

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI  
**RENDICONTI**

---

ENNIO DE GIORGI, LUIGI AMBROSIO

**Un nuovo tipo di funzionale del calcolo delle  
variazioni**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 82 (1988), n.2, p. 199–210.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1988\\_8\\_82\\_2\\_199\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1988_8_82_2_199_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Aprile-Giugno 1988

## SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

*Atti Acc. Rend. fis.*

(8), LXXXII (1988), pp. 199-210

**Matematica** — *Un nuovo tipo\* di funzionale del calcolo delle variazioni.*  
Nota di ENNIO DE GIORGI e LUIGI AMBROSIO, presentata (\*) dal Socio E. DE GIORGI.

**ABSTRACT.** — *New functionals in calculus of variations.* In this paper we study a class of functionals which occur in many problems of Mathematical Physics and, in particular, in the problem of finding the equilibrium configurations of a mixture of isotropic liquids and liquid crystals.

**KEY WORDS:** Calculus of variations; Semicontinuity; Functions of bounded variation; Liquid crystals.

**RIASSUNTO.** — In questo lavoro si studia una classe di funzionali che intervengono in molti problemi di Fisica Matematica e, in particolare, nel problema di trovare le configurazioni di equilibrio di una miscela di liquidi isotropi e cristalli liquidi.

### 1. DEFINIZIONE DEL FUNZIONALE

Recenti studi sui funzionali dell'energia e in particolare sulle configurazioni di equilibrio di un sistema di diversi fluidi, alcuni dei quali possono essere cristalli liquidi, portano a considerare funzionali del tipo (cfr. [4], [5], [7], [8], [15], [24])

$$(1) \quad F(u) = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx + \int_{S_u} \Phi(x, \text{tr}^+(x, u, \nu), \text{tr}^-(x, u, \nu), \nu) dH_{n-1}$$

(\*) Nella seduta del 12 dicembre 1987.

dove  $\Omega$  è un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $H_{n-1}$  è la misura di Hausdorff  $(n-1)$ -dimensionale,  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  è una funzione misurabile,  $f: \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k) \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ ,  $\Phi: \Omega \times \tilde{\mathbb{R}}^k \times \tilde{\mathbb{R}}^k \times S^{n-1} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  (\*) sono funzioni Boreliane, e  $\Phi$  verifica l'uguaglianza

$$\Phi(x, a, b, \nu) = \Phi(x, b, a, -\nu)$$

per ogni  $x \in \Omega$ ,  $\nu \in S^{n-1}$ ,  $a, b \in \tilde{\mathbb{R}}^k$ . Supporremo inoltre che valgano le disuguaglianze

$$f(x, u, p) \geq \gamma(x), \quad \Phi(x, a, b, \nu) \geq \beta(x)$$

con

$$\int_{\Omega} |\gamma| dx < +\infty, \quad \int_{\Omega} |\beta| dH_{n-1} < +\infty.$$

Volendo brevemente accennare alle motivazioni euristiche che inducono a studiare funzionali del tipo (1), si può dire che il primo integrale rappresenta la somma delle energie interne dei diversi fluidi e di un eventuale potenziale associato a forze esterne, mentre il secondo integrale esprime l'energia delle interfacce tra i diversi fluidi o delle superfici di contatto di fluidi con le pareti di un eventuale contenitore (vedi l'esempio del paragrafo 4). Passando dalle motivazioni fisiche alla precisazione matematica dei simboli  $\nabla$ ,  $S_u$ ,  $\text{tr}^+(x, u, x)$ ,  $\text{tr}^-(x, u, x)$  che compaiono nella (1), diamo ora le definizioni di tali simboli ispirandoci sostanzialmente alla nozione di limite asintotico usata in [16].

DEFINIZIONE 1. - Se  $x \in \Omega$ ,  $z \in \tilde{\mathbb{R}}^k$ , diremo che  $z$  è il limite approssimato della funzione  $u$  in  $x$ , e scriveremo  $z = \text{ap} \lim_{y \rightarrow x} u(y)$  se

$$g(z) = \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \int_{B_{\varrho}} g(u(x + \xi)) d\xi$$

per ogni  $g \in C^0(\tilde{\mathbb{R}}^k)$ , ove  $C^0(\tilde{\mathbb{R}}^k)$  è lo spazio delle funzioni reali continue (e quindi limitate) su  $\tilde{\mathbb{R}}^k$ . Nel caso in cui  $z \in \mathbb{R}^k$ , la definizione data ora è equivalente alle definizioni usate in [16], [25], [26]. Poniamo anche

$$S_u = \{x \in \Omega : u \text{ non ha limite approssimato in } x\}.$$

(\*) Con  $\tilde{\mathbb{R}}^k = \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$  indichiamo la compattificazione di Alexandroff dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^k$ , con  $B_{\varrho}^n$ , o più brevemente con  $B_{\varrho}$ , indichiamo l'insieme  $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varrho\}$  e poniamo  $S^{n-1} = \partial B_1^n$ . Indichiamo inoltre con  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$  l'insieme delle applicazioni lineari di  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^k$ , munito della norma Hilbertiana

$$|w| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |w(e_i)|^2}$$

dove  $\{e_i\}_{i=1}^n$  è una base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$ .

DEFINIZIONE 2. – Se  $x \in \Omega$ ,  $z \in \mathbb{R}^k$ ,  $\nu \in S^{n-1}$ , diremo che  $z$  è la traccia esterna della funzione  $u$  nel punto  $x$  lungo la direzione  $\nu$ , e scriveremo  $z = \text{tr}^+(x, u, \nu)$  se

$$g(z) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \int_{B_\rho \cap \{\xi: \langle \xi, \nu \rangle > 0\}} \gamma(u(x + \xi)) d\xi$$

per ogni  $g \in C^0(\mathbb{R}^k)$  (vedi [25], [26] per definizioni equivalenti). Definiamo anche la traccia interna  $\text{tr}^-(x, u, \nu)$  nel seguente modo:

$$\text{tr}^-(x, u, \nu) = \text{tr}^+(x, u, -\nu).$$

OSSERVAZIONE 1. – L'insieme  $S_u$  è Boreliano ed ha misura nulla e  $\text{ap} \lim_{y \rightarrow x} u(y)$  è quasi ovunque uguale a  $u(x)$  ([16], Teorema 2.9.13). Si verifica facilmente che se esiste  $\text{ap} \lim_{y \rightarrow x} u(y)$ , allora

$$\text{tr}^+(x, u, \nu) = \text{ap} \lim_{y \rightarrow x} u(y) = \text{tr}^-(x, u, \nu)$$

per ogni  $\nu \in S^{n-1}$ . Viceversa, se per un certo  $x \in \Omega$  ed un certo versore  $\nu$  esistono  $\text{tr}^+(x, u, \nu)$  e  $\text{tr}^-(x, u, \nu)$  e sono uguali, allora  $u$  ha limite approssimato in  $x$ . Inoltre, se  $x \in S_u$  e  $\nu, \nu' \in S^{n-1}$  sono tali che esistono

$$\text{tr}^+(x, u, \nu), \text{tr}^-(x, u, \nu), \text{tr}^+(x, u, \nu'), \text{tr}^-(x, u, \nu')$$

allora necessariamente  $\nu = \pm \nu'$ .

DEFINIZIONE 3. – Sia  $x \in \Omega$  e  $w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$ ; diremo che  $u$  è differenziabile in media in  $x$  che  $w$  è il differenziale approssimato di  $u$  in  $x$ , e scriveremo  $w = \nabla u(x)$  se  $x \in \Omega - S_u$ ,  $z = \text{ap} \lim_{y \rightarrow x} u(y) \in \mathbb{R}^k$  e

$$\text{ap} \lim_{y \rightarrow x} \frac{|u(y) - z - w(y-x)|}{|y-x|} = 0.$$

#### LE CLASSI GBV( $\Omega, \mathbb{R}^k; E$ ), GSBV( $\Omega, \mathbb{R}^k; E$ )

Introduciamo ora alcune classi di funzioni nelle quali è apparso conveniente studiare i funzionali del tipo (1). Le prime rappresentano un'ampia *generalizzazione* delle ben note classi delle funzioni a variazione limitata, generalmente indicate con la sigla BV (iniziali di "bounded variation") e verranno perciò indicate con la sigla GBV (funzioni a variazione limitata generalizzate). Le seconde rappresentano classi (un po'

più ristrette delle classi GBV) nelle quali è facile dimostrare l'esistenza di minimi di molti funzionali del tipo (1), e per esse adotteremo la sigla GSBV (funzioni a variazione limitata speciali generalizzate). Per definire tali classi, cominciamo col porre

$$\mathcal{M}f(A; \mathbb{R}^k) = \{u : A \rightarrow \mathbb{R}^k : u \text{ è misurabile secondo Lebesgue}\}$$

per ogni insieme aperto  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Lo spazio  $\mathcal{M}f(A; \mathbb{R}^k)$  si intenderà dotato della topologia i cui chiusi sono gli insiemi stabili rispetto alla convergenza quasi ovunque. Per ogni funzione continua  $g : \Omega \times \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty]$ , per ogni insieme aperto  $A \subset \Omega$  ed ogni funzione  $u \in C^1(A; \mathbb{R}^k)$  poniamo

$$F_g(u, A) = \int_A g(x, u) |\nabla u| \, dx.$$

Si può allora definire il funzionale rilassato

$$\bar{F}_g(u, A) = \inf \{ \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_g(u_h, A) : u_h \rightarrow u \text{ quasi ovunque in } A \}$$

per ogni funzione  $u \in \mathcal{M}f(A; \mathbb{R}^k)$ .

**DEFINIZIONE 4.** - Sia  $u \in \mathcal{M}f(\Omega; \mathbb{R}^k)$  e sia  $E \subset \Omega \times \mathbb{R}^k$  aperto. Diremo che  $u$  è una funzione a variazione limitata generalizzata nell'aperto  $E$ , e scriveremo  $u \in \text{GBV}(\Omega, \mathbb{R}^k; E)$  se

$$\bar{F}_g(u, \Omega) < +\infty$$

per ogni funzione continua e non negativa  $g$  avente supporto compatto contenuto in  $E$ .

Per un confronto con la classe  $\text{BV}(\Omega)$ , considerata ad esempio in [16], [17], [18], conviene tener presente la proprietà espressa dalla seguente osservazione.

**OSSERVAZIONE 2.** - Se  $k = 1$ ,  $u \in L^1(\Omega)$ , e  $g$  è la funzione identicamente uguale a 1, allora

$$\bar{F}_g(u, \Omega) < +\infty$$

se e soltanto se la funzione  $u$  appartiene alla classe  $\text{BV}(\Omega)$  (cfr. [17], [18]). Si prova inoltre che se  $u \in \text{GBV}(\Omega, \mathbb{R}^k; E)$  allora la funzione  $\psi(x, u(x))$  appartiene alla classe  $\text{BV}(\Omega)$  per ogni funzione  $\psi \in C_0^1(E)$ .

Per ogni funzione  $u \in \mathcal{M}f(\Omega; \mathbb{R}^k)$  si può definire  $\text{GBV amb}(u)$  come l'unione degli aperti  $E \subset \Omega \times \mathbb{R}^k$  tali che  $u \in \text{GBV}(\Omega, \mathbb{R}^k; E)$ .

Poniamo inoltre

$$\text{GBV dom}(u) = \{x \in \Omega - S_u : (x, \lim_{y \rightarrow x} u(y)) \in \text{GBV amb}(u)\};$$

$$\text{GBV}(\Omega, \mathbb{R}^k) = \{u \in \mathcal{M}f(\Omega; \mathbb{R}^k) : \text{GBV amb}(u) = \Omega \times \mathbb{R}^k\}.$$

Il collegamento tra il funzionale  $\bar{F}_g$  e il differenziale approssimato è chiarito dalla seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1. - Sia  $u \in \mathcal{M}f(\Omega, \mathbb{R}^k)$ . Allora esiste quasi ovunque in  $\text{GBV dom}(u)$  il differenziale approssimato di  $u$  e per ogni funzione non negativa  $g \in C^0(\Omega \times \mathbb{R}^k)$  avente supporto compatto contenuto in un insieme  $E$  tale che  $u \in \text{CBV}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^k; E)$  si ha

$$(2) \quad \int_{\text{GBV dom}(u) \cap A} g(x, u) |\nabla u| dx = \inf \{ \bar{F}_g(u, A - K) : K \text{ compatto, } \text{mis}(K) = 0 \}$$

per ogni insieme aperto  $A \subset \Omega$ .

Nel caso in cui  $E \supset \Omega \times (\mathbb{R}^k - F)$  con  $F$  finito, è dimostrata in [3] anche la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 2. - Sia  $u \in \text{GBV}(\Omega, \mathbb{R}^k; E)$ . Allora  $u$  è differenziale in media quasi ovunque in  $\Omega$  e per  $H_{n-1}$  quasi ogni  $x \in S_u$  esistono  $v \in SH^{n-1}$ ,  $u', u'' \in \mathbb{R}^k$  tali che

$$u' = \text{tr}^-(x, u, \nu), u'' = \text{tr}^-(x, u, \nu).$$

Inoltre l'insieme  $S_u$  può essere decomposto nella forma

$$S_u = \bigcup_{h=1}^{\infty} K_h \cup N$$

dove  $H_{n-1}(N) = 0$ , gli insiemi  $K_h$  sono parti compatte di ipersuperfici di classe  $C^1$  e, fissata comunque una ipersuperficie  $\Gamma$  di classe  $C^1$  contenuta in  $\Omega$ , in  $H_{n-1}$  quasi in ogni punto  $x$  di  $\Gamma$  esistono

$$\text{tr}^+(x, u, \nu), \text{tr}^-(x, u, \nu)$$

lungo la direzione  $\nu$  ortogonale a  $\Gamma$ .

Per quanto, in virtù della proposizione 2, i funzionali del tipo (1) risultino definiti sulla classe  $\text{GBV}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ , appare spesso conveniente, sia in base a considerazioni di natura fisico-matematica, sia in base a considerazioni variazionali, considerarne la restrizione a una classe di funzioni *GBV speciali*, caratterizzate da una proprietà più forte della (2); perciò diamo la seguente:

DEFINIZIONE 5. - Sia  $E$  un insieme aperto di  $\Omega \times \mathbb{R}^k$ . Diremo che  $u$  è una funzione *GBV speciale* in  $E$ , e scriveremo  $u \in \text{GSBV}(\Omega, \mathbb{R}^k; E)$ , se  $u \in \text{GBV}(\Omega, \mathbb{R}^k; E)$  e vale l'uguaglianza

$$\int_{\text{GBV dom}(u)} g(x, u) |\nabla u| dx = \inf \{ \bar{F}_g(u, \Omega - K) : K \text{ compatto, } H_{n-1}(K) < +\infty \}$$

per ogni funzione continua e non negativa  $g$  avente supporto compatto contenuto in  $E$ . Indicheremo con  $GSBV(\Omega, \mathbb{R}^k)$  la classe  $GSBV(\Omega, \mathbb{R}^k; \Omega \times \mathbb{R}^k)$ .

Possiamo ora illustrare con un esempio l'affermazione iniziale che molti funzionali del tipo (1) hanno minimo in  $GSBV$ . Sia  $f_1: \Omega \times \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty[$  una funzione Boreliana, continua rispetto alle ultime  $k$  variabili, e soddisfacente per ogni  $x \in \Omega$  la condizione

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} f_1(x, y) = +\infty.$$

Sia inoltre  $\beta > 1$  e  $f_2: \Omega \times \mathbb{R}^k \rightarrow [0, +\infty[$  una funzione continua strettamente positiva fuori di  $\Omega \times F$ , essendo  $F$  un sottoinsieme finito di  $\mathbb{R}^k$ . Allora il funzionale

$$\int_{\Omega} [f_1(x, y) + f_2(x, u) |\nabla u|^{\beta}] dx + \int_{S_u} dH_{n-1}$$

ha minimo nella classe  $GSBV(\Omega, \mathbb{R}^k; \Omega \times (\mathbb{R}^k - F))$ . È da notare che per opportune scelte di  $f_1, f_2$  la funzione che realizza il minimo del funzionale non è localmente sommabile e quindi non appartiene a nessuno degli spazi più frequentemente usati in Calcolo delle Variazioni e teoria delle equazioni differenziali.

### 3. PROBLEMI DI SEMICONTINUITÀ

Le stesse considerazioni che consigliano lo studio dei funzionali del tipo (1) nella classe delle funzioni di classe  $GSBV$ , suggeriscono pure il problema di caratterizzare le funzioni  $f, \Phi$  per le quali il funzionale (1) risulta semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia di  $\mathcal{M}f(\Omega; \mathbb{R}^k)$ . È facile convincersi che la ricerca di criteri di semicontinuità per questo tipo di funzionali presenta difficoltà assai notevoli, dato che in essa confluiscono sia i problemi di semicontinuità del tipo considerato in elasticità non lineare (vedi [1], [21]), sia i problemi di semicontinuità della teoria geometrica della misura (vedi [16], Capitolo 5). Rinviamo il lettore che desidera approfondire questo tema al lavoro [3], diamo qui qualche indicazione puramente euristica e per cominciare notiamo che un primo approccio potrebbe consistere nel dividere la ricerca di condizioni necessarie o sufficienti in 3 fasi:

1) Studio della semicontinuità della restrizione del funzionale  $F$  ad uno spazio di Sobolev  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^k)$ . Per questo tipo di problemi, già ampiamente studiati, si può consultare, oltre agli autori già citati, la vasta bibliografia sull'argomento raccolta in [12].

2) Studio della semicontinuità del funzionale  $F$  nella classe delle funzioni appartenenti a  $GBV(\Omega; \mathbb{R}^k)$  aventi valori in un insieme formato da un numero finito di punti di  $\mathbb{R}^k$ . Tali funzioni appartengono necessariamente alla classe  $GSBV(\Omega; \mathbb{R}^k)$ , e



si può dimostrare (vedi [3] che se la funzione  $\phi$  è continua, le due condizioni sono necessarie per la semicontinuità inferiore rispetto alla topologia di  $\mathcal{M}f(\Omega; \mathbb{R}^k)$ :

(I) per ogni  $x \in \Omega$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}^k$ ,  $\nu \in S^{n+1}$  si ha

$$\phi(x, a, c, \nu) = \phi(x, c, b, \nu) + \phi(x, c, b, \nu);$$

(II) per ogni  $x \in \Omega$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^k$ ,  $\nu \in S^{n+1}$  la funzione

$$\phi(p) = \begin{cases} |p| \phi\left(x, a, b, \frac{p}{|p|}\right) & \text{se } p \neq 0; \\ 0 & \text{se } p = 0, \end{cases}$$

è convessa in  $\mathbb{R}^n$ .

3) Studio di condizioni di raccordo tra le funzioni  $f$  e  $\Phi$ . A tale proposito, sembra particolarmente interessante la seguente condizione:

(III) per ogni  $x \in \Omega$ ,  $s \in \mathbb{R}^k$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^k$ ,  $\nu \in S^{n+1}$  si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x, s, t\nu \otimes \theta)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(x, s + t\theta, s, \nu)}{t}$$

dove  $\nu \otimes \theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$  è definito da

$$\nu \otimes \theta(\xi) = \langle \nu, \xi \rangle \theta$$

per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

Accanto a questi problemi di semicontinuità, si pone anche il problema di caratterizzare il funzionale rilassato

$$\mathcal{F}(u) = \inf \left\{ \liminf_{h \rightarrow +\infty} F(u_h) : (u_h) \subset \text{GSBV}(\Omega; \mathbb{R}^k), u_h \rightarrow u \text{ quasi ovunque} \right\}$$

definito per tutte le funzioni  $u \in \mathcal{M}f(\Omega; \mathbb{R}^k)$ . In opportune ipotesi di continuità, una condizione abbastanza plausibile perché il funzionale  $\mathcal{F}$  sia infinito su  $\mathcal{M}f(\Omega; \mathbb{R}^k) - \text{GSBV}(\Omega; \mathbb{R}^k)$  sembra essere la:

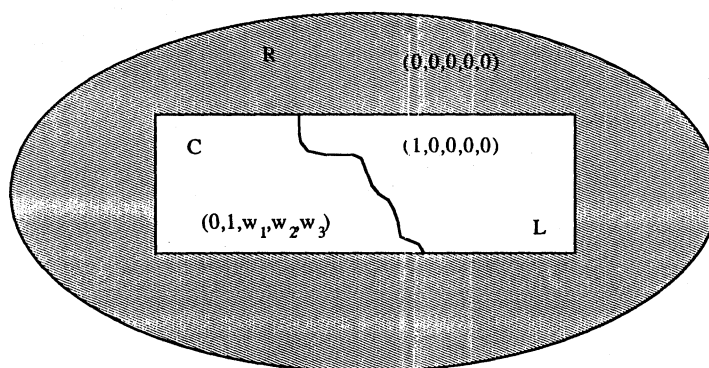
$$(IV) \quad \begin{cases} \lim_{|w| \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u, w)}{|w|} = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, s + t, s, \nu)}{|t|} = +\infty. \end{cases}$$

Nel caso in cui (IV) non fosse soddisfatta, e il funzionale  $\mathcal{F}$  risultasse finito su qualche funzione  $u \in \mathcal{M}f(\Omega; \mathbb{R}^k) - \text{GSBV}(\Omega; \mathbb{R}^k)$ , si pongono problemi di rappresentazione integrale del tipo di quelli considerati in [9], e qualche indicazione in questa direzione è data nel paragrafo 5. Infine per i funzionali del tipo (1), o per i loro funzio-

nali rilassati, si porranno problemi di  $\Gamma$ -convergenza del tipo considerato in [20] e problemi di regolarità dei minimi, che dovrebbero combinare le difficoltà della teoria delle superfici minimali con quelle della teoria dei sistemi ellittici.

#### 4. UN ESEMPIO ISPIRATO ALLA TEORIA DEI CRISTALLI LIQUIDI

Per tornare dopo le considerazioni puramente matematiche dei paragrafi precedenti alle iniziali motivazioni fisiche di questo lavoro, diamo un esempio di funzionali del tipo (1) che possono intervenire nello studio di miscele di liquidi alcuni dei quali sono cristalli liquidi. Avvertiamo che l'esempio non pretende di costituire una schematizzazione completa di determinate situazioni fisiche, ma vuole solo fornire un'indicazione puramente qualitativa della direzione in cui tali schematizzazioni potrebbero essere ricercate. Consideriamo (vedi figura) un recipiente cavo  $R$  contenente



un liquido isotropo  $L$  ed un cristallo liquido  $C$ , entrambi incompressibili. Una particolare configurazione di questo sistema può essere descritta mediante una funzione  $u$  definita sulla porzione di spazio  $\Omega$  occupata da  $R$ , avente valori in  $\mathbb{R}^5$ , e soggetta alle seguenti condizioni:

- (1)  $u(x) = (0, 0, 0, 0, 0)$  quasi ovunque in  $\Omega - \Omega'$ , dove  $\Omega'$  è la parte cava del recipiente e  $\Omega' \subset \subset \Omega$ ;
- (2)  $u(x) = (1, 0, 0, 0, 0)$  se nel punto  $x$  è presente il liquido amorfo  $L$ ;
- (3)  $u(x) = (0, 1, w_1, w_2, w_3)$  se nel punto  $x$  è presente il cristallo liquido  $C$ , e  $(w_1, w_2, w_3) \in S^2$  rappresenta l'asse ottico del cristallo liquido.

È ragionevole supporre che l'energia di questo sistema possa essere descritta da un funzionale del tipo (cfr. [4], [5], [7], [8])

$$E(u) = \int_{\Omega} [g(x, y) + c |\nabla u|^2] dx + \int_{S_u} \phi(\text{tr}^+(x, u, \nu), \text{tr}^-(x, u, \nu), \nu) dH_{n-1}.$$

Le configurazioni di equilibrio del sistema possono allora essere cercate tra i punti di minimo, o almeno stazionari, del funzionale  $E$  nello spazio  $GSBV(\Omega; \mathbb{R}^5)$  con i vincoli

$$u(x) \in \{(0, 0, 0, 0, 0)\} \cup \{(1, 0, 0, 0, 0)\} \cup \{z \in \mathbb{R}^5 : z = (0, 1, w_1, w_2, w_3) \text{ con } (w_1, w_2, w_3) \in S^2\},$$

$$u(x) = 0 \text{ in } \Omega - \Omega',$$

$$\int_{\Omega} u^{(i)} dx = V_i \text{ per } i = 1, 2$$

dove  $V_1, V_2$  sono i volumi di  $L$  e  $C$  rispettivamente,  $u^{(i)}$  è la componente  $i$ -esima di  $u$ , e

$$V_1 + V_2 = \text{mis}(\Omega').$$

## 5. RAPPRESENTAZIONE DI FUNZIONALI SU $GBV(\Omega, \mathbb{R}^k) - GSBV(\Omega, \mathbb{R}^k)$

Tra i funzionali definiti su  $GBV(\Omega, \mathbb{R}^k)$  che ammettono su  $GSBV(\Omega, \mathbb{R}^k)$  una rappresentazione del tipo (1) conviene infine considerare quelli che hanno una rappresentazione del tipo

$$(3) \quad F(u) = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx + \int_{S_u} \phi(\text{tr}^+(x, u, \nu), \text{tr}^-(x, u, \nu), \nu) dH_{n-1} + \int_{\Omega} \psi(x, \tilde{u}, CDu)$$

dove  $\psi: \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k) \rightarrow [0, +\infty]$  è Boreliana e positivamente omogenea di grado 1 nell'ultima variabile, la funzione  $\tilde{u}$  è definita da

$$\tilde{u}(x) = \text{ap} \lim_{y \rightarrow x} u(y)$$

per ogni  $x \in \Omega - S_u$  e il significato del simbolo  $\int_{\omega} \psi(x, u, CDu)$  sarà precisato nella prossima definizione. A tale definizione dobbiamo premettere il seguente teorema dimostrato in [3].

**TEOREMA.** - Per ogni  $u \in \mathcal{M}f(\Omega, \mathbb{R}^k)$  esistono una misura di Borel non negativa  $\mu$  e una funzione Boreliana  $w: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k)$  tali che

$$(i) \quad H_{n-1}(B) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(B) = 0;$$

$$(ii) \quad H_1(C) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x \in \Omega : u(x) \in C\}) = 0;$$

$$(iii) \quad \mu(\Omega - \text{GBV dom}(u)) = 0;$$

$$(iv) \quad |w(x)| = 1 \quad \mu \text{ quasi ovunque in } \Omega.$$

(v) per ogni funzione non negativa  $g \in C^0(\Omega \times \mathbb{R}^k)$  avente supporto compatto in un insieme  $E$  tale che  $u \in \text{GBV}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^k; E)$ , ed ogni funzione  $\Theta: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^k) \rightarrow [0, +\infty[$  convessa e positivamente omogenea di grado 1 vale la formula di rappresentazione

$$\inf \{ \bar{F}_{g,\Theta}(u, A - K) : K \text{ compatto}, H_{n-1}(K) < +\infty \} = \\ = \int_{\text{GBV dom}(u) \cap A} g(x, u) \Theta(\nabla u) dx + \int_{\text{GBV dom}(u) \cap A} g(x, \tilde{u}) \Theta(w) d\mu$$

ove

$$\bar{F}_{g,\Theta}(u, A) = \inf \left\{ \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_A g(x, u_h) \Theta(\nabla u_h) dx : u_h \in C^1(A; \mathbb{R}^k), u_h \rightarrow u \text{ quasi ovunque in } A \right\}.$$

Un problema ancora irrisolto riguardante la funzione  $w$  è quello di stabilire se  $w(x)$  sia o meno in  $\mu$  quasi tutti i punti  $x$  di  $\Omega$  una applicazione lineare di rango 1. La funzione d'insieme

$$\int_B w d\mu$$

definita per tutti gli insiemi di Borel  $B$  tali che  $\mu(B) < +\infty$ , sarà detta "parte Cantoriana" della derivata di  $\mu$ . Tale nome è giustificato dal fatto che per la funzione di Cantor-Vitali la derivata nel senso delle distribuzioni della funzione coincide con la sua parte Cantoriana ed è concentrata sull'insieme perfetto di Cantor. Possiamo ora dare la

DEFINIZIONE 6. - Data una funzione Boreliana non negativa  $\psi(x, u, p)$ , positivamente omogenea in  $p$ , porremo con notazione analoga a quella usata in [17], [18],

$$\int_B \psi(x, \tilde{u}, CDu) = \int_B \psi(x, \tilde{u}, \omega) d\mu$$

per ogni insieme di Borel  $B \subset \text{GBV dom}(u)$ .

Per i funzionali del tipo (3) si pongono naturalmente problemi di semicontinuità analoghi a quelli cui abbiamo accennato nel paragrafo 3. Sottolineiamo infine che, in ipotesi abbastanza generali sugli integrandi  $f$  e  $\psi$ , una condizione necessaria per la semicontinuità, da aggiungersi a quelle considerate nel paragrafo 3, è la seguente

$$\psi(x, u, p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u, tp)}{t}.$$

Infine, desideriamo ringraziare E. Virga, le cui conversazioni ci hanno suggerito lo studio dei problemi considerati in questo lavoro.

## 5. REFERENCES

- [1] E. ACERBI e N. FUSCO - *Semicontinuity problems in the calculus of variations*. «Arch. Rational Mech. Anal.», 86, 125-145, 1986.
- [2] L. AMBROSIO - *A compactness theorem for a special class of functions of bounded variation*. Di prossima pubblicazione sul *Boll. U.M.I.*
- [3] L. AMBROSIO - *Existence theory for a new class of variational problems*. Di prossima pubblicazione.
- [4] H. BREZIS, J.M. CORON e E.H. LIEB - *Estimations d'énergie pour des applications de  $R^3$  a valeurs dans  $S^2$* . «C.R. Acad. Sc. Paris», 303, 207-210, 1986.
- [5] H. BREZIS, J.M. CORON e E.H. LIEB - *Harmonic maps with defects*, di prossima pubblicazione su «Comm. Math. Phys.», IMA preprint 253.
- [6] A.P. CALDERON e A.Z. ZYGMUND - *On the differentiability of functions which are of bounded variation in Tonelli's sense*. «Revista Union Mat. Arg.», 20, 101-121, 1960.
- [7] S. CHANDRASEKHAR - *Liquid crystals*. Brown, Dienes and Labes Editors, Gordon and Breach, New York, 331-340, 1966.
- [8] S. CHANDRASEKHAR - *Liquid crystals*. Cambridge University Press, Cambridge, 1977.
- [9] G. DAL MASO - *Integral representation on  $BV(\Theta)$  of  $\Gamma$ -limits of integral functionals*. «Manuscripta Math.», 30, 387-413, 1980.
- [10] E. DE GIORGI - *Su teoria generale della misura (r-1)-dimensionale in uno spazio a r dimensioni*. «Ann. Mat. Pura Appl.», 36, 191-213, 1954.
- [11] E. DE GIORGI - *Nuovi teoremi relativi alle misure (r-1)-dimensionali in uno spazio a r dimensioni*. «Ricerche Mat.», 4, 95-113, 1955.
- [12] E. DE GIORGI - *Generalized limits in Calculus of Variations*. Topics in Functional Analysis 1980-81, Quaderno Scuola Normale Superiore, 117-148, 1981.
- [13] E. DE GIORGI - *Some semicontinuity and relaxation problems*. Ennio De Giorgio Colloquium, Research Notes in Mathematics 125, Pitman Publishing Inc., Boston, 1985.
- [14] E. DE GIORGI e G. LETTA - *Une notion générale de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble*. «Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.», (4), 4, 61-99, 1977.
- [15] J.L. ERICKSEN - *Advances in liquid crystals*. Vol. 2, Glenn and Brown editors, Academic Press, New York, 233-298, 1976.
- [16] H. FEDERER - *Geometric Measure Theory*. Springer Verlag, Berlin, 1969.
- [17] E. GIUSTI - *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Birkhäuser, Boston, 1984.
- [18] M. MIRANDA - *Distribuzioni aventi derivate misure. Insieme di perimetro localmente finito*. «Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.», (3), 18, 27-56, 1964.
- [19] M. MIRANDA - *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani*. «Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.», (3) 18, 515-542, 1964.
- [20] L. MODICA e S. MORTOLA - *Un esempio di  $\Gamma$ -convergenza*. «Boll. Un. Mat. Ital.», (5) 14 B, 285-299, 1977.
- [21] C.B. MORREY - *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Springer Verlag, Berlin, 1966.
- [22] D. MUMFORD e J. SHAH - *Boundary detection by minimizing functionals* - «Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition», San Francisco, 1985.
- [23] D. MUMFORD e J. SHAH - *Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems* - To appear.

- [24] E. VIRGA – *Forme di equilibrio di piccole gocce di cristallo liquido*. Preprint n. 562 dell'Istituto di Analisi Numerica, Pavia, 1987.
- [25] A.I. VOL'PERT – *Spaces  $BV$  and Quasi-Linear Equations*. «Math. USSR Sb.», 17, 1972.
- [26] A.I. VOL'PERT e S.I. HUDJAEV – *Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics*. Martinus Nijhoff Publisher, Dordrecht, 1985.
- [27] H. WHITNEY – *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*. «Trans. Amer. Mat. Soc.», 36, 63-89, 1934.