
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ANTONINO VALENTI

Onde sferiche in termoelasticità lineare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 72 (1982), n.4, p. 235–241.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_72_4_235_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Onde sferiche in termoelasticità lineare* (*).
Nota di ANTONINO VALENTI (**), presentata (***) dal Socio G. GRIOLI.

SUMMARY. — After writing the equations which characterize the thermomechanics of hyperelastic continua subject to small transformations according to a recent hypothesis on the heat flux vector, we study the spherical thermomechanical waves.

1. INTRODUZIONE

Al fine di eliminare il cosiddetto paradosso della propagazione del calore con velocità infinita, che si presenta nella teoria classica della conduzione del calore, istituita da Fourier, più volte si è pensato ad una riformulazione della legge di propagazione termica.

G. Grioli [1] recentemente ha proposto una nuova modifica della classica legge di Fourier, stabilendo una completa interazione tra propagazione termica e propagazione meccanica. La teoria che deriva da tale proposta è stata applicata ai fluidi non viscosi, ai corpi elastici ed ai conduttori rigidi [2], [3], [4].

Lo scopo di questa Nota è di indagare, nell'ambito di questa nuova teoria, sulla possibilità di propagazione di onde termomeccaniche sferiche in un continuo infinito, iperelastico, isotropo e soggetto a piccole trasformazioni.

Scritte le equazioni che caratterizzano la termomeccanica dei continui iperelastici soggetti a piccole trasformazioni e fatto notare che in tal caso la legge di G. Grioli assume la forma di quella di C. Cattaneo [5], si trova che, in analogia al caso classico, l'accoppiamento termomeccanico sussiste solamente nelle onde longitudinali. Si studiano, poi, le onde termomeccaniche sferiche e si vede che, in generale, sono sia dispersive che dissipative ed in esse si assommano due contributi distinti cui si dà il nome di componente d'onda « quasi elastica » e componente d'onda « quasi termica ».

2. SULLE EQUAZIONI DELLA TERMOELASTICITÀ LINEARE

Sia C la configurazione attuale di un continuo che subisce un processo evolutivo termomeccanico e si denoti con C_0 una configurazione di riferimento. Si denotino con x_r le coordinate del generico elemento P di C e con y_r le coor-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M.

(**) Istituto di Analisi - Geometria - Meccanica Razionale, via Del Rotolo, 46 - Catania.

(***) Nella seduta del 13 marzo 1982.

dinate del corrispondente P_0 di C_0 , rispetto ad un prefissato sistema di riferimento cartesiano trirettangolo $0, i_1, i_2, i_3$.

Sia

$$(1) \quad x_r = x_r(y_r, t)$$

la rappresentazione della trasformazione fra C_0 e C , continua invertibile e dotata delle ben note proprietà di regolarità e plausibilità fisica.

Supposto il continuo soggetto a piccole trasformazioni, le caratteristiche di deformazione ε_{rs} si scrivono nella forma:

$$(2) \quad \varepsilon_{rs} = (u_{r,s} + u_{s,r})/2,$$

dove le u_r sono le componenti dello spostamento $P_0 P$ e $(\cdot)_{,k}$ denota $\partial/\partial y_k$; mentre le equazioni indefinite, in assenza di forze di massa, acquistano la forma:

$$(3) \quad Y_{rs,s} = -\rho_0 \ddot{u}_r,$$

dove Y_{rs} sono le componenti del tensore degli sforzi, ρ_0 è la densità nella configurazione di riferimento ed il punto denota $\partial/\partial t$.

Se il continuo è iperelastico, indicando con I l'energia libera, com'è noto si ha:

$$(4) \quad Y_{rs} = - \frac{\partial I}{\partial \varepsilon_{rs}}.$$

Infine, se il continuo è isotropo, supposto C_0 uno stato di equilibrio naturale, l'energia libera I è data dalla seguente espressione:

$$(5) \quad I = \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{kk} \varepsilon_{hh} + \mu \varepsilon_{hk} \varepsilon_{hk} - \beta_0 \varepsilon_{kk} (T - T_0) + \frac{\gamma_0}{2} (T - T_0)^2,$$

dove λ e μ sono i coefficienti di Lamè, $\beta_0 = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$ (α_t è il coefficiente di dilatazione termica lineare), T e T_0 sono la temperatura assoluta in C e in C_0 rispettivamente.

I vari coefficienti sono costanti e soddisfano le note relazioni:

$$(6) \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0, \quad \gamma_0 = -\frac{c}{T} < 0$$

essendo c il calore specifico a configurazione costante.

Posto:

$$(7) \quad \theta = T - T_0, \quad |\theta| \ll T_0, \quad T_0 > 0,$$

tenendo conto delle (2), (4), (5) e (7), le (3) si scrivono:

$$(8) \quad \mu u_{r,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,kr} - \beta_0 \theta_{,r} = \rho_0 \ddot{u}_r.$$

Per un continuo termoelastico, conseguenza dell'uguaglianza di Clausius-Duhem è la ben nota equazione (che traduce il principio di bilancio dell'energia):

$$(9) \quad c_0 \dot{\theta} + \beta_0 \dot{u}_{k,k} + Q_{k,k} = 0,$$

essendo $c_0 = -\gamma_0 T_0$ e $\mathbf{Q}$ il vettore che caratterizza una « piccola » variazione del flusso di calore a partire dallo stato di equilibrio naturale.

Come si è detto, si assumerà come legge costitutiva che collega il vettore flusso di calore $\mathbf{q}$ al gradiente di temperatura $\mathbf{g}$ quella data dalla relazione [1]:

$$(10) \quad \mathbf{q} = -h\mathbf{L} \int_0^\infty e^{-hs} \mathbf{g}(t-s) ds,$$

dove h è una costante di rilassamento positiva ed $\mathbf{L}$ è un operatore matriciale funzione, in generale, della deformazione e della temperatura.

Nel caso di piccole trasformazioni $\mathbf{L}$ si riduce ad un coefficiente L_0 , calcolato nella configurazione C_0 di equilibrio naturale e conseguenza differenziale della (10) è la seguente espressione:

$$(11) \quad \dot{\mathbf{Q}} + h\mathbf{Q} + hL_0 \nabla\theta = \mathbf{0},$$

che ha la stessa forma della legge proposta da C. Cattaneo [5].

Le (8) (9) e (11) costituiscono il sistema differenziale che regge le piccole trasformazioni termomeccaniche di un continuo omogeneo, iperelastico ed isotropo.

Per comodità di calcolo si introduca la seguente notazione:

$$\omega^* = \frac{c_0 V_l^2}{L_0}, \quad V_l^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}, \quad g = \frac{\beta_0}{c_0},$$

$$b = \frac{\beta_0 T_0}{\mu}, \quad \beta^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \quad \tau = \frac{\omega^*}{h},$$

e si prendano $\frac{1}{\omega^*}$, $\frac{V_l}{\omega^*}$, μ , T_0 e $c_0 V_l T_0$ come unità di tempo, di lunghezza, di sforzo, di temperatura e di flusso di calore, rispettivamente. Cosicché le (8), (9) e (11) danno luogo alle seguenti equazioni di campo adimensionali:

$$(12) \quad \begin{cases} \beta^2 \ddot{u}_r = (\beta^2 - 1) u_{k,kr} + u_{r,kk} - b\theta_{,r}, \\ \dot{\theta} + g\dot{u}_{k,k} + Q_{k,k} = 0, \\ \tau\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q} + \nabla\theta = \mathbf{0}, \end{cases}$$

dove le stesse lettere vengono utilizzate per indicare le corrispondenti grandezze adimensionali.

Si consideri, adesso, la seguente decomposizione dei vettori spostamento e flusso di calore:

$$(13) \quad \mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\eta} \quad , \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\eta} = 0 \quad ,$$

$$(14) \quad \mathbf{Q} = \nabla \psi + \nabla \times \boldsymbol{\chi} \quad , \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\chi} = 0 \quad .$$

In elasticità classica, la decomposizione (13) del vettore spostamento $\mathbf{u}$ serve a decomporre le onde meccaniche in onde longitudinali e onde trasversali. Il potenziale φ è associato alle onde longitudinali connesse con un cambiamento di volume del continuo ed il vettore $\boldsymbol{\eta}$ è associato alle onde trasversali.

Analogamente, adesso, la decomposizione (13) e (14) giova a decomporre le onde termomeccaniche in onde che chiameremo ancora: longitudinali, cui sono associati i potenziali φ , ψ e la variazione di temperatura θ ; trasversali cui sono associati i vettori $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\chi}$.

Sostituendo le (13) e (14) nelle (12) si perviene al seguente sistema:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta^2 (\nabla^2 \varphi - \ddot{\varphi}) = b\theta \quad , \\ \dot{\theta} + g\nabla^2 \dot{\varphi} + \nabla^2 \psi = 0 \quad , \\ \tau \dot{\psi} + \psi + \theta = 0 \quad , \\ \frac{1}{\beta^2} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\eta} + \ddot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{0} \quad , \\ \tau \dot{\boldsymbol{\chi}} + \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0} \quad . \end{array} \right.$$

Dal sistema (15) si nota subito che nelle onde trasversali non vi è accoppiamento termomeccanico e si ha un'onda meccanica con velocità eguale a quella che si ha in un corpo elastico semplicemente (equazione (15.IV)) ed un'onda termica, che decade rapidamente a zero e la cui espressione, che si ottiene integrando la (15.V), è:

$$(16) \quad \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}_0 e^{-t/\tau} \quad .$$

L'accoppiamento termomeccanico c'è, invece, nelle onde longitudinali.

Ciò detto, le equazioni che per il seguito si prenderanno in considerazione sono le (15.I), (15.II) e (15.III) in cui vi è l'accoppiamento termomeccanico.

3. ONDE SFERICHE IN UN CONTINUO TERMOELASTICO INFINITO

Introdotta un sistema di riferimento sferico, si cercano soluzioni delle (15.I), (15.II) e (15.III) che siano onde sferiche, soluzioni cioè del tipo:

$$(17) \quad \varphi = \varphi(r, t) \quad , \quad \theta = \theta(r, t) \quad , \quad \psi = \psi(r, t) \quad , \quad (r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad .$$

Le (15.I), (15.II) e (15.III), sotto l'ipotesi (17), acquistano la forma:

$$(18) \quad \begin{cases} \beta^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) = b\theta, \\ \dot{\theta} + g \left(\frac{\partial^2 \dot{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \\ \tau \dot{\psi} + \psi + \theta = 0. \end{cases}$$

In particolare si cercano onde sferiche che siano armoniche nel tempo, cioè:

$$(19) \quad \begin{cases} \varphi(r, t) = \operatorname{Re} [e^{i\omega t} \varphi_0(r, \omega)], \\ \theta(r, t) = \operatorname{Re} [e^{i\omega t} \theta_0(r, \omega)], \\ \psi(r, t) = \operatorname{Re} [e^{i\omega t} \psi_0(r, \omega)]. \end{cases}$$

Sostituendo le (19) nelle (18) si ottiene:

$$(20) \quad \begin{cases} \beta^2 \left(\frac{d^2 \varphi_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi_0}{dr} + \omega^2 \varphi_0 \right) = b\theta_0, \\ i\omega\theta_0 + i\omega g \left(\frac{d^2 \varphi_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi_0}{dr} \right) + \frac{d^2 \psi_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi_0}{dr} = 0, \\ i\omega\tau\psi_0 + \psi_0 + \theta_0 = 0. \end{cases}$$

Dalla (20.III) si ricava:

$$(21) \quad \psi_0 = - \frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \theta_0,$$

che sostituita nelle (20.I) e (20.II) dà:

$$(22) \quad \begin{cases} \beta^2 \left(\frac{d^2 \varphi_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi_0}{dr} \right) + \beta^2 \omega^2 \varphi_0 - b\theta_0 = 0, \\ i\omega g \left(\frac{d^2 \varphi_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi_0}{dr} \right) - \frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \left(\frac{d^2 \theta_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta_0}{dr} \right) + i\omega\theta_0 = 0. \end{cases}$$

Si ponga:

$$(23) \quad \varphi_0 = \frac{\varphi^*}{r}, \quad \theta_0 = \frac{\theta^*}{r}$$

e sostituendo le (23) nelle (22) si perviene a:

$$(24) \quad \begin{cases} \beta^2 \frac{d^2 \varphi^*}{dr^2} + \beta^2 \omega^2 \varphi^* - b\theta^* = 0, \\ i\omega g \frac{d^2 \varphi^*}{dr^2} - \frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{d^2 \theta^*}{dr^2} + i\omega\theta^* = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema (24) sono:

$$(25) \quad \begin{cases} \varphi^* = \varphi^{(0)} e^{i\alpha_1 r} - \theta^{(0)} \frac{b}{\beta^2} \frac{1}{\alpha_2^2 - \omega^2} e^{i\alpha_2 r}, \\ \theta^* = \theta^{(0)} e^{i\alpha_2 r} + \varphi^{(0)} \frac{i\omega^3 g (1 + i\omega\tau)}{\alpha_1^2 + i\omega (1 + i\omega\tau) (1 + \varepsilon)} e^{i\alpha_1 r}, \end{cases}$$

dove α_1 e α_2 sono le radici, a parte reale negativa⁽¹⁾, della seguente equazione biquadratica:

$$(26) \quad \alpha^4 - (\omega^2 + \omega^2 \tau - i\omega - i\omega\varepsilon + \omega^2 \tau\varepsilon) \alpha^2 - i\omega^3 + \omega^4 \tau = 0,$$

dove si è posto $\varepsilon = gb/\beta^2$ e $\varphi^{(0)}$ e $\theta^{(0)}$ sono costanti d'integrazione.

Infine, introdotte le velocità di fase

$$V_1 = \frac{\omega}{|\operatorname{Re}(\alpha_1)|}, \quad V_2 = \frac{\omega}{|\operatorname{Re}(\alpha_2)|}$$

e i coefficienti di smorzamento

$$K_1 = \operatorname{Im}(\alpha_1), \quad K_2 = \operatorname{Im}(\alpha_2)$$

le soluzioni del sistema (18) del tipo (19) sono la parte reale di:

$$(27) \quad \begin{cases} \varphi(r, t) = \frac{1}{r} \left\{ \varphi^{(0)} \exp \left[-i\omega \left(\frac{r}{V_1} - t \right) - K_1 r \right] + \right. \\ \quad \left. - \theta^{(0)} \frac{b}{\beta^2} \frac{1}{\alpha_2^2 - \omega^2} \exp \left[-i\omega \left(\frac{r}{V_2} - t \right) - K_2 r \right] \right\}, \\ \theta(r, t) = \frac{1}{r} \left\{ \theta^{(0)} \exp \left[-i\omega \left(\frac{r}{V_2} - t \right) - K_2 r \right] + \right. \\ \quad \left. + \varphi^{(0)} \frac{i\omega^3 g (1 + i\omega\tau)}{\alpha_1^2 + i\omega (1 + i\omega\tau) (1 + \varepsilon)} \exp \left[-i\omega \left(\frac{r}{V_1} - t \right) - K_1 r \right] \right\}, \\ \psi(r, t) = -\frac{1}{r} \frac{1 - i\omega\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \left\{ \theta^{(0)} \exp \left[-i\omega \left(\frac{r}{V_2} - t \right) - K_2 r \right] + \right. \\ \quad \left. + \varphi^{(0)} \frac{i\omega^3 g (1 + i\omega\tau)}{\alpha_1^2 + i\omega (1 + i\omega\tau) (1 + \varepsilon)} \exp \left[-i\omega \left(\frac{r}{V_1} - t \right) - K_1 r \right] \right\}. \end{cases}$$

(1) Interessano solamente le radici a parte reale negativa in quanto le soluzioni ad esse corrispondenti rappresentano onde divergenti che si propagano dall'origine (per $r = 0$) all'infinito; mentre le soluzioni in corrispondenza alle radici a parte reale positiva rappresentano onde convergenti che si propagano dall'infinito verso l'origine. Naturalmente ha significato fisico solamente il primo tipo di propagazione.

Dalle (27) è chiaro che le onde termomeccaniche sferiche, in generale, sono sia dissipative che dispersive; è evidente inoltre che in esse si assommano due contributi distinti che chiameremo componente d'onda «quasi elastica» e componente d'onda «quasi termica».

Infine, l'ammettere l'esistenza di onde solamente divergenti fa sì che i potenziali φ e ψ e la variazione di temperatura θ soddisfino le condizioni di radiazione.

Per $\varepsilon = 0$ non vi è accoppiamento termomeccanico e si hanno le onde meccaniche classiche e le onde termiche, infatti:

$$b = g = 0, \quad V_1 = 1, \quad K_1 = 0, \\ V_2 = \left(\frac{2\omega}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} + \omega\tau} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad K_2 = \left[\frac{\omega}{2} (\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1} - \omega\tau) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Nelle prime non si ha né dissipazione né dispersione, nelle seconde si hanno invece entrambe.

Per $\varepsilon \neq 0$, un'equazione di dispersione del tipo (26) è stata studiata in [6] e le conclusioni ivi riportate valgono anche per la (26).

* * *

Mi è gradito rivolgere un sentito ringraziamento al Prof. G. Grioli per la cura con cui mi ha seguito nell'elaborazione della presente Nota.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. GRIOLI (1979) - *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui*. Nota I, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», 67, pp. 332-339.
- [2] G. GRIOLI (1979) - *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui*. Nota II, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», 67, pp. 426-432.
- [3] M. TORRISI (1980) - *Sulla velocità di propagazione di onde di discontinuità in termoelasticità finita*, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», 69, pp. 154-160.
- [4] M. TORRISI - *Sulla propagazione di onde termiche in un mezzo isotropo indeformabile*, (inviato per la stampa).
- [5] C. CATTANEO (1948) - *Sulla conduzione del calore*, «Atti del Seminario matematico e fisico dell'Università di Modena», 3, pp. 83-101.
- [6] A. NAYFEH e S. NEMAT-NASSER (1971) - *Thermoelastic waves in solids with thermal relaxation*, «Acta Mechanica», 12, pp. 53-69.