Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luisa Di Piazza

Un risultato di perturbazione per una classe di problemi ellittici variazionali di tipo superlineare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **83** (1989), n.1, p. 195–199.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1989_8_83_1_195_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1989.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXIII (1989), pp. 195-199

Fisica matematica. — *Un risultato di perturbazione per una classe di problemi ellittici variazionali di tipo superlineare.* Nota di LUISA DI PIAZZA (*), presentata (**) dal Corrisp. A. AMBROSETTI.

ABSTRACT. — *A perturbation result for a class of superlinear variational elliptic problems.* We consider the nonlinear boundary value problem

$$(1_\varepsilon) \qquad -\Delta u = f(x,u) + \varepsilon\psi(x,u) \qquad \text{in } \Omega, \qquad u/\partial\Omega = 0,$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain and ε is a real parameter. If $f(x,s) + \varepsilon\psi(x,s)$ is «superlinear» and if ε is small enough, we prove that (1_ε) has at least three distinct solutions.

KEY WORDS: Nonlinear elliptic partial differential equation; Critical point; Perturbation; Deformation; Even functional.

RIASSUNTO. — Si considera il problema al contorno $-\Delta u = f(x,u) + \varepsilon\psi(x,u)$ in Ω, $u/\partial\Omega = 0$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *è un aperto limitato e connesso ed* ε è un parametro reale. Si prova che, se $f(x,s) + \varepsilon\psi(x,s)$ è «superlineare» ed ε è abbastanza piccolo, il problema precedente ha almeno tre soluzioni distinte.

1. In questa nota ci si occupa della determinazione di soluzioni del problema ellittico non lineare

$$(1_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) + \varepsilon\psi(x,u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato e connesso di $\mathbb{R}^n$, ε è un parametro reale e f e ψ sono funzioni soddisfacenti alle seguenti ipotesi:

i_1) $f: \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\psi: \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono continue e $f = f(x,s)$ e $\psi = \psi(x,s)$ sono C^1 rispetto ad s, per tutti gli $x \in \overline{\Omega}$;

i_2) f è dispari in s;

i_3) posto $f_\varepsilon(x,s) = f(x,s) + \varepsilon\psi(x,s)$, esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, se $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$

$$|f'_\varepsilon(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{l-1}\ (1),(2), \qquad \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

dove $1 < l < (n+2)/(n-2)$ per $n > 2$ e $l > 1$ per $n = 2$;

i_4) $f(x,s) = o(|s|)$ per $s \to 0$, uniformemente rispetto ad $x \in \Omega$;

i_5) esiste $\theta \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < 1$, tale che

$$0 < f_\varepsilon(x,s)/s < \theta f'_\varepsilon(x,s)\ (1), \qquad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall s \neq 0,\ \forall \varepsilon.$$

Come è noto da i_5) discende che $f_\varepsilon(x,s)$ è superlineare in s. Scopo di questa nota è di provare il seguente

(*) Dipartimento di Matematica ed Applicazioni - Via Archirafi, 34 - 90123 Palermo.
Lavoro eseguito nell'ambito dei progetti nazionali di ricerca del M.P.I..
(**) Nella seduta del 26 novembre 1988.

(1) In i_3), in i_5) e nel seguito se $a = a(x,s)$ è una funzione reale, definita in $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ e C^1 rispetto ad s, con $a'(x,s)$ si denota la derivata parziale rispetto ad s.

(2) Qui e nel seguito c_1, c_2, etc., indicano costanti positive.

TEOREMA. *Supponiamo che valgano* i_1), i_2), i_3), i_4) *e* i_5). *Esiste allora* $\varepsilon^* > 0$ *tale che, per* $|\varepsilon| \leq \varepsilon^*$, *il problema* (1_ε) *ha almeno tre soluzioni distinte.*

Il risultato va messo in relazione col teorema 7.1 di [5], cfr. anche [1], dove si suppone che $\psi'/f' \to 0$ $(s \to \pm\infty)$. Si noti che per $\varepsilon = 0$ e se valgono i_1)-i_5) (anzi i_3) e i_5) possono essere leggermente indebolite) (1_ε) ha infinite soluzioni [4]; per $\varepsilon \neq 0$ e ψ di tipo particolare l'esistenza di infinite soluzioni è nota [5, 6, 8, 9] solo sotto ulteriori restrizioni sull'esponente di crescita l.

La dimostrazione qui contenuta si basa, oltre che sull'approccio usato in [5], anche su un ragionamento di min-max simile a quello usato in [3] per un problema sublineare.

Desidero ringraziare il Professore Antonio Ambrosetti per i preziosi consigli e per le stimolanti discussioni avute durante questa ricerca.

2. Sia $H_0^1(\Omega)$ lo spazio di Sobolev completamento dello spazio $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma $\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx$ e sia $(\cdot,\cdot)$ il prodotto scalare in $H_0^1(\Omega)$. Sia inoltre $S = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u\| = 1\}$.

La (1_ε) è l'equazione di Eulero del funzionale

$$I_\varepsilon(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx - \varepsilon \int_\Omega \Psi(x,u)\, dx\,, \qquad u \in H_0^1(\Omega)\,,$$

dove $F(x,z) = \int_0^z f(x,t)\, dt$ e $\Psi(x,z) = \int_0^z \psi(x,t)\, dt$. Ricordiamo che da i_1) e da i_3) segue che $I_\varepsilon \in C^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Seguendo [5], associamo ad I_ε il funzionale J_ε su S definito ponendo

$$J_\varepsilon(u) = \max_{\lambda \geq 0} I_\varepsilon(\lambda u)\,, \qquad u \in S\,.$$

Poiché f_ε è superlineare rispetto ad s, risulta $\lim_{\lambda \to +\infty} I_\varepsilon(\lambda u) = -\infty$, per ogni $u \in S$; pertanto la definizione di J_ε è ben posta.

Dalle ipotesi fatte, ripetendo con opportune modifiche i ragionamenti di [5] (si lascia al lettore la cura di verificare i dettagli), discendono per J_ε le proprietà contenute nel lemma seguente.

LEMMA 1. *Se valgono* i_1), i_3), i_4) *ed* i_5), esiste ε_1 *con* $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ *tale che, se* $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$, *allora*:

(i) $$J_\varepsilon(u) > A\,, \qquad \forall u \in S$$

dove A *è una costante positiva*;

(ii) *per ogni fissato* $u \in S$, *la funzione* $\lambda \to I_\varepsilon(\lambda u)$ *ha un sol punto di massimo* $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon(u)$, *caratterizzato da*

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon(u) > 0\,, \quad \left[\frac{d}{d\lambda} I_\varepsilon(\lambda u)\right]_{\lambda=\lambda_\varepsilon} = 0\,, \quad \left[\frac{d^2}{d\lambda^2} I_\varepsilon(\lambda u)\right]_{\lambda=\lambda_\varepsilon} < 0\,; \tag{2}$$

(iii) $J_\varepsilon \in C^2(S, \mathbb{R})$ *e la coppia* (J_ε, S) *verifica la condizione*:

(P-S) ogni successione $\{u_n\} \subset S$, *tale che* $J_\varepsilon(u_n)$ *è limitata e* $J'_{\varepsilon/S}(u_n) \to 0$, *ha una sottosuccessione convergente*;

(iv) $J'_{\varepsilon/S}(u) = 0$, $u \in S$, *se e solo se* $I'_\varepsilon(\lambda_\varepsilon(u)\, u) = 0$. ▨

Per semplicità di notazione indichiamo con I e J rispettivamente I_0 e J_0. Studiamo ora J. Poiché $J \geqslant A$ e J è debolmente semicontinuo inferiormente, J ha minimo m su S. Poniamo $Z = \{u \in S : J(u) = m\}$, $Z^+ = \{u \in Z : u > 0\}$ e $Z^- = \{u \in Z : u < 0\}$; per ogni numero reale a, indichiamo inoltre con J^a l'insieme $\{u \in S : J(u) \leqslant a\}$.

Prima di enunciare i lemmi che seguono, ricordiamo che se v è un punto critico di I in $H_0^1(\Omega)$, si pone $\operatorname{ind}(v) = \dim\{w \in H_0^1(\Omega) : (I''(v)\,w, w) < 0\}$, dove $I''(v)$ è l'operatore definito da $(I''(v)\,w_1, w_2) = d^2 I(v) \cdot [w_1, w_2]$, $\forall w_1, w_2 \in H_0^1(\Omega)$.

Lemma 2 (cfr. anche [2]). *Nelle ipotesi del lemma precedente (con $\varepsilon = 0$), se $u \in Z$, allora $ind(\lambda_0(u)\,u) = 1$.*

Dimostrazione. Sia $u \in Z$. Poiché u è minimo di J su S, è $d^2 J(u) \cdot [v, v] \geqslant 0$, per ogni $v \in (\mathbb{R}u)^\perp$. Inoltre da (2) si ha $d^2 J(u) \cdot [\varphi, \varphi] < 0$, per ogni $\varphi \in \mathbb{R}u$, $\varphi \neq 0$. Pertanto, da $H_0^1(\Omega) = \mathbb{R}u \oplus (\mathbb{R}u)^\perp$ e da $J''(u) = \lambda_0^2(u)\, I''(\lambda_0(u)\,u)$, segue $\operatorname{ind}(\lambda_0(u)\,u) = 1$. ▨

Lemma 3. *Nelle ipotesi* i_1), i_2), i_3), i_4) *e* i_5):

(i) Z^+ e $Z^- \neq \emptyset$;

(ii) $Z = Z^+ \cup Z^-$;

(iii) *esiste $\hat{\delta} > 0$, tale che, per ogni δ, con $0 \leqslant \delta \leqslant \hat{\delta}$, $N_\delta^+ \cap Z^- = N_\delta^- \cap Z^+ = \emptyset$, dove $N_\delta^+ = \{v \in S : dist(v, Z^+) = \delta\}$ e $N_\delta^- = \{v \in S : dist(v, Z^-) = \delta\}$;*

(iv) *se per $\delta > 0$ è $N_\delta^+ \cap Z^- = N_\delta^- \cap Z^+ = \emptyset$, allora esiste $\alpha > 0$ tale che $\inf\limits_{N_\delta^+ \cup N_\delta^-} J \geqslant$ $\geqslant m + \alpha$.*

Dimostrazione. È noto che (1_0) ha una coppia di soluzioni $\overline{u} > 0$, $-\overline{u} < 0$ (si ricordi che J è pari). Quindi $\overline{u} \in Z^+$, $-\overline{u} \in Z^-$.

Per provare (ii) ragioniamo per assurdo. Sia $w \in Z$, con w che cambia segno. Se denotiamo con $\mu_k[h]$ il k-esimo autovalore del problema di autovalori $-\Delta u = \mu h u$, $u \in H_0^1(\Omega)$, $h \in L^\infty(\Omega)$, da $-\Delta \lambda_0 w = (f(x, \lambda_0 w)/\lambda_0 w)\, \lambda_0 w$, discende che $\mu_k[f(x, \lambda_0 w)/\lambda_0 w] = 1$, per qualche k. Poiché il segno di w cambia, è $k \geqslant 2$. Inoltre da i_5), per la proprietà di confronto degli autovalori, si deduce che

$$\mu_2[f'(x, \lambda_0 w)] < \mu_2[\theta f'(x, \lambda_0 w)] < \mu_2\left[\frac{f(x, \lambda_0 w)}{\lambda_0 w}\right] \leqslant 1\,.$$

Pertanto $\operatorname{ind}(\lambda_0 w) \geqslant 2$, in contraddizione con il lemma 2.

Per dimostrare la (iii) basta osservare che Z^+ e Z^- sconnettono Z, ed esiste quindi $\overline{\delta} > 0$ tale che $v \notin Z^-(v \notin Z^+)$, per ogni v con $\operatorname{dist}(v, Z^+) \leqslant \overline{\delta}$ $(\operatorname{dist}(v, Z^-) \leqslant \overline{\delta})$.

Sia, poi, $\delta > 0$ tale che $N_\delta^+ \cap Z^- = \emptyset$ e supponiamo per assurdo che sia $\inf\limits_{N_\delta^+} J = m$. *In tal caso è possibile determinare una successione $\{u_n\}$, tale che $\{u_n\} \subset N_\delta^+$ e $J(u_n) \to m$. Risulta allora $J'_{/S}(u_n) \to 0$. Infatti, se così non fosse, esisterebbero $\beta > 0$* tale che, a meno di sottosuccessioni, $\|J'_{/S}(u_n)\| \geqslant \beta$, dove l'ultima norma è calcolata nello spazio cotangente $[(\mathbb{R}u_n)^\perp]'$ con la norma duale. Indicato con U un intorno di Z in S, non contenente alcun elemento di $\{u_n\}$, per un ben noto lemma di deformazione (cfr. [4]), esisterebbero un numero $\sigma > 0$ e $\eta : S \to S$, tali che $\eta(J^{m+\sigma} \setminus U) \subset J^{m-\sigma}$. D'altra parte, per n grande $\hat{u} = u_n \in J^{m+\sigma} \setminus U$. Allora $\eta(\hat{u}) \in J^{m-\sigma}$ e ciò è assurdo, in quanto m è il minimo di J su S.

Pertanto $J'_{/S}(u_n) \to 0$ e, per la condizione (P-S), a meno di sottosuccessioni, $u_n \to \tilde{u}$, con $\tilde{u} \in Z$ e $\tilde{u} \in N_\delta^+$, mentre $N_\delta^+ \cap Z = \emptyset$.

Stesso ragionamento per N_δ^-. ▨

3. Siamo ora in grado di provare il teorema enunciato nel § 1.

Dimostrazione del teorema. Per conseguire la tesi, facciamo vedere (cfr. lemma 1. (iv)) che J_ε, se ε è piccolo, ha almeno tre punti critici.

Per ogni $u \in S$ e per $|\varepsilon| \leq \varepsilon_1$, $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon(u)$ verifica (2); pertanto, per il teorema delle funzioni implicite e tenendo conto che Z^+ e Z^- sono compatti, è possibile determinare un intorno V^+ di Z^+ (V^- di Z^-) e due costanti positive $\hat{\lambda}$ e ε_2, con $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, tali che, se $u \in V^+ \cup V^-$ e se $|\varepsilon| \leq \varepsilon_2$, si ha

$$0 < \lambda_\varepsilon(u) < \hat{\lambda}. \tag{3}$$

Si può, inoltre, sempre supporre che $V^+ \cap V^- = \emptyset$. Siano poi δ e $\alpha > 0$ tali che (cfr. lemma 3 (iii)-(iv)) $N_\delta^+ \cap Z^- = N_\delta^- \cap Z^+ = \emptyset$, $N_\delta^+ \subset V^+$, $N_\delta^- \subset V^-$ e

$$J(u) \geq m + \alpha, \qquad \forall u \in N_\delta^+ \cup N_\delta^-. \tag{4}$$

Dimostriamo che, per ε sufficientemente piccolo, J_ε ha due punti critici distinti a livelli critici minori di $m + \alpha/2$ ed appartenenti rispettivamente a V^+ ed a V^-.

Dalla definizione di J e di J_ε discende

$$J(u) - J_\varepsilon(u) \leq I(\lambda_0 u) - \frac{1}{2}\lambda_0^2 + \int_\Omega F(x, \lambda_0 u)\, dx + \varepsilon \int_\Omega \Psi(x, \lambda_0 u)\, dx = \varepsilon \int_\Omega \Psi(x, \lambda_0 u)\, dx \tag{5}$$

e

$$J_\varepsilon(u) - J(u) \leq I_\varepsilon(\lambda_\varepsilon u) - \frac{1}{2}\lambda_\varepsilon^2 + \int_\Omega F(x, \lambda_\varepsilon u)\, dx = -\varepsilon \int_\Omega \Psi(x, \lambda_\varepsilon u)\, dx. \tag{6}$$

Poiché (cfr. i_3)) $|\Psi(x,z)| \leq c_3 + c_4 |z|^{l+1}$, allora da (5) e (6) si ha, per $|\varepsilon| < \varepsilon_0$,

$$|J(u) - J_\varepsilon(u)| \leq \varepsilon[c_5 + c_6 \max(\lambda_0^{l+1}, \lambda_\varepsilon^{l+1}) \|u\|_{L^{l+1}}^{l+1}]. \tag{7}$$

Se $|\varepsilon| \leq \varepsilon_2$, da (3), (7) e dai teoremi di immersione di Sobolev, si deduce quindi

$$|J(u) - J_\varepsilon(u)| \leq \varepsilon c_7, \qquad \forall u \in V^+ \cup V^-.$$

Da quest'ultima relazione, tenendo presente (4), segue che esiste ε^*, $0 < \varepsilon^* \leq \varepsilon_2$, tale che per $|\varepsilon| \leq \varepsilon^*$

$$J_\varepsilon(u) \geq m + \frac{\alpha}{2}, \qquad \forall u \in N_\delta^+ \cup N_\delta^- \tag{8}$$

e

$$J_\varepsilon(u) \leq m + \frac{\alpha}{4}, \qquad \forall u \in Z. \tag{9}$$

Sia ora $|\varepsilon| \leq \varepsilon^*$. Preso un punto $w \in Z^+$, poiché J_ε è inferiormente limitato e verifica (P-S) (cfr. lemma 1. (i) e (iii)), allora $\eta_t(w) \to u_1^\varepsilon$ con $J'_{\varepsilon/S}(u_1^\varepsilon) = 0$ (cfr. [7]), dove $\eta_t(w) : S \to S$ indica il flusso discendente associato a J_ε a partire dal punto w [3]. Da (9) segue che

$$J_\varepsilon(u_1^\varepsilon) \leq m + \frac{\alpha}{4} \tag{10}$$

[3] Ricordiamo che con tale termine si intende la soluzione massimale $\eta_t(u) = \eta(\cdot, u)$ del problema: $d\eta/dt = J'_{/S}(\eta), \eta(0) = u$.

e da (8) segue che $\operatorname{dist}(u_1^\varepsilon, Z^+) < \delta$. Analogamente esiste $u_2^\varepsilon \in S$ tale che $J'_{\varepsilon/S}(u_2^\varepsilon) = 0$,

$$J_\varepsilon(u_2^\varepsilon) \leq m + \frac{\alpha}{4} \tag{10'}$$

e $\operatorname{dist}(u_2^\varepsilon, Z^-) < \delta$. Dal lemma 1. – (iv) si ha che $\lambda_\varepsilon(u_i^\varepsilon)\, u_i^\varepsilon$ sono soluzioni di (1_ε), $i = 1, 2$.

Per trovare la terza soluzione applichiamo il teorema di «Mountain Pass» [2, teorema 1.1]. Precisamente poniamo

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{u\in\gamma} J_\varepsilon(u)$$

dove $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], S) : \gamma(0) = u_1^\varepsilon, \gamma(1) = u_2^\varepsilon\}$. In virtù di (8) e di (10-10′), $c > \max(J_\varepsilon(u_1^\varepsilon), J_\varepsilon(u_2^\varepsilon))$. Un ragionamento standard mostra che esiste $u_3^\varepsilon \in S$ tale che $J'_{\varepsilon/S}(u_3^\varepsilon) = 0$ e $J_\varepsilon(u_3^\varepsilon) = c$.

Allora $\lambda_\varepsilon(u_3^\varepsilon)\, u_3$ è una soluzione di (1_ε) con $u_3^\varepsilon \neq u_i^\varepsilon$, $i = 1, 2$. ▨

Bibliografia

[1] A. Ambrosetti, 1974. *A perturbation theorem for superlinear boundary value problems.* M.R.C. Techn. Summ. Report n. 1442.

[2] A. Ambrosetti, 1988. *Problemi variazionali in analisi non lineare.* Boll. U.M.I., (7), 2-A: 169-188.

[3] A. Ambrosetti - D. Lupo, 1984. *On a class of nonlinear Dirichlet problems with multiple solutions.* Nonlin. Anal. TMA, 8, n. 10: 1145-1150.

[4] A. Ambrosetti - P. H. Rabinowitz, 1973. *Dual variational methods in critical point theory and applications.* J. Funct. Anal., 14: 349-381.

[5] A. Bahri - H. Berestycki, 1981. *A perturbation method in critical point theory and applications.* Trans. Am. Math. Soc., 267, n. 1: 1-32.

[6] A. Bahri - P. L. Lions, 1985. *Remarks on the variational theory of critical points and applications.* C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 301: 145-148.

[7] R. Palais, 1966. *Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds.* Topology, 5: 115-132.

[8] P. H. Rabinowitz, 1982. *Multiple critical points of perturbed symmetric functionals.* Trans. Amer. Math. Soc., 272: 753-770.

[9] M. Struwe, 1980. *Infinitely many critical points for functionals which are not even and applications to superlinear boundary value problems.* Manus. Math., 30: 335-364.