Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Salvatore Giuffrida

Sulla trasversalità di due superfici in $\mathbf{P}^3$

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **81** (1987), n.2, p. 119–123.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1987_8_81_2_119_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1987.

Atti Acc. Lincei Rend. fis.
(8), LXXXI (1987), pp. 119-123

Geometria. — *Sulla trasversalità di due superfici in* $\mathbf{P}^3$ (*). Nota di SALVATORE GIUFFRIDA (**), presentata (***) dal Socio E. MARCHIONNA.

ABSTRACT. — *On transversality of two surfaces in* $\mathbf{P}^3$. Let $C \subset \mathbf{P}^3$ be a reduced and irreducible curve, and $I(C) = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ be the homogeneous ideal of C, where $f_1, f_2, \ldots, f_m$ are a minimal system of generators for I (C).

In § 2 we find a necessary and sufficient condition in order that two surfaces F_i, F_j, having equations $f_i = 0$, $f_j = 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$, intersect transversally along C.

In § 3 we give an application of this result to arithmetically Cohen-Macaulay curves.

KEY WORDS: Transversality; Surface; Curve.

RIASSUNTO. — Siano $C \subset \mathbf{P}^3$ una curva ridotta ed irriducibile, ed $f_1, f_2, \ldots f_m$ un sistema minimale di generatori dell'ideale omogeneo I (C).

Nel § 2 determiniamo una condizione necessaria e sufficiente perché due superfici F_i, F_j, aventi equazioni $f_i = 0$, $f_j = 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$, si sechino trasversalmente lungo C.

Nel § 3 applichiamo questo risultato alle curve aritmeticamente di Cohen-Macaulay.

§ 1

Sia C una curva ridotta ed irriducibile di $\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^3_k$, spazio proiettivo su un campo k algebricamente chiuso.

Indichiamo con I (C) l'ideale omogeneo di C in $K[x_0, x_1, x_2, x_3]$, con $f_1, f_2, \ldots, f_m$ $(m \geq 3)$ un sistema minimale di generatori di I (C), e con $F_1, F_2, \ldots, F_m$ le superfici aventi equazioni rispettivamente $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots, f_m = 0$.

Possiamo supporre senza perdita di generalità che le superfici $F_1, F_2, \ldots, F_m$ siano ridotte ed irriducibili.

Diremo che due delle suddette superfici, per esempio F_1 ed F_2, si recano trasversalmente lungo C se la curva è una sottovarietà semplice per ciascuna delle due superfici ed i punti di C nei quali il piano tangente ad F_1 coincide col piano tangente ad F_2 formano un chiuso di dimensione zero di C (cfr. [G] per una definizione più completa di molteplicità di intersezione di due varietà lungo una sottovarietà comune).

(*) Lavoro eseguito con fondi erogati dal M.P.I.
(**) Dipartimento di Matematica - Catania.
(***) Nella seduta del 13 dicembre 1986.

È facile verificare che F_1 ed F_2 si recano trasversalmente lungo C se e solo se esiste un aperto affine U nel quale

$$(R/I_X)_{I_C} \simeq (R/I_C)_{I_C}$$

ove $R = \Gamma(U, \mathcal{O}_P)$, I_C ed I_X sono gli ideali affini di C e della completa intersezione $X = F_1 \cap F_2$.

Per le nozioni non esplicitamente richiamate si rinvia ad [H].

§ 2.

Consideriamo la risoluzione localmente libera di C ([R]):

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_P(-a_i) \xrightarrow{f=(f_1, f_2, \ldots, f_m)} \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

in cui gli interi positivi a_i sono i gradi dei generatori f_i, $\mathcal{E}$ è un fibrato vettoriale di rango $m-1$; consideriamo anche il diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_P(-a_i) \arrow[d, "\pi"] \\ & \bigoplus_{i=3}^{m} \mathcal{O}_P(-a_i) \end{tikzcd}$$

in cui π è la proiezione sulle ultime $m-2$ componenti, $\psi = \pi \circ \varphi$.

PROPOSIZIONE. *Con le notazioni precedenti condizione necessaria e sufficiente perché* F_1 *ed* F_2 *si sechino trasversalmente lungo* C *è che il morfismo* ψ *abbia rango massimo nel punto generico di* C.

Dimostrazione. Consideriamo il diagramma commutativo a righe esatte.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r, "\varphi"] & \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_P(-a_i) \arrow[r, "f=(f_1, f_2, \ldots, f_m)"] & \mathcal{O}_P \arrow[r, "p"] & \mathcal{O}_C \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_P(-a_1-a_2) \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & \mathcal{O}_P(-a_1) \oplus \mathcal{O}_P(-a_2) \arrow[r, "f'=(f_1, f_2)"] \arrow[u, "\beta"'] & \mathcal{O}_P \arrow[r, "p'"] \arrow[u, equal] & \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[u, "\gamma"] & 0 \end{tikzcd}$$

in cui la seconda riga è la risoluzione (Koszul) della completa intersezione $X = F_1 \cap F_2$.

Considerando un aperto affine U in cui E si banalizzi e localizzando nel punto generico di C si ha il diagramma

$$
(1) \qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathrm{R}_{\mathrm{I}_\mathrm{C}})^{m-1} \arrow[r, "\varphi"] & (\mathrm{R}_{\mathrm{I}_\mathrm{C}})^{m} \arrow[r, "f=(f_1, f_2, \dots, f_m)"] & \mathrm{R}_{\mathrm{I}_\mathrm{C}} \arrow[r, "p'"] & (\mathrm{R}/\mathrm{I}_\mathrm{C})_{\mathrm{I}_\mathrm{C}} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{R}_{\mathrm{I}_\mathrm{C}} \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[u, "\alpha"'] & (\mathrm{R}_{\mathrm{I}_\mathrm{C}})^{2} \arrow[r, "f'=(f_1, f_2)"] \arrow[u, "\beta"'] & \mathrm{R}_{\mathrm{I}_\mathrm{C}} \arrow[r, "p"] \arrow[u, equal] & (\mathrm{R}/\mathrm{I}_\mathrm{X})_{\mathrm{I}_\mathrm{C}} \arrow[r] \arrow[u, "\gamma"'] & 0
\end{tikzcd}
$$

in cui I_C ed I_X sono gli ideali affini di C ed X in $\mathrm{R} = \Gamma(\mathrm{U}, \mathcal{O}_\mathrm{P})$. Abbiamo indicato ancora con $f_1, f_2, \dots f_m$ le equazioni affini delle superfici $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \dots, \mathrm{F}_m$. Il morfismo β è l'immersione sulle due prime componenti, γ è suriettivo.

Sia $\mathrm{A} \in \mathrm{R}^{m,-m1}$ la matrice associata a φ; indichiamo con A_{ij} la sottomatrice che si ottiene da A sopprimendo le righe di posti i e j.

Nell'ipotesi che $rk(\mathrm{A}_{12}) = m - 2$ in un aperto di C, per provare che F_1 ed F_2 si secano trasversalmente lungo C, basta provare che γ è un isomorfismo.

Nel diagramma (1) sia $a \in \operatorname{Ker} \gamma$, $\bar{a} \in p'^{-1}(a)$; poiché $p(\bar{a}) = 0$ risulta $\bar{a} \in \operatorname{Im} f$. Sia $q = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_m) \in (\mathrm{R}_{\mathrm{I}_\mathrm{C}})^m$ un elemento tale che $f(q) = \bar{a}$.

Vogliamo provare che esiste un elemento $\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, 0, \dots, 0)$ tale che $f(\bar{q}) = f'(\bar{q}_1, \bar{q}_2) = \bar{a}$. Ciò si verifica se e solo se esiste un elemento $q' = (q'_1, q'_2, q_3, \dots, q_m) \in (\mathrm{R}_{\mathrm{I}_\mathrm{C}})^m$ tale che $q' \in \operatorname{Im} \varphi$, cioè se il sistema

$$
(2) \qquad \mathrm{AZ} = q'
$$

ha soluzione in $\mathrm{R}_{\mathrm{I}_\mathrm{C}}$ per qualche $q'_1, q'_2 \in \mathrm{R}_{\mathrm{I}_\mathrm{C}}$.

Dal sistema (2) sopprimendo le prime due righe si ottiene un altro sistema

$$
(3) \qquad \mathrm{A}_{1,2}\mathrm{Z} = \begin{bmatrix} q_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_m \end{bmatrix}
$$

che ha soluzione in $\mathrm{R}_{\mathrm{I}_\mathrm{C}}$ perché $rk(\mathrm{A}_{1,2}) = m - 2$ nel punto generico di C, quindi i minori di ordine $m - 2$ di $\mathrm{A}_{1,2}$ non sono tutti nulli lungo C.

Una soluzione del sistema (3) è anche una soluzione del sistema (2) per l'arbitrarietà di q'_1 e q'_2.

Viceversa. Poiché le superfici F_1 ed F_2 si secano trasversalmente lungo C, il morfismo

$$
\mathrm{A}_{1,2} : (\mathrm{R}_{\mathrm{I}_\mathrm{C}})^{m-1} \longrightarrow (\mathrm{R}_{\mathrm{I}_\mathrm{C}})^{m-2}
$$

individuato dalla matrice $\mathrm{A}_{1,2}$ è suriettivo.

Infatti preso un elemento $q = (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m) \in (R_{I_C})^m$ risulta, dal diagramma (1), $p' \circ f(q) = p \circ f(q) = 0$, perciò esiste un elemento (q'_1, q'_2) in $(R_{I_C})^2$ tale che $f'(q'_1, q'_2) = f(q)$.

Poiché $f(q_1 - q'_1, q_2 - q'_2, q_3, \ldots, q_m) = 0$ il sistema

$$AZ = \begin{bmatrix} q_1 - q'_1 \\ q_2 - q'_2 \\ q_3 \\ \cdot \\ q_m \end{bmatrix}$$

ha soluzione in R_{I_C}, quindi anche il sistema

$$A_{1,2} Z = \begin{bmatrix} q_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_m \end{bmatrix}$$

ha soluzione qualunque siano $q_3, \ldots, q_m$ in R_{I_C}.

È suriettivo anche il morfismo

$$\Lambda^{m-2} A_{1,2} : \Lambda^{m-2} (R_{I_C})^{m-1} \longrightarrow \Lambda^{m-2} (R_{I_C})^{m-2} = R_{I_C}$$

che è individuato dai minori di ordine $m - 2$ di $A_{1,2}$.

Questi ultimi, così, risultano essere non tutti nulli nel punto generico di C.

§ 3.

Vogliamo applicare il Teorema dimostrato nel § 2 alle curve aritmeticamente di Cohen–Macaulay.

PROPOSIZIONE. *Se* C *è una curva aritmeticamente di Cohen-Macaulay,* $I(C) = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, *allora due qualunque superfici* F_i, F_j *aventi equazioni* $f_i = 0$, $f_j = 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ i \neq j$ *si secano trasversalmente lungo* C.

Dimostrazione. Basta provare la tesi per F_1 ed F_2.

È noto che C ammette una risoluzione minimale libera ([P.S.])

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{m-1} \mathcal{O}_P(-b_i) \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_P(-a_i) \xrightarrow{f=(f_1, f_2, \ldots, f_m)} \mathcal{O}_P - \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

in cui $a_i = \deg f_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, il morfismo φ è individuato da una matrice $A = (a_{rs})$ ad elementi forme di grado positivo in $k[x_0, x_1, x_2, x_3]$, i cui minori di ordine $m - 1$ hanno gradi $a_1, a_2, \ldots, a_m$ e generano $I(C)$.

Indichiamo con A_i e con $A_{i,j}$ le sottomatrici ottenute da A cancellando rispettivamente la i-esima riga e le righe di posti i, j. Poniamo $\alpha_i = \det A_i$.

Dobbiamo provare che $A_{1,2}$ ha rango massimo in un aperto di C. Siano $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ i minori di ordine $m - 2$ di $A_{1,2}$, e supponiamo che $\beta_t \in I(C)$ $(t = 1, 2, \ldots, m-1)$.

Si avrebbero le relazioni

$$\beta_t = p_{t1}\,\alpha_1 + p_{t2}\,\alpha_2 + \ldots + p_{tm}\alpha_m$$

nelle quali deve essere $p_{t1} = p_{t2} = 0$ in quanto α_1 ed α_2 hanno grado maggiore di $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$.

Quindi $\beta_t \in (\alpha_3, \ldots, \alpha_m)$ e perciò $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha_3, \ldots, \alpha_m)$ che è assurdo.

BIBLIOGRAFIA

[G] D. GALLARATI (1976) – *Problemi di completa interferenza in Geometria Algebrica.* « Rend. del Sem. della Fac. di Scienze dell'Università di Cagliari », *46*.

[H] R. HARTSHORNE (1977) – *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York.

[P.S.] C. PESKINE e L. SZPIRO (1974) – *Liaison des varietes algebriques.* « Inv. Math. », *26*.

[R] P. RAO (1979) – *Liaison among curves in* $\mathbf{P}^3$. « Inv. Math. », *50*.