamente enunciati per regioni limitate e soltanto di recente si è prestata attenzione alla loro generalizzazione ai domini illimitati [1].

Per quanto riguarda il teorema di Betti, tale generalizzazione [1–2] è confinata ai domini esterni e concerne il caso di un materiale elastico omogeneo ed isotropo sottoposto a sollecitazione di volume irrotazionale e solenoidale.

A quanto ci risulta, poi, il risultato più generale sull'estensione del teorema di Graffi a regioni arbitrarie [3] è formulato nell'ipotesi che il mezzo elastico sia omogeneo e la forza esterna di volume agisca su di una sua parte finita, sia, cioè, a supporto compatto. Se la frontiera del corpo è illimitata, si richiede, inoltre, che il prodotto scalare del campo cinetico per la trazione superficiale sia nullo al di fuori di una sua parte finita.

Naturalmente, rivestendo i precedenti teoremi carattere integrale, le generalizzazioni ai domini illimitati possono avvenire in una classe di spostamenti e sollecitazioni per cui gli integrali hanno senso. Ciò comporta, di conseguenza, al contrario del caso limitato, ipotesi che rendano gli integrali significativi. Quest'ultima circostanza si presenta qualora le funzioni in causa siano sommabili ovvero abbiano un opportuno comportamento all'infinito. Ora, mentre la prima ipotesi appare evidentemente essenziale, la seconda riveste carattere artificioso, non essendo peculiare al problema in esame, ma essendo dovuta esclusivamente alle tecniche dimostrative adoperate.

D'altronde, in recenti lavori [4–7], abbiamo prestato attenzione ad alcune questioni poste dalle equazioni dell'elasticità lineare classica in domini non li-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del GNFM del CNR.
(**) Nella seduta del 14 febbraio 1981.

mitati, quali, ad esempio, quelle riguardanti la buona posizione dei problemi esistenziali ad esse associati.

Scopo della presente ricerca è quello di proseguire il discorso avviato con i suriportati lavori. Precisamente ci interesseremo al problema che traspare dalle precedenti righe: la generalizzazione a regioni arbitrarie dei teoremi di Betti e di Graffi per un materiale linearmente elastico non omogeneo ed anisotropo in ipotesi sufficientemente generali sul comportamento all'infinito dello spostamento e delle sollecitazioni.

Il lavoro si articola in tre numeri. Il n. 1 è dedicato ai preliminari necessari alla formulazione dei teoremi. I nn. 2 e 3 rispettivamente ai teoremi di Betti e di Graffi.

2. Preliminari (1)

Sia B un corpo elastico identificato con il dominio D regolare (2) da esso occupato in un'assegnata configurazione di riferimento. Introdotto un riferimento con origine $0 \notin \overline{\mathrm{D}}$, diremo, seguendo [1], spostamento ammissibile per B un campo vettoriale $\underline{u}(\underline{x}) \in \underline{\mathrm{C}}^2(\mathrm{D}) \cap \underline{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{D}})$ (3) tale che $\underline{\mathrm{E}} = \nabla\underline{u} + \nabla\underline{u}^{\mathrm{T}} \in \underline{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{D}})$, moto di B in $[0, \mathrm{T}_0)$ una famiglia ad un parametro di campi di spostamenti parametrizzata in $t \in [0, \mathrm{T}_0)$, moto ammissibile un moto in cui (4) $\underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, \underline{\mathrm{E}}, \dot{\underline{\mathrm{E}}} \in \underline{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{T}_0})$, con $\overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{T}_0} = \overline{\mathrm{D}} \times [0, \mathrm{T}_0)$, $\mathrm{T}_0 > 0$, campo di sforzi ammissibili un campo tensoriale del second'ordine simmetrico $\underline{\mathrm{S}}$ di classe $\underline{\mathrm{C}}^1(\mathrm{D}) \cap \underline{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{D}})$ per cui $\nabla \cdot \underline{\mathrm{S}}$ è continuo in $\overline{\mathrm{D}}$. Le classi di tutti gli spostamenti e moti ammissibili li indicheremo rispettivamente con $\underline{\mathscr{C}}(\mathrm{D})$ e $\underline{\mathscr{M}}(\mathrm{D})$.

Supponiamo assegnati:

i) un campo tensoriale elastico simmetrico $\mathfrak{C} \in \underline{\mathrm{C}}^1(\mathrm{D}) \cap \underline{\mathrm{C}}(\overline{\mathrm{D}})$, ossia un'applicazione lineare dello spazio dei tensori del second'ordine nel sottospazio dei tensori simmetrici del second'ordine;

ii) un campo scalare $\rho(\underline{x})$, (densità del corpo);

iii) un campo di forze di volume $\underline{b}(\underline{x}, t) \in \underline{\mathrm{C}}(\mathrm{D}_{\mathrm{T}_0})$.

Ciò posto, chiameremo la tripla $(\underline{u}, \underline{\mathrm{E}}, \underline{\mathrm{S}})$ stato ammissibile per B, se le sue componenti sono rispettivamente un campo di spostamenti ammissibili, un campo di tensori simmetrici su $\overline{\mathrm{D}}$, un campo di sforzi ammissibili.

(1) Per le notazioni cfr. [1].

(2) Con tale qualifica intenderemo un dominio a cui possa essere applicato il teorema della divergenza.

(3) Se P è una proprietà di un campo tensoriale su D di ordine k, per semplicità formale scriveremo $\underline{\mathrm{P}}(\mathrm{D})$ in luogo di

$$\mathrm{P}^{n^k}(\mathrm{D}) = \{\underline{u} = (u_i), i = , \cdots, n^k : u_i \in \mathrm{P}(\mathrm{D})\},$$

P (D) denotando l'insieme delle funzioni scalari in D verificanti la P.

(4) Il punto sovrapposto indica la derivata rispetto al parametro t.

Naturalmente, affinché $\underline{u}$ sia uno spostamento possibile occorre che vengano soddisfatte le equazioni di campo (differenziali) dell'elasticità. Per questo chiameremo lo stato ammissibile $(\underline{u}, \underline{E}, \underline{S})$ elastico, corrispondente alla forza $b(\underline{x})$, se

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{E} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^{T}) \\ \underline{S} = \mathfrak{C}(\underline{E}) \\ \nabla \cdot \underline{S} + \underline{b} = 0 .\end{array}\right. \tag{2.1}$$

Le precedenti definizioni hanno, ovviamente, un corrispondente elastodinamico. La tripla $p = (\underline{u}, \underline{E}, \underline{S})$ è un processo ammissibile se $\underline{u}$ è un moto ammissibile, $\underline{E}$ un campo di tensori del second'ordine simmetrici in $\overline{D}_{T_0}$, $\underline{S}(\underline{x}, t)$ una famiglia ad un parametro di campi di sforzi ammissibili. Se valgono le $(2.1)_{1,2}$ e

$$\rho \ddot{\underline{u}} = \nabla \cdot \underline{S} + \underline{b} \tag{2.2}$$

p costituirà invece un processo elastico corrispondente alla forza di volume $\underline{b}(\underline{x}, t)$.

Oltre alla forza di volume $\underline{b}$, su B agirà anche una sollecitazione superficiale. La sua forma « naturale » sarà data da

$$\underline{s} = \underline{S} \cdot \underline{n} \tag{2.3}$$

con $\underline{n}$ normale esterna su FD, frontiera di D.

Chiameremo infine processo dinamico una tripla $(\underline{u}, \underline{S}, \underline{b})$ con la proprietà che:

i') $\underline{u}$ è un moto ammissibile;

ii') $\underline{S}$ è un campo di sforzi ammissibili dipendente dal tempo:

iii') $\underline{b}$ è un campo vettoriale continuo in $\overline{D}_{T_0}$;

iv') $\underline{u}$, $\underline{S}$ e $\underline{b}$ verificano l'equazione (2.2).

Le precedenti definizioni possono essere date per classi di funzioni non necessariamente regolari [7].

La coppia $(\underline{b}, \underline{s})$ costituisce la sollecitazione totale agente su B.

Siano adesso $\underline{f}$ ed $\underline{h}$ due funzioni vettoriali definite in D_{T_0} ed ivi continue. La funzione.

$$\underline{f} * \underline{h}(\underline{x}, t) = \int_0^t \underline{f}(\underline{x}, t - s) \cdot \underline{h}(\underline{x}, s)\, ds$$

prende il nome di convoluzione di $\underline{f}$ ed $\underline{h}$.

Terminiamo questo numero avvertendo che il simbolo $(\cdot, \cdot)_D$ denoterà per noi il prodotto scalare in $\underline{L}^2(D)$.

3. Estensione del teorema di Betti (5)

Com'è noto, il teorema di Betti afferma che in un dominio limitato il sistema differenziale dell'elastostatica lineare $(2.1)_{2,3}$ risulta autoaggiunto, ossia che se $(\underline{u}, \underline{E}, \underline{S})$ e $(\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{E}}, \hat{\underline{S}})$ sono due stati elastici rispettivamente associati alle forze $(\underline{b}, \underline{s})$ e $(\hat{\underline{b}}, \hat{\underline{s}})$, allora

$$(3.1) \qquad (\underline{s}, \hat{\underline{u}})_{\mathrm{FD}} + (\underline{b}, \hat{\underline{u}})_{\mathrm{D}} = (\hat{\underline{s}}, \underline{u})_{\mathrm{FD}} + (\hat{\underline{b}}, \underline{u})_{\mathrm{D}} = (\underline{S}, \hat{\underline{E}})_{\mathrm{D}} = (\hat{\underline{S}}, \underline{E})_{\mathrm{D}}.$$

Appare evidente che l'estensione di (3.1) a domini arbitrari è immediata sotto opportune ipotesi di convergenza all'infinito per lo stato elastico [1]. Sono appunto tali ipotesi che noi ci proponiamo di indebolire in domini che non siano necessariamente esterni.

Sia $g(r)$, $r = |\underline{x} - 0|$, $\underline{x} \in \mathrm{R}^n$, una funzione regolare in D [8], $\underline{S}$ un campo di sforzi ammissibili, $(\underline{b}, \underline{s})$ la sollecitazione totale agente su B ed $\underline{u} \in \mathscr{C}(\mathrm{D})$. Supponiamo che $\underline{S}$ e $\underline{b}$ soddisfino alla $(2.1)_3$. Moltiplicando scalarmente la $(2.1)_3$ per $g\underline{u}$ e integrando su $\mathrm{D_R}$, intersezione di D con la sfera di raggio R centrata in 0, $\mathrm{S_R}$, abbiamo, previa applicazione del teorema della divergenza,

$$(3.2) \qquad (g\underline{b}, \underline{u})_{\mathrm{D_R}} + (g\underline{s}, \underline{u})_{\mathrm{B_R}} = (g\underline{S}, \underline{u})_{\mathrm{D_R}} + (\underline{S}, \underline{u} \otimes \nabla g)_{\mathrm{D_R}}$$

dove $\mathrm{B_R} = (\mathrm{FD} \cap \mathrm{S_R}) \cup (\mathrm{FS_R} \cap \mathrm{D})$.

Supposto di aver scelto, come è sempre possibile, g in maniera che $(g\underline{s}, \underline{u})_{\mathrm{FS_R} \cap \mathrm{D}} = o(1)$ per $\mathrm{R} \to \infty$ (6) e gli integrali intervenenti in (3.2) siano finiti in D e su FD, la (3.2) da per $\mathrm{R} \to \infty$

$$(3.3) \qquad (g\underline{b}, \underline{u})_{\mathrm{D}} + (g\underline{s}, \underline{u})_{\mathrm{FD}} = (g\underline{S}, \nabla\underline{u})_{\mathrm{D}} + (\underline{S}, \underline{u} \otimes \nabla g)_{\mathrm{D}}$$

che può in qualche modo riguardarsi come l'equivalente « pesato » [7] del teorema del lavoro e dell'energia [1]. Scelta

$$(3.4) \qquad g(r) = e^{-(e+r)^{\alpha}}, \qquad \alpha > 0,$$

si ha

$$(3.5) \qquad (g\underline{b}, \underline{u})_{\mathrm{D}} + (g\underline{s}, \underline{u})_{\mathrm{FD}} - (g\underline{S}, \nabla\underline{u})_{\mathrm{D}} = ((e+r)^{\alpha-1} \alpha g\underline{S}, \underline{u} \otimes \underline{e}_r)_{\mathrm{D}}$$

con $\underline{e}_r = \text{vers.}\, \nabla g$.

Adesso, se

$$(3.6) \qquad \underline{S} \cdot \underline{u} \otimes \underline{e}_r = 0\left((e+r)^{1-n} (\log (e+r)^{-1-\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0$$

(5) In questo e nel numero successivo è seguita l'impostazione di [1].

(6) I simboli $\underline{u} = 0(f(r))$ e $\underline{u} = o(1)$ stanno a significare, rispettivamente, che esiste una terna $(f(r), \mathrm{M}, \bar{r})$ di quantità positive tale che $|\underline{u}| \le \mathrm{M}f(r)$ e che $\lim_{r \to \infty} \underline{u} = 0$.

allora

$$\lim_{\alpha\to 0} |((e+r)^{\alpha-1}\alpha g\underline{S}, \underline{u}\otimes\underline{e}_r)_D| \leq \lim_{\alpha\to 0}((e+r)^{-1}\alpha(\log(e+r))^{-1-\varepsilon}, dr)_D = 0.$$

Facendo quindi tendere nella (3.5) $\alpha \to 0$, otteniamo

$$\lim_{\alpha\to 0}(g\underline{b}, \underline{u})_D + (g\underline{s}, \underline{u})_{FD} = \lim_{\alpha\to 0}(g\underline{S}, \nabla\underline{u})_D. \tag{3.7}$$

Una immediata conseguenza della (3.7) è la sommabilità del prodotto $\underline{S}\cdot\nabla\underline{u}$ in D nell'ipotesi che $\underline{b}\cdot\underline{u}$ e $\underline{s}\cdot\underline{u}$ siano entrambi integrabili in D e su FD rispettivamente e che il lavoro elementare compiuto dallo sforzo a causa dello spostamento $\underline{u}$, $\underline{S}\cdot\nabla\underline{u}$, sia non negativo. Ciò equivale a richiedere che la forma bilineare determinata da $\mathfrak{C}$ sia semidefinita positiva nello insieme degli spostamenti ammissibili soggetti alla (3.6). Infatti essendo

$$(e^{-(e+r)}\underline{S}, \nabla\underline{u})_{D_R} \leq (g\underline{S}, \nabla\underline{u})_D \Rightarrow (\underline{S}, \nabla\underline{u})_{D_R} \leq e^{(e+R)^\alpha}(g\underline{S}, \nabla\underline{u})_D$$

se $\underline{S}\cdot\nabla\underline{u} \notin \underline{L}^1(D)$, avremmo l'assurdo $\lim_{\alpha\to 0}(g\underline{S}, \nabla\underline{u})_D = +\infty$.

Dalla (3.7) e dal teorema della convergenza dominata di Lebesgue otteniamo il

Teorema 2.1 – *Siano* $\underline{S}$ *un campo di sforzi ammissibili verificante* $(2.1)_3$, $(\underline{b}, \underline{s})$ *la sollecitazione totale agente su* B, $\underline{u}$ *uno spostamento ammissibile. Se* $\underline{S}\cdot\nabla\underline{u} \geq 0$, *vale la* (3.6) *e il lavoro compiuto dalla sollecitazione totale* $(\underline{b}, \underline{s})$ *per lo spostamento* $\underline{u}$ *è finito, allora sussiste la*

$$(\underline{b}, \underline{u})_D + (\underline{s}, \underline{u})_{FD} = (\underline{S}, \nabla\underline{u})_D. \tag{3.8}$$

Osserviamo che se alla (3.6) sostituiamo l'ipotesi

$$(e+r)^{-1}\underline{S}\cdot\underline{u}\otimes\underline{e}_r \in \underline{L}^1(D) \tag{3.9}$$

si ha

$$|((e+r)^{\alpha-1}g\underline{S}, \underline{u}\otimes\underline{e}_r)_D| \leq ((e+r)^{-1}|\underline{S}, \underline{u}\otimes\underline{e}_r|)_D.$$

Sussiste, dunque, ancora il Teorema (2.1).

Ora, siano $(\underline{u}, \underline{E}, \underline{S})$, $(\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{E}}, \hat{\underline{S}})$ due stati elastici, rispettivamente associati alle sollecitazioni $(\underline{b}, \underline{s})$ e $(\hat{\underline{b}}, \hat{\underline{s}})$. Nelle ipotesi del Teorema (2.1) abbiamo

$$\begin{cases} (\underline{b}, \hat{\underline{u}})_D + (\underline{s}, \hat{\underline{u}})_{FD} = (\underline{S}, \nabla\hat{\underline{u}})_D \\ (\hat{\underline{b}}, \underline{u})_D + (\hat{\underline{s}}, \underline{u})_{FD} = (\hat{\underline{S}}, \nabla\underline{u})_D. \end{cases} \tag{3.10}$$

Dalla $(2.1)_2$, nell'ipotesi di simmetria « forte » per $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^T \Longleftrightarrow \mathfrak{C}[\underline{A}]\cdot\underline{B} = \mathfrak{C}[\underline{B}]\cdot\underline{A} \tag{3.11}$$

$\forall \underline{A}, \underline{B}$ tensori (simmetrici) del second'ordine, segue la relazione

$$(\underline{S}, \nabla \hat{\underline{u}})_D = (\mathfrak{C}[\nabla \underline{u}], \nabla \hat{\underline{u}})_D = (\mathfrak{C}[\nabla \hat{\underline{u}}], \nabla \underline{u})_D = (\hat{\underline{S}}, \nabla \underline{u})_D .$$

Possiamo enunciare quindi il

TEOREMA 2.2 (generalizzazione del teorema di Betti) – *Siano* $(\underline{u}, \underline{E}, \underline{S})$ *e* $(\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{E}}, \hat{\underline{S}})$ *due stati elastici associati rispettivamente alle sollecitazioni* $(\underline{b}, \underline{s})$ *e* $(\hat{\underline{b}}, \hat{\underline{s}})$. *Se il lavoro eseguito da* $(\underline{b}, \underline{s})$ *per lo spostamento* $\hat{\underline{u}}$ *e quello eseguito da* $(\hat{\underline{b}}, \hat{\underline{s}})$ *per lo spostamento* $\underline{u}$ *sono finiti e, inoltre,* $\underline{S} \cdot \nabla \hat{\underline{u}}$, $\hat{\underline{S}} \cdot \nabla \underline{u} \geq 0$, *valgono la* (3.11) *e la* (3.6), *ovvero la* (3.9), *allora*

$$(\underline{b}, \hat{\underline{u}})_D + (\underline{s}, \hat{\underline{u}})_{FD} = (\hat{\underline{b}}, \underline{u})_D + (\hat{\underline{s}}, \underline{u})_{FD} .$$

L'ipotesi che il lavoro compiuto dallo sforzo in conseguenza dello spostamento sia non negativo può essere evidentemente sostituito dalla richiesta che lo stesso sia sommabile in D.

4. Generalizzazione del teorema di Graffi

Nel presente numero ci interesseremo ad una generalizzazione del teorema di Graffi in qualche modo analoga a quella del teorema di Betti eseguita nel numero precedente. Naturalmente, trattandosi di un problema elastodinamico, tutte le funzioni quivi intervenenti vanno riguardate come dipendenti dal tempo.

Assegniamo due funzioni $\underline{u}_0(\underline{x})$ e $\underline{v}_0(\underline{x})$ continue in $\overline{D}$, assumenti l'ufficio di condizioni iniziali, e, seguendo [1], indichiamo con $i(t)$ l'identità in $[0, T_0)$ e con $\underline{f}(x, t)$ la funzione vettoriale in D_{T_0}

$$\underline{f}(\underline{x}, t) = i * \underline{b}(\underline{x}, t) + \rho(\underline{x}) \{\underline{u}_0 + t\underline{v}_0\}$$

detta pseudo forza di volume agente su B.

Sia $(\underline{u}, \underline{S}, \underline{b})$ un processo dinamico. In [1] è provato che esso è consistente con le condizioni iniziali

$$\underline{u}(\underline{x}, 0) = \underline{u}_0(\underline{x}) \quad , \quad \dot{\underline{u}}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0(\underline{x})$$

se e solo se

$$i * \nabla \cdot \underline{S} + \underline{f} = \rho \underline{u} \tag{4.1}$$

LEMMA 4.1 – *Sia* $\underline{S}$ *un campo di sforzi ammissibili,* $\underline{w} \in \underline{\mathcal{M}}(D)$ *e* $g(r)$ *una funzione soddisfacente alle richieste formulate al n. 3.*

Vale la relazione

$$(g, \underline{s} * \underline{w})_{FD} = (g, \underline{w} * \nabla \cdot \underline{S})_D + (g, \underline{S} * \nabla \underline{w})_D + (1, \underline{S} * \underline{w} \otimes \nabla g)_D . \tag{4.2}$$

Infatti, applicando il teorema della divergenza, dopo aver seguito il metodo del numero precedente, si ha

$$(g\,,\underline{w}*\nabla\cdot\underline{\mathrm{S}})_{\mathrm{D}}=\int_0^t(g\nabla\cdot\underline{\mathrm{S}}(\underline{x}\,,t-s)\,,\underline{w}(\underline{x}\,,s))_{\mathrm{D}}\,ds=$$

$$=\int_0^t(\nabla\cdot(g\underline{\mathrm{S}}(\underline{x}\,,t-s)\cdot\underline{w}(\underline{x}\,,s)\,,1)_{\mathrm{D}}\,ds-\int_0^t(g\mathrm{S}(\underline{x}\,,t-s)\,,$$

$$\nabla\underline{w}(\underline{x}\,,s))_{\mathrm{D}}\,ds-\int_0^t(\underline{\mathrm{S}}(\underline{x}\,,t-s)\,,\underline{w}(\underline{x}\,,s)\otimes\nabla g)_{\mathrm{D}}\,ds$$

da cui la (4.2).

Evidentemente se nell'intervallo temporale $[0\,,\mathrm{T}_0)$ vale uniformemente la (3.6) ovvero

$$(e+r)^{-1}\,\underline{\mathrm{S}}\cdot\underline{u}\otimes\underline{e}_r\in\mathrm{L}^1(0\,,\mathrm{T}_0\,;\mathrm{L}^1(\mathrm{D}))\,,\tag{4.3}$$

l'ultimo termine in (4.2) tende a zero per $\alpha\to 0$. Sussiste dunque il

TEOREMA 4.1 – *Sia* $(\underline{u}\,,\underline{\mathrm{S}}\,,\underline{b})$ *un processo dinamico* $w\in\mathcal{M}(\mathrm{D})$ *e* $\underline{f}$ *la pseudoforza di volume agente su* B. *Se vale la* (3.6) *uniformente in* $[0\,,\mathrm{T}_0)$ *ovvero la* (4.3) *e, inoltre, il lavoro compiuto da* $\underline{f}$ *ed* $\underline{s}$ *in corrispondenza a* $\underline{w}$ *è finito, quello compiuto da* $\underline{\mathrm{S}}$ *è non negativo e* $\rho\underline{u}(\underline{x}\,,t-s)\cdot\underline{w}(\underline{x}\,,s)\in\mathrm{L}^1(\mathrm{D})$ $\forall t\,,s:s\,,t-s\in[0\,,\mathrm{T}_0)$, *allora*

$$i*(1\,,\underline{s}*\underline{w})_{\mathrm{FD}}+(1\,,\underline{f}*\underline{w})_{\mathrm{D}}=i*(\underline{\mathrm{S}}*\nabla\underline{w}\,,1)_{\mathrm{D}}+(\rho\underline{u}*\underline{w}\,,1)_{\mathrm{D}}\,.\tag{4.5}$$

In particolare se $\underline{w}=\underline{u}$

$$i*(1\,,\underline{s}*\underline{w})_{\mathrm{FD}}+(1\,,\underline{f}*\underline{w})_{\mathrm{D}}=i*(\underline{\mathrm{S}}*\nabla\underline{w}\,,1)_{\mathrm{D}}+(\rho\underline{w}*\underline{w}\,,1)_{\mathrm{D}}\,.$$

Per le (4.1)-(4.2)

$$i*(g\,,\underline{s}*\underline{w})_{\mathrm{FD}}=(g\,,(i*\nabla\cdot\underline{\mathrm{S}})*\underline{w})_{\mathrm{D}}+i*(g\,,\underline{\mathrm{S}}*\nabla\underline{w})_{\mathrm{D}}+$$

$$+\,i*(\underline{\mathrm{S}}*\underline{w}\otimes\nabla g\,,1)_{\mathrm{D}}=(g\,,(\rho\underline{u}-\underline{f})*\underline{w})_{\mathrm{D}}+$$

$$+\,i*(g\,,\underline{\mathrm{S}}*\nabla\underline{w})_{\mathrm{D}}+i*(\underline{\mathrm{S}}*\underline{w}\otimes\nabla g\,,1)_{\mathrm{D}}\,.$$

Scelta come « peso » la (3.4), segue immediatamente l'asserto tenendo presenti le ipotesi e il procedimento seguito al n. 3.

Il Teorema 4.1 può essere interpretato come l'equivalente elastodinamico del Teorema 2.

Adesso, se $(\underline{u}\,,\underline{\mathrm{S}}\,,\underline{b})$ e $(\hat{\underline{u}}\,,\hat{\underline{\mathrm{S}}}\,,\hat{\underline{b}})$ sono due processi dinamici verificanti le ipotesi del Teorema 4.1, essendo $(\rho\,,\underline{u}*\hat{\underline{u}})_{\mathrm{D}}=(\rho\,,\hat{\underline{u}}*\underline{u})_{\mathrm{D}}$, dalla (4.5) segue immediatamente la relazione

$$(4.6) \qquad i*(1\,,\underline{s}*\hat{\underline{u}})_{FD} + (1\,,\underline{f}*\hat{\underline{u}})_D - i*(1\,,\underline{S}*\hat{\underline{E}})_D = $$
$$= i*(1\,,\hat{\underline{s}}*\underline{u})_{FD} + (1\,,\hat{\underline{f}}*\underline{u})_D - i*(1\,,\hat{\underline{S}}*\underline{E})_D$$

dove $\hat{E}$ e E sono le misure delle deformazioni corrispondenti rispettivamente a $\hat{\underline{u}}$ e $\underline{u}$.

Derivando la (4.6) due volte rispetto al tempo e tenendo presente che [1]

$$(i*\underline{h}\,(t))^{\cdot\cdot} = \underline{h}$$
$$(\underline{f}*\hat{\underline{u}})^{\cdot\cdot} = \underline{b}*\hat{\underline{u}} + (\underline{u}_0\cdot\dot{\hat{\underline{u}}} + \underline{v}_0\cdot\hat{\underline{u}})$$

abbiamo

$$(1\,,\underline{s}*\hat{\underline{u}})_{FD} + (1\,,\underline{b}*\hat{\underline{u}})_D - i*(1\,,\underline{S}*\hat{\underline{E}})_D + (\rho\,,\underline{u}_0\cdot\dot{\hat{\underline{u}}} + \underline{v}_0\cdot\hat{\underline{u}})_D =$$
$$= (1\,,\hat{\underline{s}}*\underline{u})_{FD} + (1\,,\hat{\underline{b}}*\underline{u})_D - i*(1\,,\hat{\underline{S}}*\underline{E})_D + (\rho\,,\hat{\underline{u}}_0\cdot\dot{\underline{u}} + \hat{\underline{v}}_0\cdot\underline{u})_D\,.$$

Le due precedenti relazioni, e la (3.11), osservando che $\underline{S}*\hat{\underline{E}} = \hat{\underline{S}}*\underline{E}$ [1], forniscono il

TEOREMA 4.2 – (generalizzazione del teorema di Graffi). *Siano* $(\underline{u}\,,\underline{E}\,,\underline{S})$ *e* $(\hat{\underline{u}}\,,\hat{\underline{E}}\,,\hat{\underline{S}})$ *due processi elastici corrispondenti alle forze* $(\underline{b}\,,\underline{s})$ *e* $(\hat{\underline{b}}\,,\hat{\underline{s}})$, $(\underline{u}_0\,,\underline{v}_0)\,,(\hat{\underline{u}}_0\,,\hat{\underline{v}}_0)$ *e* $\underline{f}\,,\hat{\underline{f}}$, *rispettivamente, i dati iniziali e il sistema delle pseudo forze. Se valgono la* (3.11) *e la* (3.6) *uniformemente in* $[0\,,T_0)$, *ovvero la* (4.3), *il lavoro elementare compiuto dagli sforzi* $\underline{S}$ *e* $\hat{\underline{S}}$ *è non negativo, allora sussistono le relazioni*

$$(4.4) \quad \begin{cases} i*(1\,,\underline{s}*\hat{\underline{u}})_{FD} + (1\,,\underline{f}*\hat{\underline{u}})_D = i*(1\,,\hat{\underline{s}}*\underline{u})_{FD} + (1\,,\hat{\underline{f}}*\underline{u})_D \\ (1\,,\underline{s}*\hat{\underline{u}})_{FD} + (1\,,\underline{b}*\hat{\underline{u}})_D + (\rho\,,\underline{u}_0\cdot\dot{\hat{\underline{u}}} + \underline{v}_0\cdot\hat{\underline{u}})_D = \\ (1\,,\hat{\underline{s}}*\underline{u})_{FD} + (1\,,\hat{\underline{b}}*\underline{u})_D + (\rho\,,\hat{\underline{u}}_0\cdot\dot{\underline{u}} + \hat{\underline{v}}_0\cdot\underline{u})_D\,. \end{cases}$$

Evidentemente per i Teoremi 3.1–3.2–4.2 continuano a valere tutte le osservazioni formulate in [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] M. E. GURTIN (1971) – *The linear theory of elasticity*, « Handbuch der Physik », vol. VIa/2, Springer–Verlag.

[2] M. E. GURTIN e STERNBERG E. (1961) – *Theorems in linear elastostatics for exterior domains*, « Arch. Rational Mech. Anal. », *8*.

[3] L. T. WHEELER (1970) – *Some results in the linear dynamical theory of anisotropic elastic solids*, « Q. Appl. Math. », *28*.

[4] R. RUSSO (1980) – *Sulla disuguaglianza di Korn in domini non limitati. Applicazione all'elastostatica lineare classica*, « Atti V Congresso dell'AIMETA », Palermo 23/25 ottobre.
[5] R. RUSSO – *Sulla disuguaglianza di Korn in domini non limitati e sul primo problema al contorno dell'elastostatica lineare classica*, in corso di stampa su « Ric. di Mat. ».
[6] R. RUSSO (1980) – *Alcuni teoremi di buona posizione per il problema del moto in elasticità lineare classica in regioni arbitrarie*, « Atti V Congresso dell'AIMETA », Palermo 23/25 ottobre.
[7] R. RUSSO – *Su alcune questioni connesse alle equazioni dell'elasticità lineare classica* », in corso di redazione.
[8] S. RIONERO e G. P. GALDI (1979) – *The weight function approach to uniqueness of viscous flows in unbounded domains*, « Arch. Rational Mech. Anal. », *69*.