Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giambattista Scarpi

Sull'evoluzione del profilo di velocità in moto laminare a bassi numeri di Reynolds

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **70** (1981), n.2, p. 109–116.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1981_8_70_2_109_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1981.

Meccanica dei fluidi. — *Sull'evoluzione del profilo di velocità in moto laminare a bassi numeri di Reynolds.* Nota di GIAMBATTISTA SCARPI, presentata (*) dal Corrisp. E. MARCHI.

SUMMARY. — The development of velocity distribution in plane laminar flow is examined, neglecting inertial terms in respect to viscous ones. A solution is given, which satisfies all boundary conditions.

Scelto un sistema cartesiano ortogonale x, y, z, consideriamo un moto laminare piano e permanente di liquido viscoso, incomprimibile, che avvenga nello strato $-L \leq y \leq L$, normalmente all'asse z. Dette u e v le componenti secondo x e y del vettore velocità, è possibile definire una funzione di corrente ψ tale che sia

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \, ;$$

la ψ deve allora verificare l'equazione

$$\nabla^4 \psi + \frac{1}{\nu} \frac{\partial (\psi , \nabla^2 \psi)}{\partial (x , y)} = 0$$

ove ν è la viscosità cinematica del fluido.

Se supponiamo trascurabili i termini di inerzia rispetto a quelli dovuti alla viscosità del fluido (cioè se è piccolo il numero di Reynolds) l'equazione si riduce alla

$$\nabla^4 \psi = 0 \, . \tag{1}$$

La (1) va risolta assegnando opportune condizioni al contorno.

In regime permanente, quando lungo l'asse x sia applicato un gradiente costante di carico piezometrico, le componenti u e v tendono ad assumere asintoticamente (in x) il valore

$$u = \frac{gi}{2\nu} (L^2 - y^2) \quad , \quad v = 0 \, ,$$

ove g indica l'accelerazione di gravità, i la pendenza motrice, per cui, asintoticamente e a meno di termini inessenziali, ψ assume il valore

$$\psi = \psi_\infty = \frac{gi}{2\nu} \left(L^2 - \frac{y^2}{3} \right) y \, .$$

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1981.

Supponiamo ora che in $x = 0$ sia assegnato un andamento di u e v diverso da quello di regime asintotico, cioè che sia genericamente $u = u_0(0, y)$, $v = v_0(0, y)$; si vuol esaminare come evolvano al crescere di x le funzioni u e v, cioè come venga raggiunto il regime asintotico: è quindi un problema di « imbocco »; tali problemi, considerati già da Boussinesq [1], [2], sono stati trattati, nel caso piano o nel tubo circolare, con il metodo delle perturbazioni, o ricorrendo alla teoria dello strato limite (si veda ad esempio [3], [4], [5], [6]).

Dobbiamo dunque trovare una funzione $\psi(x, y)$ tale che sia

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad \text{in} \quad x \geq 0 \quad , \quad |y| \leq L$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = u_0(y) \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -v_0(y) \quad \text{in} \quad x = 0 \, , |y| \leq L$$

e inoltre, trattandosi di liquido viscoso, che quindi aderisce alle pareti:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad \text{in} \quad x \geq 0 \, , |y| = L \, .$$

Per semplicità rendiamo adimensionale il problema, ponendo

$$X = \frac{x}{L} \quad , \quad Y = \frac{y}{L} \quad , \quad U = \frac{u}{\sqrt{2gL}} \quad , \quad V = \frac{v}{\sqrt{2gL}} \quad ;$$

chiamando Ψ la funzione di corrente nelle coordinate X, Y, si ponga $\Psi = \dfrac{\psi}{L\sqrt{2gL}}$ e quindi $U = \dfrac{\partial\Psi}{\partial Y}$, $V = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial X}$.

Si deve allora trovare una $\Psi(X, Y)$ tale che sia

$$\nabla^4 \Psi = 0 \quad \text{in} \quad X \geq 0 \quad |Y| = 1 \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial Y} = U_0(Y) \quad , \quad \frac{\partial\Psi}{\partial X} = -V_0(Y) \quad \text{in } X = 0 \, , |Y| \leq 1 \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial X} = \frac{\partial\Psi}{\partial Y} = 0 \quad \text{in} \quad X \geq 0 \ |Y| = 1 \, ; \tag{4}$$

inoltre per $X \to \infty$ dovrà risultare

$$\Psi = \Psi_\infty = \frac{iL\sqrt{2gL}}{4\nu} Y \left(1 - \frac{Y^2}{3}\right) = CY\left(1 - \frac{Y^2}{3}\right). \tag{5}$$

Considero la funzione seguente:

$$\Psi_F(X, Y) = \sum_n \psi_n(X) \sin n\pi Y + \sum_n \chi_n(X) \cos n\pi Y + \Psi_\infty \, . \tag{6}$$

Se $\Psi_F(X, Y)$ deve verificare la (2) e la (5), si trova per ψ_n e χ_n l'espressione:

$$\psi_n = a_n e^{-n\pi X} + b_n X e^{-n\pi X} \tag{7}$$

$$\chi_n = A_n e^{-n\pi X} + B_n X e^{-n\pi X} \, . \tag{8}$$

Risulta allora, assumendo Ψ_F come funzione di corrente:

$$(9)\qquad U_F(X, Y) = \frac{\partial \Psi_F}{\partial Y} = \sum_n n\pi (a_n + b_n X) e^{-n\pi X} \cos n\pi Y -$$

$$- \sum_n n\,\pi (A_n + B_n X) e^{-n\pi X} \sin n\pi Y + U_\infty$$

essendo $U_\infty = \dfrac{\partial \Psi_\infty}{\partial Y} = C(1 - Y^2)$,

e

$$(10)\qquad V_F(X, Y) = - \frac{\partial \Psi_F}{\partial X} = - \sum_n (- n\pi a_n + b_n - n\pi b_n X) e^{-n\pi X} \sin n\pi Y -$$

$$- \sum_n (- n\pi A_n + B_n - n\pi B_n X) e^{-n\pi X} \cos n\pi Y,$$

per cui le (3) forniscono

$$(11)\qquad U_F(0, Y) = \sum_n n\pi (a_n \cos n\pi Y - A_n \sin n\pi Y) + U_\infty = U_0(Y)$$

$$(12)\qquad V_F(0, Y) = - \sum_n (- n\pi a_n + b_n) \sin n\pi Y + (- n\pi A_n + B_n) \cos n\pi Y =$$

$$= V_0(Y).$$

Risulta, in $Y = \pm 1$

$$(13)\qquad U_F(X, \pm 1) = \sum_n n\pi (a_n + b_n X) e^{-n\pi X} (-1)^n = \Phi(X)$$

$$(14)\qquad V_F(X, \pm 1) = - \sum_n (- n\pi A_n + B_n - n\pi B_n X) e^{-n\pi X} (-1)^n = \chi(X).$$

Osserviamo che facendo variare n da 1 a ∞ (considerando quindi serie di Fourier) le (11) e (12) permetterebbero il calcolo dei coefficienti a_n, b_n, A_n, B_n; la condizione (4) impone però che sia $\Phi(X) = 0$, $\chi(X) = 0$: ciò non è possibile che sia vero per ogni X, a meno che gli a_n, b_n, A_n, B_n siano tutti nulli; ma questo contrasterebbe con la (11) e la (12).

La funzione Ψ_F non ci permette quindi di verificare tutte le condizioni. Data la linearità del problema, possiamo pensare di sommare a Ψ_F altre funzioni « correttive », in modo da verificare sia la (2), sia la condizione sulle pareti.

Considero ora l'intera striscia $|Y| \leq 1$, $-\infty < X < \infty$; la funzione

$$\Psi_B = \begin{cases} \Psi_F(X, Y) & \text{in } X \geq 0 \\ \Psi_F(-X, Y) & \text{in } X \leq 0 \end{cases}$$

è l'estensione pari in X della Ψ_F; ad essa corrispondono una estensione pari in X di U e dispari di V, e analogamente per Φ e χ: indichiamo tali estensioni con l'indice B.

Prendiamo ora la (2), e ne eseguiamo la trasformata di Laplace bilatera rispetto a X; posto

$$\mathscr{L}_{\mathrm{IIX}}[\Psi(\mathrm{X},\mathrm{Y})]=\overline{\Psi}(s,\mathrm{Y})=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\mathrm{X}}\,\Psi(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,d\mathrm{X},$$

si trova che una soluzione dell'equazione trasformata di (2)

$$\mathscr{L}_{\mathrm{IIX}}[\nabla^4\Psi]=s^4\,\overline{\Psi}+2s\,\frac{2\,\partial^2\overline{\Psi}}{\partial\mathrm{Y}^2}+\frac{\partial^4\overline{\Psi}}{\partial\mathrm{Y}^4}=0$$

è, indicando con A, B, C, D delle funzioni di s:

$$\overline{\Psi}_{\mathrm{L}}=\mathrm{A}\cos s\mathrm{Y}+\mathrm{BY}\sin s\mathrm{Y}+\mathrm{C}\sin s\mathrm{Y}+\mathrm{DY}\cos s\mathrm{Y}. \tag{15}$$

Imponiamo ora che sia

$$\frac{\partial\Psi_{\mathrm{L}}}{\partial\mathrm{Y}}=-\,\Phi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\Psi_{\mathrm{L}}}{\partial\mathrm{X}}=\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}) \quad \text{in} \quad \mathrm{Y}=\pm 1;$$

tali condizioni diventano per $\overline{\Psi}_{\mathrm{L}}$:

$$\frac{\partial\overline{\Psi}_{\mathrm{L}}}{\partial\mathrm{Y}}=\mathscr{L}_{\mathrm{IIX}}[-\Phi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X})]=-\,\overline{\Phi}_{\mathrm{B}}(s)\;,\quad s\overline{\Psi}_{\mathrm{L}}=\mathscr{L}_{\mathrm{IIX}}[\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X})]=\overline{\chi}_{\mathrm{B}}(s)\ \text{in}\ \mathrm{Y}=\pm 1,$$

e permettono di ricavare

$$\mathrm{A}(s)=\frac{2\,\overline{\chi}_{\mathrm{B}}(s)\,(\sin s-s\cos s)}{s\,(\sin 2s-2s)}\;,\quad \mathrm{B}(s)=\frac{-2\,\overline{\chi}_{\mathrm{B}}(s)\sin s}{\sin 2s-2s},$$

$$\mathrm{C}(s)=\frac{2\,\overline{\Phi}_{\mathrm{B}}(s)\cos s}{\sin 2s-2s}\;,\quad \mathrm{D}(s)=\frac{-2\,\overline{\Phi}_{\mathrm{B}}(s)\sin s}{\sin 2s-2s},$$

per cui

$$\overline{\Psi}_{\mathrm{L}}(s,\mathrm{Y})=\frac{2\,\overline{\Phi}_{\mathrm{B}}(s)}{\sin 2s-2s}\,(\cos s\sin s\mathrm{Y}-\mathrm{Y}\sin s\cos s\mathrm{Y})+$$

$$+\frac{2\,\overline{\chi}_{\mathrm{B}}(s)}{\sin 2s-2s}\left[\left(\frac{\sin s}{s}-\cos s\right)\cos s\mathrm{Y}+\mathrm{Y}\sin s\sin s\mathrm{Y}\right],$$

ove

$$\overline{\Phi}_{\mathrm{B}}(s)=\sum_n\left[\frac{2\,\pi^2 n^2 a_n}{\pi^2 n^2-s^2}+\frac{2\,\pi n b_n\,(n^2\pi^2+s^2)}{(\pi^2 n^2-s^2)^2}\right](-1)^n,$$

$$\overline{\chi}_{\mathrm{B}}(s)=s\sum_n\left[\frac{-2\,\pi n\,\mathrm{A}_n}{\pi^2 n^2-s^2}+\frac{2\,\mathrm{B}_n}{\pi^2 n^2-s^2}-\frac{4\,\pi^2 n^2\,\mathrm{B}_n\,s}{(\pi^2 n^2-s^2)^2}\right](-1)^n.$$

Notiamo che i poli di $\overline{\Psi}_L$ sono nei punti $s = \pi n$ (poli del secondo ordine) e dove risulta $\sin 2s - 2s = 0$ (poli di ordine uno) (*); nel punto $s = 0$ non c'è polo, come è immediato verificare.

L'equazione $\sin 2s - 2s = 0$ ammette infinite soluzioni; se s_j è una radice, tali sono $-s_j$ e la complessa coniugata s_j^*; escluso $s = 0$ le radici sono tutte complesse. Consideriamo gli zeri nel primo quadrante ($\mathrm{Re}(s) \geq 0$, $\mathrm{Im}(s) \geq 0$), e ordiniamoli secondo le parti reali crescenti; la $\overline{\Psi}_L$ esisterà come trasformata di Laplace bilatera nella striscia $|\mathrm{Re}(s)| \leq \min(\pi, \mathrm{Re}(s_1))$.

Antitrasformiamo la $\overline{\Psi}_L$ applicando la

$$\Psi_L = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \overline{\Psi}_L e^{sX} ds ;$$

poniamo $c = 0$, e calcoliamo l'integrale sul contorno costituito dalla parte di asse immaginario compresa fra $-R$ e $+R$, e dalla semicirconferenza di centro l'origine e raggio R, giacente nel semipiano $\mathrm{R}e(s) \leq 0$, quando $R \to \infty$; applicando il teorema dei residui:

$$\Psi_L = \sum_{\mathrm{R}e(s) \leq 0} \mathrm{R}es(\overline{\Psi}_L e^{sX}).$$

Si ha subito:

$$\mathrm{R}es(\overline{\Psi}_L e^{sX}) \quad \text{in} \quad s = -k\pi \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots):$$

$$R_k = (-b_k X \sin k\pi Y - a_k \sin k\pi Y - A_k \cos k\pi Y - B_k X \cos k\pi Y)\, e^{-k\pi X},$$

mentre

$$\mathrm{R}es(\overline{\Psi}_L e^{sX}) \quad \text{in} \quad s = s_h \quad (\text{radici} \neq 0 \quad \text{di} \ \sin 2s - 2s = 0):$$

$$R_h = \frac{1}{\cos 2 s_h - 1} \Big[\exp(s_h X)\, \overline{\Phi}_B(s_h) (\cos s_h \sin s_h Y - Y \sin s_h \cos s_h Y) +$$

$$+ \exp(s_h X)\, \overline{\chi}_B(s) \left(\frac{\sin s_h}{s_h} \cos s_h Y - \cos s_h \cos s_h Y - Y \sin s_h \sin s_h Y \right) \Big].$$

Assumiamo ora come funzione di corrente la $\Psi = \Psi_F + \Psi_L$ che si può scrivere

$$(17) \quad \Psi(X, Y) = \sum_k (-1)^k 2\pi^2 k^2 a_k \sum_h \frac{\alpha_k(X, Y)}{\pi^2 k^2 - s_h^2} + \sum_k (-1)^k 2\pi k b_k \cdot$$

$$\cdot \sum_k \frac{\alpha_h(X, Y)(\pi^2 k^2 + s_h^2)}{(\pi^2 k^2 - s_h^2)^2} - \sum_k (-1)^k 2\pi k A_k \sum_h \frac{\beta_h(X, Y)}{\pi^2 k^2 - s_h^2} +$$

$$+ \sum_k (-1)^k 2 B_k \sum_h \left(\frac{\beta_h(X, Y)}{\pi^2 k^2 - s_h^2} - \frac{2\pi^2 k^2 \beta_h(X, Y) s_h}{(\pi^2 k^2 - s_h^2)^2} \right) + CY\left(1 - \frac{Y^2}{3}\right)$$

(*) Tale equazione ricorre frequentemente anche in problemi di elasticità [7] e le sue radici sono ampiamente tabulate [8].

ove

$$\alpha_h(X, Y) = \frac{\exp(s_h X)}{\cos 2 s_h - 1} (\cos s_h \sin s_h Y - Y \sin s_h \cos s_h Y)$$

e

$$\beta_h(X, Y) = \frac{\exp(s_h X)}{\cos 2 s_h - 1} (\sin s_h \cos s_h Y - s_h \cos s_h \cos s_h Y - s_h Y \sin s_h \sin s_h Y).$$

La somma in h va estesa a tutti gli s_h con parte reale negativa.

La (17) verifica, per come è stata ottenuta, la condizione di aderenza del liquido alla parete.

Derivando rispetto ad X e Y si ricava

$$\text{(18)} \quad U(X, Y) = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = \sum_k \left[2\pi^2 k^2 a_k \sum_h \frac{f_h(X, Y)}{\pi^2 k^2 - s_h^2} + 2\pi k b_k \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_h \frac{f_h(X, Y)(\pi^2 k^2 + s_h^2)}{(\pi^2 k^2 - s_h^2)^2} \right] (-1)^k + \sum_k \left[-2\pi k A_k \sum_h \frac{F^h(X, Y)}{\pi^2 k^2 - s_h^2} + \right.$$

$$\left. + 2 B_k \sum_h \frac{F_h(X, Y)}{\pi^2 k^2 - s_h^2} - \frac{2\pi^2 k^2 F_h(X, Y) s_h}{(\pi^2 k^2 - s_h^2)^2} \right] (-1)^k + C(1 - Y^2)$$

ove

$$f_h(X, Y) = \frac{\exp(s_h X)}{\cos 2 s_h - 1} (s_h \cos s_h \cos s_h Y - \sin s_h \cos s_h Y + s_h Y \sin s_h \sin s_h Y)$$

e

$$F_h(X, Y) = \frac{\exp(s_h X)}{\cos 2 s_h - 1} (-2 s_h \sin s_h \sin s_h Y + s_h^2 \cos s_h \sin s_h Y -$$

$$- s_h^2 Y \sin s_h \cos s_h Y)$$

e

$$\text{(19)} \quad V(X, Y) = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} = -\sum_k \left[2\pi^2 k^2 a_k \sum_h \frac{g_h(X, Y)}{\pi^2 k^2 - s_h^2} + 2\pi k b_k \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_h \frac{g_h(X, Y)(\pi^2 k^2 + s_h^2)}{(\pi^2 k^2 - s_h^2)^2} \right] (-1)^k + \sum_k \left[-2\pi k A_k \sum_h \frac{G_h(X, Y)}{\pi^2 k^2 - s_h^2} + \right.$$

$$\left. + 2 B_k \sum_h \frac{G_h(X, Y)}{\pi^2 k^2 - s_h^2} - \frac{2\pi^2 k^2 G_h(X, Y) s_h}{(\pi^2 k^2 - s_h^2)^2} \right] (-1)^k$$

ove

$$g_h(X, Y) = \frac{s_h \exp(s_h X)}{\cos 2 s_h - 1} (\cos s_h \sin s_h Y - Y \sin s_h \cos s_h Y)$$

e

$$G_h(X, Y) = \frac{s_h \exp(s_h X)}{\cos 2 s_h - 1} (\sin s_h \cos s_h Y - s_h \cos s_h \cos s_h Y - s_h Y \sin s_h \sin s_h Y).$$

In particolare, ponendo $X=0$ nella (18) e nella (19), e ricordando la (3), si hanno le condizioni che permettono di calcolare i coefficienti a_k, b_k, A_k, B_k.

È opportuno fare qualche considerazione sulla convergenza delle serie in h: si verifica che posto $s_h = \xi_h + i\eta_h$ (con $\xi_h < 0$), quando $h \to \infty$ l'andamento asintotico di s_h è del tipo

$$\xi_h \simeq \left(\frac{\pi}{4} + h\pi\right) \quad , \quad \eta_h \simeq \pm \log \sqrt{\pi + 4h\pi} \ ; \tag{20}$$

inoltre osserviamo che quando $h \to \infty$ risulta:

$$\sin s_h = 0\,(h^{\frac{1}{2}}) \sin \xi_h + i\,0\,(h^{\frac{1}{2}}) \cos \xi_h$$

$$\cos s_h = 0\,(h^{\frac{1}{2}}) \cos \xi_h + i\,0\,(h^{\frac{1}{2}}) \sin \xi_h$$

mentre $\xi_h = 0\,(h)$, $\eta_h = 0\,(\log h)$; esaminiamo per esempio la serie

$$S(X, Y) = \sum_h \frac{f_h(X, Y)}{\pi^2 k^2 - s_h^2} \ ;$$

se poniamo $X=0$ siamo nelle condizioni più sfavorevoli per la convergenza; si ha

$$S(0, Y) = \sum_h \frac{s_h \cos s_h \cos s_h Y - \sin s_h \cos s_h Y + Y s_h \sin s_h \sin s_h Y}{(\cos 2 s_h - 1)(\pi^2 k^2 - s_h^2)} \ ;$$

si consideri il termine generale della serie: parte reale e parte immaginaria dei tre termini a numeratore sono rispettivamente $0\,(h^2)$, $0\,(h)$, $0\,(h^2)$, per cui quello centrale si può trascurare.

La serie in esame vale il doppio della parte reale di quella che si ottiene limitando i valori di s_h al campo $\xi_h < 0$, $\eta_h > 0$.

Esaminiamo allora la parte reale del termine

$$S_h = \frac{s_h \cos s_h \cos s_h Y}{(\cos 2 s_h - 1)(\pi^2 k^2 - s_h^2)} \ ,$$

considerando i valori asintotici delle funzioni che vi compaiono. Per $h \to \infty$ risulta

$$S_h = \cos \xi_h \sin \xi_h \, Y \, 0\,(h^{-3/2+|Y|/2}) \ :$$

se $|Y| < 1$ la serie $\sum_h S_h$ converge; se $|Y| = 1$ si ha immediatamente $S(0, 1) = 0$.

Un ragionamento simile è possibile ripetere per le altre serie analoghe. Una verifica più accurata va fatta per i termini del tipo

$$\frac{s_h^2 \cos s_h \cos s_h Y}{(\cos 2 s_h - 1)(\pi^2 k^2 - s_h^2)}$$

che figurano nelle serie contenenti F_h e G_h; si verifica che essi sono $0(h^{-1/2+|Y|/2})$ e però a segni alterni; quando $|Y|=1$ vengono eliminati da un termine che risulta uguale e contrario, nel caso della F_h; nel caso della G_h, il primo addendo diventa asintoticamente uguale alla somma degli ultimi due, cosicché il termine generale diviene $0(h^{-1-\varepsilon})$, con $\varepsilon > 0$.

Bibliografia

[1] J. Boussinesq (1891) – *Sur la manière dont les vitesses, dans un tube cilindrique de section circulaire, évasé à son entrée, se distribuent depuis cette entrée jusqu'aux endroits òu se trouve établi un régime uniforme*, « C.R. Acad. Sci. Paris ».

[2] J. Boussinesq (1891) – *Calcul de la moindre longueur que doit avoir un tube circulaire, évasé à son entrée, pour qu'un régime sensiblement uniform s'y établisse, et de la dépense de charge qu'y entraîne l'établissement de ce régime* « C.R. Acad. Sci. Paris ».

[3] L. Schiller (1922) – *Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung für Zähigkeitsmessungen.* « Zeitschr. für ang. Math. und Mech. », n. 2.

[4] S. Goldstein (1938) – *Modern developments in fluid dynamics.* Oxford.

[5] H. Schlichting (1951) – *Grenzschichttheorie,* Karlsruhe.

[6] S. Wilson (1969) – *The development of Poiseuille flow,* « Journ. of fluid Mech. », vol. 38.

[7] L.S.D. Morley (1963) – *Simple series solution for the bending of a clamped rectangular plate under uniform normal load,* « Quart. Journ. Mech. and appl. Math. ». vol. XVI.

[8] L. Ricci (1951) – *Tavola di radici di basso modulo di un'equazione interessante la scienza delle costruzioni,* « Rivista di Ingegneria », n. 1.