Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Guido Zappa

Sulle S-partizioni strette nei gruppi localmente finiti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **78** (1985), n.4, p. 129–132.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1985_8_78_4_129_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1985.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 aprile 1985

Presiede il Presidente della Classe GIUSEPPE MONTALENTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Teoria dei gruppi. — *Sulle S-partizioni strette nei gruppi localmente finiti* (*). Nota (**) del Socio GUIDO ZAPPA.

SUMMARY. — A characterization of strict S-partitions in locally finite groups is given.

Se G è un gruppo e S un suo sottogruppo si dice S–*partizione stretta* di G un insieme Σ di sottogruppi H_i di G, contenenti S, tali che ogni elemento di $G \setminus S$ appartenga ad uno ed uno solo dei sottogruppi H_i. Se $S = \langle 1 \rangle$ le S–partizioni strette si riducono alle ordinarie partizioni. Una S–partizione stretta si dice *banale* se consta di un solo sottogruppo (necessariamente coincidente con G). In un lavoro del 1966 [3] ho caratterizzato le S–partizioni strette dei gruppi finiti.

Il problema di determinare le S–partizioni strette di un gruppo si riconduce subito al caso in cui S è antinormale cioè non contiene sottogruppi normali $\neq \langle 1 \rangle$ di G. Infatti, se N è l'intersezione dei coniugati di S in G, l'insieme Σ di sottogruppi di G contenenti S è una S–partizione stretta di G se e solo se l'insieme $\bar{\Sigma}$ costituito dai sottogruppi H_i/N di G/N con $H_i \in \Sigma$ è una S/N–partizione stretta di G/N, e S/N è ovviamente antinormale in G/N.

In [3] fu provato che se G è un gruppo finito e S un suo sottogruppo antinormale $\neq \langle 1 \rangle$, G è dotato di una S–partizione stretta non banale se e solo se

(*) Lavoro finanziato parzialmente dai contributi del MPI e del CNR.

(**) Presentata nella seduta del 13 aprile 1985.

è un gruppo di Frobenius e $G = SN$ con S complemento di Frobenius e N p–sottogruppo di Sylow normale (nucleo di Frobenius) dotato di una partizione non banale formata da sottogruppi normalizzati da S.

Nella presente Nota questo risultato viene esteso ai gruppi localmente finiti e si approfondisce lo studio della struttura del sottogruppo N (sia nel caso di G finito che localmente finito), mostrando che N deve verificare una delle condizioni seguenti: *a*) N ha esponente p; *b*) il sottogruppo di Hughes $H_p(N)$ (cioè il sottogruppo generato dagli elementi di N di periodo $\neq p$) ha indice almeno p^2 in N. Si possono costruire facilmente esempi di gruppi con S–partizioni strette in cui N verifica il caso *a*), mentre non si sa se esistano analoghi gruppi in cui N verifichi il caso *b*).

Ritengo più probabile che non ne esistano, visto che, anche nel caso finito, i gruppi in cui il sottogruppo di Hughes ha indice $\geq p^2$ sono poco frequenti e di struttura alquanto complessa.

I risultati contenuti in questa Nota sono stati esposti nel Convegno Internazionale sui Gruppi infiniti tenuto a Heraklion (Creta, Grecia) nell'agosto 1984.

1. LEMMA 1. *Sia* H *un p–gruppo finito e* K *un suo sottogruppo di indice p tale che ogni elemento di* $H \setminus K$ *abbia periodo p. Inoltre* H *ammetta un automorfismo f che non lasci fermo alcun elemento* $\neq 1$ *di* H *e fissi* K *ed ogni sottogruppo d'ordine p di* H *che non sia contenuto in* K. *Allora ogni elemento* $\neq 1$ *di* H *ha periodo p.*

Dimostrazione. Se $a \in H \setminus K$, Ka è un generatore di H/K, quindi $(Ka)^f = (Ka)^r$ con $1 \leq r < p$, onde se $x \in Ka$, x^f deve essere potenza di x e stare in $(Ka)^r$, e pertanto $x^f = x^r$ con r non dipendente da x e > 1.

Sia ora $a \in H \setminus K$ e sia $C = C_K(a)$ e $n \in C$. Allora $(na)^f = na^r = n^r a^r$, e d'altra parte $(na)^f = n^f a^f = n^f a^r$. Segue $n^f = n^r$ per ogni $n \in C$.

Per dimostrare il Lemma procediamo per assurdo, e supponiamo che in H vi sia un elemento $b \neq 1$ che non abbia periodo p. Evidentemente $b \in K$. Inoltre $b \notin C$, altrimenti, essendo $ba \notin K$, si avrebbe $b^p a^p = (ba)^p = 1$, ed essendo $a^p = 1$, si avrebbe $b^p = 1$ contro l'ipotesi. Segue $C < K$ e quindi $C\langle a\rangle < K\langle a\rangle$, visto che $|C\langle a\rangle : C| = |K\langle a\rangle : K| = p$.

Sia ora T un sottogruppo di $H = K\langle a\rangle$ contenente $C\langle a\rangle$ e tale che $|T : C\langle a\rangle| = p$, e sia $L = T \cap K$. Allora $C \leq L$ onde $L\langle a\rangle = LC\langle a\rangle = (T \cap K)\, C\langle a\rangle = T \cap (KC\langle a\rangle = T \cap K\langle a\rangle = T$. Segue che L e $C\langle a\rangle$ hanno indice p in T e quindi sono normali in T, onde $L \cap C\langle a\rangle$ ha indice p^2 in T ed è in esso normale. Ma è $C \leq L \cap C\langle a\rangle$, e poiché sia C che $L \cap C\langle a\rangle$ hanno indice p in $C\langle a\rangle$, si ha $L \cap C\langle a\rangle = C$. Pertanto C è normale in T e T/C ha ordine p^2, e pertanto è abeliano. Sia $l \in L \setminus C$. Essendo l ed a in T, e poiché T/C è abeliano, segue $[a, l] \in C$. Sia $[a, l] = c$. Allora anche $[a, al] = c$. Poniamo $M = \langle a, l\rangle$. Allora $c \in M'$ onde, essendo $M' \neq \langle 1\rangle$ si ha $[M, M'] < M'$ ed avendosi $[M, M']\langle c\rangle = M'$, si ha $c \notin [M, M']$. Si ha $c^f = a^{-f}(al)^{-f} a^f (al)^f = a^{-r}(al)^{-r} a^r (al)^r \equiv c^{r^2} \pmod{[M, M']}$. D'altra parte, essendo $c \in C$, si ha, come abbiamo visto, $c^f = c^r$, onde $c^{r^2} \equiv c^r$ (mod $[M, M']$) quindi $r = 1$ o $c \in [M, M']$ assurdo. Segue che ogni elemento $\neq 1$ di H ha periodo p.

LEMMA 2. *Sia* N *un p–gruppo localmente finito dotato di una partizione* Σ *non banale. Supponiamo inoltre che* N *ammetta un automorfismo f di periodo finito il quale non lasci fermo alcun elemento* $\neq 1$ *di* N *e muti in sè ogni sottogruppo appartenente a* Σ. *Allora si presenta uno dei casi seguenti*:

a) N *ha esponente* p;

b) *Il sottogruppo di Hughes* $H_p(N)$ *di* N *ha indice* $\geq p^2$ *in* N.

Dimostrazione. Supponiamo che non si verifichi il caso *a*). Allora è possibile trovare un sottogruppo finito P di N, non contenuto in alcun sottogruppo appartenente a Σ, e contenente qualche elemento di periodo $> p$. L'automorfismo f trasforma P in un numero finito di sottogruppi $P_1 = P, P_2, \dots p_m$. Il sottogruppo Q generato dai P_i $(i = 1, \dots, m)$ è finito, contiene elementi di periodo $> p$, e la restrizione di f a Q, che indicheremo ancora con f, è un automorfismo di Q. Inoltre i sottogruppi intersezione di Q coi sottogruppi in Σ costituiscono una partizione $\bar{\Sigma}$ non banale di Q. Inoltre f muta in sé ogni sottogruppo appartenente a $\bar{\Sigma}$. In base ad un risultato di Kegel [1], $H_p(N)$ è contenuto in un sottogruppo K appartenente a Σ, onde $H_p(N) \leq K < N$, e, posto $\bar{K} = K \cap Q$, si ha $H_p(Q) \leq \bar{K} < Q$. Poiché P contiene qualche elemento di periodo $> p$, è $H_p(Q) \neq \langle 1 \rangle$. Se $H_p(N)$ ha indice p in N, anche $H_p(Q)$, non potendo coincidere con Q, ha indice p in Q, e pertanto anche K ha indice p in Q. Sono allora verificate le condizioni del Lemma 1, onde ogni elemento $\neq 1$ di Q ha periodo p, contro quanto si è visto. Pertanto $H_p(N)$ ha indice $\geq p^2$ in N, e si verifica il caso *b*).

2. TEOREMA 1. *Sia* G *un gruppo ed* S *un suo sottogruppo* $\neq \langle 1 \rangle$ *e antinormale. Allora se* G *possiede una* S–*partizione stretta non banale* Σ, *si ha* $(g^{-1} S g) \cap S = \langle 1 \rangle$ *per ogni* $g \in G \setminus S$.

Dimostrazione. Basta ripetere pari pari il ragionamento contenuto nel primo comma della dimostrazione del Teorema 2.1 in [3], dove l'ipotesi che G sia finito non viene mai utilizzata.

TEOREMA 2. *Sia* G *un gruppo localmente finito ed* S *un suo sottogruppo antinormale* $\neq \langle 1 \rangle$. G *ammette una* S–*partizione stretta non banale se e solo se*:

1) $G = NS$ *con* N *p–sottogruppo di Sylow normale di* G;

2) *Per ogni* $g \in N$, $g \neq 1$, *è* $(g^{-1} S g) \cap S = \langle 1 \rangle$;

3) N *ammette una partizione non banale* Σ_1;

4) N *ha esponente p o* $H_p(N)$ *ha indice* $\geq p^2$ *in* N;

5) *Se* $K \in \Sigma_1$, *si ha* $S \leq N_G(K)$.

Ogni partizione stretta non banale di G *è allora costituita dai sottogruppi* SY *con* Y *variabile in una partizione non banale* Σ_1 *di* N *verificante la* 5).

Dimostrazione. In base al Teorema 1, per ogni $g \in G \setminus S$ si ha $(g^{-1} Sg) \cap \cap S = \langle 1 \rangle$. Pertanto G è un gruppo di Frobenius e S è un suo complemento di Frobenius. Allora in base al Teorema 1.J.2 di [2] gli elementi di G non contenuti in alcun coniugato di S costituiscono un sottogruppo normale N nilpotente tale che $N \cap S = 1$ e N è l'unico nucleo di Frobenius di G. Inoltre, se π è l'insieme dei primi che dividono gli ordini degli elementi di N, G è π-chiuso e $N = O_\pi(G)$. Si vede ora subito che i sottogruppi $N \cap H_i$ con $H_i \in \Sigma$ formano una partizione non banale Σ_1 di N.

In base alla « Folgerung 2.2 » di [1], N, essendo un gruppo nilpotente localmente finito dotato di una partizione non banale, è un p-gruppo. Ne segue che G è un gruppo p-chiuso e $N = O_p(G)$ è l'unico p-sottogruppo di Sylow-normale, di G. Sono quindi verificate le 1), 2), 3). Ogni elemento di S trasfor, ma N in sé, perché N è normale in G, e trasforma ogni H_i in sé, perché $S \leq H_i$. Ne segue che ogni elemento di S trasforma in sé ogni sottogruppo $N \cap H_i \in \Sigma_1$, onde vale la 5). Infine un elemento $\neq 1$ di S induce in N un automorfismo di periodo finito che non fissa nessun elemento $\neq 1$ di N, e muta in sé ogni sottogruppo $\in \Sigma_1$. In base al Lemma 2, N ha esponente p, o $H_p(N)$ ha indice $\geq p^2$ in N. Pertanto vale la 4).

Viceversa si vede facilmente che se G verifica le 1), 2), 3), 4), 5), i sottogruppi NK con K in Σ_1 costituiscono una S-partizione stretta non banale di G.

Citazioni

[1] O.K. Kegel (1962) – *Lokal endliche Gruppen mit nicht-trivialer Partition*, « Arch. d. Math. », *13*, 10-28.

[2] O.H. Kegel, B.A.F. Wehrfritz (1973) – *Locally finite groups*, North-Holland Math. Library.

[3] G. Zappa (1966) – *Sulle* S-*partizioni di un gruppo finito*, « Ann. di Mat. », *74*, 1-14.