Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Michele Carriero, Antonio Leaci, Eduardo Pascali

Convergenza per l'equazione degli integrali primi associata al problema del rimbalzo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **72** (1982), n.4, p. 209–216.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1982_8_72_4_209_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1982.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 24 aprile 1982

Presiede il Presidente della Classe GIUSEPPE MONTALENTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Analisi matematica. — *Convergenza per l'equazione degli integrali primi associata al problema del rimbalzo* (*). Nota di MICHELE CARRIERO, ANTONIO LEACI e EDUARDO PASCALI, presentata (**) dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — In this paper we present a few results on convergence for the prime integrals equations connected with the bounce problem. This approach allows both to prove uniqueness for the one-dimensional bounce problem for almost all permissible Cauchy data (see also [6]) and to deepen previous results (see [3], [5], [7]).

1. Vari autori (vedi [3], [5], [6], [7]) hanno studiato i limiti delle soluzioni dei problemi

$$(\mathscr{P}_h) \begin{cases} \ddot{x}(t) + \psi_h(x(t)) = f(t) & \text{in} \quad [0, T_0] \\ x(0) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(0) = p_0 , \end{cases}$$

dove $f \in L^1([0, T_0])$, $x_0 < 0$, $p_0 \in \mathbf{R}$ oppure $x_0 = 0$, $p_0 \leq 0$ (condizioni iniziali ammissibili) e $(\psi_h)_h$ è una successione di funzioni verificante

$$\psi_h \in C^0(\mathbf{R}) \quad , \quad \psi_h(\xi) \begin{cases} = 0 & \text{per} \quad \xi \leq 0 \\ > 0 & \text{per} \quad \xi > 0 , \end{cases} \tag{1}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A.
(**) Nella seduta del 24 aprile 1982.

(2) $$\lim_{h\to\infty} \psi_h(\xi) = +\infty \qquad \text{uniformemente sui compatti di } \;]0, +\infty[,$$

(3) $$\lim_{\substack{\xi\to 0^+ \\ h\to\infty}} \frac{\psi_h(\xi)}{\int_0^\xi \psi_h(\eta)\, d\eta} = +\infty .$$

Osservato che i problemi del secondo ordine $(\mathscr{P}_h)$ si possono trasformare nel sistema del primo ordine

$$(\mathscr{P}_h') \begin{cases} \dot{x}(t) = p(t) \\ \dot{p}(t) = f(t) - \psi_h(x(t)) \qquad \text{in} \quad [0, T_0] \\ x(0) = x_0 \quad , \quad p(0) = p_0 , \end{cases}$$

in questa nota ci proponiamo di esporre alcuni risultati che riguardano i limiti delle soluzioni delle equazioni degli integrali primi associate ai problemi $(\mathscr{P}_h')$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + p \frac{\partial u}{\partial x} + (f(t) - \psi_h(x)) \frac{\partial u}{\partial p} = 0 ,$$

con $f \in L^\infty(\mathbf{R})$ e $(\psi_h)_h$ verificante le (1), (2) e, in luogo della (3), la condizione

(3)′ $$\psi_h \in \mathrm{Lip}(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R}) \qquad \text{per ogni} \quad h ,$$

ove Lip $(\mathbf{R})$ è l'insieme delle funzioni uniformemente lipschitziane in $\mathbf{R}$.

Il risultato principale è il

TEOREMA 1. *Sia* $u_0 \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$, *nulla per* $x > 0$; *sia* $f \in L^\infty(\mathbf{R})$ *e* $(\psi_h)_h$ *verificante* (1), (2) *e* (3)′; *per ogni* h *esiste un'unica soluzione* $u_h \in L^1([0, T_0] \times \mathbf{R}^2) \cap L^\infty([0, T_0] \times \mathbf{R}^2)$, *di*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + p \dfrac{\partial u}{\partial x} + (f(t) - \psi_h(x)) \dfrac{\partial u}{\partial p} = 0 \qquad \text{in} \quad [0, T_0] \times \mathbf{R}^2 \\ u(0, x, p) = u_0(x, p) . \end{cases}$$

Inoltre

(*i*) *esiste* $u_\infty \in L^1([0, T_0] \times \mathbf{R}^2) \cap L^\infty([0, T_0] \times \mathbf{R}^2)$ *tale che* $u_h \to u_\infty$ *in* $L^1([0, T_0] \times \mathbf{R}^2)$,

(*ii*) *per quasi ogni* $t \in [0, T_0]$ *risulta* $u_h(t, \cdot, \cdot) \to u_\infty(t, \cdot, \cdot)$ *in* $L^1(\mathbf{R}^2)$.

È possibile caratterizzare la funzione u_∞ *nel modo seguente*:

$u_\infty(t, x, p) = 0 \qquad$ *per* $\quad x > 0$,

$u_\infty(t, x, p)$, *per* $x \leq 0$, *è l'unica soluzione in* $L^1([0, T_0] \times \mathbf{R}^2) \cap$ $\cap\, L^\infty([0, T_0] \times \mathbf{R}^2)$

di

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + p\dfrac{\partial u}{\partial x} + f(t)\dfrac{\partial u}{\partial p} = 0 \\ u(0, x, p) = u_0(x, p) \\ u(t, 0, p) = u(t, 0, -p). \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 1. Le soluzioni considerate nel Teorema 1 vanno intese nel senso indicato al n. 2 di questo lavoro.

Principale conseguenza del precedente risultato è il

TEOREMA 2. *Nelle ipotesi del Teorema 1, per quasi ogni* $(x_0, p_0) \in$ $\in]-\infty, 0] \times \mathbf{R}$, *la successione* $(x_h)_h$ *delle soluzioni dei problemi* $(\mathscr{P}_h)$ *converge uniformemente ad una funzione* x *verificante le condizioni seguenti*:

(a) $t \to x(t)$ *è lipschitziana, non positiva e si annulla in un numero finito* $m = m(x_0, p_0)$ *di punti* $t_1(x_0, p_0), \cdots, t_m(x_0, p_0)$;

(b) *in ogni intervallo aperto* $\mathscr{A}$ *di* $\mathbf{R}$, *tale che per ogni* $jt_j \notin \mathscr{A}$, $\dot{x}(t)$ *è lipschitziana e risulta* $\ddot{x}(t) = f(t)$ *per quasi ogni* t;

(c) *per ogni* t_j $(j = 1, \cdots, m)$ $\lim\limits_{t \to t_j^+} \dot{x}(t) = -\lim\limits_{t \to t_j^-} \dot{x}(t)$.

Volendo confrontare questi risultati con quelli di [3], [5] e [6], notiamo che, per quanto riguarda le ipotesi, vengono aggiunte le condizioni che le ψ_h siano limitate e lipschitziane per ogni h e che $f \in L^\infty(\mathbf{R})$, e viene tolta la condizione (3). Per quanto riguarda la tesi ricordiamo che nella nota [5] era stabilita la convergenza uniforme solo per opportune sottosuccessioni della successione $(x_h)_h$. La convergenza dell'intera successione $(x_h)_h$ era stabilita per quei dati per cui esiste una $x(t)$ verificante le (a), (b) e (c). In [3], [6] e [7] venivano date proprietà di densità e di genericità per le soluzioni verificanti (a), (b) e (c), senza però provare che è nulla la misura secondo Lebesgue dell'insieme dei dati iniziali ammissibili per cui non esiste una funzione $x(t)$ verificante (a), (b), (c), come invece è possibile in base al Teorema 2.

2. Per precisare l'enunciato dei Teoremi 1 e 2, dobbiamo dare alcune generalizzazioni dei problemi considerati in [10].

Sia $(t, x) = (t, x_1, \cdots, x_n)$ il generico punto di $\mathbf{R}^{n+1}$ e sia $\mathscr{L}^{n+1}$ la misura di Lebesgue su $\mathbf{R}^{n+1}$. Per un insieme E di perimetro finito indichiamo con $\mathscr{F}^*$ E la frontiera ridotta secondo De Giorgi (vedi [9]) e con $\nu = (\nu_t, \nu_1, \cdots, \nu_n)$ il versore della normale ad $\mathscr{F}^*$E diretto verso l'interno di E, definito come in [9].

Consideriamo l'equazione

$$(4) \qquad \mathscr{B}u = \mathscr{A}u + bu := \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + bu = c$$

con $a_i = a_i(t, x) \in L^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$, $b \in L^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$, $c \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^{n+1})$. Ammettiamo inoltre che le $a_i(t, x)$ siano uniformemente lipschitziane in x, cioè che esista $k < +\infty$ tale che per quasi ogni $t \in \mathbf{R}$ e per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$ risulti $|a_i(t, x) - a_i(t, y)| \leq k|x - y|$.

Poniamo $A = (1, a_1, \cdots, a_n)$ e $\langle A, \nu \rangle = \nu_t + \sum_{i=1}^n a_i \nu_i$; possiamo allora definire due sottoinsiemi di $\mathscr{F}^* E$ nel modo seguente

$$\mathscr{F}_A^+ E = \{(t, x) \in \mathscr{F}^* E \mid \langle A(t, x), \nu(t, x) \rangle > 0\},$$

$$\mathscr{F}_A^- E = \{(t, x) \in \mathscr{F}^* E \mid \langle A(t, x), \nu(t, x) \rangle < 0\}$$

e sui sottoinsiemi Σ di $\mathscr{F}^* E$ considerare lo spazio $L^1_A(\Sigma)$ delle funzioni g misurabili rispetto alla misura n-dimensionale di Hausdorff $\mathscr{H}^n$ (vedi ad esempio [9]) tali che

$$\int_\Sigma |g| \, |\langle A, \nu \rangle| \, d\mathscr{H}^n < +\infty. \tag{5}$$

Ricordiamo ora che se L ha perimetro finito e Ω è un aperto limitato pure di perimetro finito, si ha (vedi [9])

$$\Omega \cap \mathscr{F}^* L = \Omega \cap \mathscr{F}^* (L \cap \Omega) \quad , \quad \Omega \cap \mathscr{F}_A^\pm L = \Omega \cap \mathscr{F}_A^\pm (L \cap \Omega). \tag{6}$$

La (6) permette di dare la seguente definizione:

E *si dice di perimetro localmente finito se e solo se* $E \cap \Omega$ *ha perimetro finito per ogni* Ω *aperto limitato e di perimetro finito.*

Nel caso di un insieme E di perimetro localmente finito $\mathscr{F}^* E$ e $\mathscr{F}_A^\pm E$ possono essere definite tramite le

$$\Omega \cap \mathscr{F}^* E = \Omega \cap \mathscr{F}^* (E \cap \Omega) \quad , \quad \Omega \cap \mathscr{F}_A^\pm E = \Omega \cap \mathscr{F}_A^\pm (E \cap \Omega). \tag{6'}$$

Per E insieme di perimetro localmente finito e $\Sigma \subseteq \mathscr{F}^* E$ si definisce lo spazio $L^1_A(\Sigma)$ tramite la (5); con $L^1_{A,loc}(\Sigma)$ indicheremo lo spazio delle funzioni $g\mathscr{H}^n$-misurabili tali che, per ogni Ω aperto limitato risulta $\int_{\Omega \cap \Sigma} |g| \, |\langle A, \nu \rangle| \, d\mathscr{H}^n < +\infty$. Sia allora E un insieme di perimetro localmente finito e sia $u \in L^1_{loc}(E)$.

Diremo che u è *soluzione generalizzata della* (4) in E se esiste una funzione $u^* \in L^1_{A,loc}(\mathscr{F}^* E)$ tale che per ogni $\phi \in \mathrm{Lip}(\mathbf{R}^{n+1})$ a supporto compatto si abbia

$$\int_E [u(\mathscr{A}^* \phi - b\phi) + c\phi] \, d\mathscr{L}^{n+1} + \int_{\mathscr{F}^* E} u^* \phi \langle A, \nu \rangle \, d\mathscr{H}^n = 0, \tag{7}$$

dove $\mathscr{A}^* \phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \dfrac{\partial}{\partial x_i}(a_i \cdot \phi)$.

Data una soluzione generalizzata di (4), una u^* che verifica la (7) sarà detta *traccia* di u su $\mathscr{F}^* E$ (relativa all'operatore $\mathscr{A}$); poiché $\mathscr{F}^* E$ ha misura di Lebesgue nulla, se u è soluzione generalizzata della (4), possiamo ricondurci al caso

$$u^* = u \Big|_{\mathscr{F}^* E} \tag{8}$$

con una opportuna scelta del rappresentante di u. Notiamo che se u ha un rappresentante continuo in $\mathscr{F}^* E$, questo verifica senz'altro la (8). Ammessa la (8) possiamo considerare il problema seguente:

(I) *Assegnata* $w \in L^1_{A,\mathrm{loc}}(\mathscr{F}^+_A E)$ *trovare* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(E)$ *soluzione generalizzata della* (4) *verificante la condizione* $u \Big|_{\mathscr{F}^+_A E} = w$.

OSSERVAZIONE 2. Se E è limitato e di perimetro finito il problema (I) si riduce al problema (I) di [10]. Per il problema (I) di [10] (vedi Teorema 7) vale un teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni ed inoltre esiste una trasformazione invertibile $T_{E,A} : \mathscr{F}^+_A E \to \mathscr{F}^-_A E$ tale che, se nella (4) è $b = c = 0$, si ha $u \Big|_{\mathscr{F}^+_A E} = u \Big|_{\mathscr{F}^-_A E} \circ T_{E,A}$.

Siano ora E_1, E_2 due insiemi di perimetro localmente finito; considerato il sistema

$$\mathscr{B}_j u_j = \mathscr{A}_j u_j + b^{(j)} u_j := \frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{(j)}(t, x) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + b^{(j)} u_j = c^{(j)} \qquad \text{per} \quad j = 1, 2. \tag{9}$$

poniamo

$$A_j = (1, a_1^{(j)}, \cdots, a_n^{(j)}),$$

e sia

$$\mathscr{F}^+_{A_j} E_j = F_j^+ \cup S_j^+ \quad , \quad \mathscr{F}^-_{A_j} E_j = F_j^- \cup S_j^-,$$

con

$$F_j^+ \cap S_j^+ = \varnothing \quad , \quad F_j^- \cap S_j^- = \varnothing \qquad j = 1, 2.$$

Siano inoltre

$$\tau_{12} : S_1^- \to S_2^+ \quad , \quad \tau_{21} : S_2^- \to S_1^+$$

trasformazioni invertibili; $a_i^{(j)} \in L^\infty(E_j)$ e uniformemente lipschitziane in x per q.o. t,

$$b^{(j)} \in L^\infty(E_j) \quad , \quad c^{(j)} \in L^1_{\mathrm{loc}}(E_j) \qquad j = 1, 2.$$

Possiamo allora formulare il *problema generale di trasmissione*:

(II) *Assegnate* $w_j \in L^1_{A_j,\mathrm{loc}}(F_j^+)$ *trovare* $u_j \in L^1_{\mathrm{loc}}(E_j)$ *per* $j = 1, 2$ *soluzioni generalizzate delle* (9) *verificanti le condizioni*

$$u_j \big|_{F_j^+} = w_j \qquad \text{per} \quad j = 1, 2 \tag{10}$$

$$u_j \big|_{S_j^+} = u_i \big|_{S_i^-} \circ \tau_{ij}^{-1} \qquad \text{con} \quad j \neq i \in \{1, 2\}. \tag{11}$$

Notiamo che nei problemi (I), (II) considerati in questo numero rientrano come casi particolari i problemi considerati in [10]; in tale lavoro erano dati dei teoremi di esistenza ed unicità delle soluzioni che *in generale non si estendono automaticamente al caso di insiemi illimitati*; in questo caso teoremi di esistenza e di unicità debbono pertanto essere stabiliti, volta per volta, sotto ulteriori opportune ipotesi.

3. La dimostrazione dei Teoremi 1 e 2 si basa su un risultato di carattere generale che ora enunciamo e che sostanzialmente mostra che il limite di una successione di problemi al contorno del tipo (I) può essere un problema di trasmissione del tipo (II).

Consideriamo due insiemi $E_1, E_2 \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$, limitati e di perimetro finito, con $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ e $\mathscr{H}^n(\mathscr{F}^* E_1 \cap \mathscr{F}^* E_2) \neq 0$. Sia data una successione di operatori

$$\mathscr{B}_h = \mathscr{A}_h + b := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i^{(h)}(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + b \qquad h = 1, 2, \cdots,$$

con $a_i^{(h)} = a_i^{(h)}(t, x)$ equilimitate in $\mathbf{R}^{n+1}$ ed uniformemente lipschitziane in $x \in \mathbf{R}^n$ per quasi ogni $t \in \mathbf{R}$; $b = b(t, x) \in L^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ con supporto di b contenuto in $\overline{E}_1$. Supporremo

$$a_i^{(h)} = a_i^{(1)} \qquad \text{in } \overline{E}_1, \qquad \text{per ogni } i \text{ ed } h, \tag{12}$$

e porremo $A_h = (1, a_1^{(h)}, \cdots, a_n^{(h)})$ per ogni h. Tenendo conto di (12) e del fatto che la frontiera ridotta è contenuta nella frontiera (vedi [9]), possiamo porre:

$$F_1^+ := \mathscr{F}^+_{A_1} E_1 \setminus \mathscr{F}^* E_2 = \mathscr{F}^+_{A_h} E_1 \setminus \mathscr{F}^* E_2,$$

$$F_1^- := \mathscr{F}^-_{A_1} E_1 \setminus \mathscr{F}^* E_2 = \mathscr{F}^-_{A_h} E_1 \setminus \mathscr{F}^* E_2 \qquad \text{per ogni } h,$$

$$F_{2,h}^+ := \mathscr{F}^+_{A_h} E_2 \setminus \mathscr{F}^* E_1 \quad , \quad F_{2,h}^- := \mathscr{F}^-_{A_h} E_2 \setminus \mathscr{F}^* E_1 \qquad \text{per ogni } h,$$

$$S_1^+ = S_2^- = \mathscr{F}^+_{A_1} E_1 \cap \mathscr{F}^* E_2 = \mathscr{F}^-_{A_1} E_2 \cap \mathscr{F}^* E_1 = \mathscr{F}^-_{A_h} E_2 \cap \mathscr{F}^* E_1 \qquad \text{per ogni } h,$$

$$S_1^- = S_2^+ = \mathscr{F}^-_{A_1} E_1 \cap \mathscr{F}^* E_2 = \mathscr{F}^+_{A_1} E_2 \cap \mathscr{F}^* E_1 = \mathscr{F}^+_{A_h} E_2 \cap \mathscr{F}^* E_1 \qquad \text{per ogni } h.$$

Sia infine $T : S_2^+ \to S_1^+$ una trasformazione biunivoca che muta insiemi di Borel in insiemi di Borel. Sussiste allora il seguente

LEMMA. *Se al variare di t, x e h risulta uniformemente limitata la divergenza*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i^{(h)}}{\partial x_i} \quad e \tag{13}$$

se per ogni insieme di Borel I *di* S_2^+ *si ha*

$$\lim_{h\to\infty} \mathcal{H}^n \left[T_{E_2, A_h}(I) \, \Delta \, T(I) \right] = 0 \,, \tag{14}$$

allora per ogni

$u_0 \in L^\infty(F_1^+)$ *e per ogni* $\theta_h \in L^\infty(F_{2,h}^+)$, *tale che la successione* $(\theta_h)_h$ *è limitata in* L^∞, *considerata l'unica soluzione generalizzata* $u_h \in L^\infty(E_1 \cup E_2)$ *del problema*

$$\begin{cases} \mathcal{B}_h u = c & \text{in } E_1 \cup E_2 \\ u \Big|_{F_1^+} = u_0 & \\ u \Big|_{F_{2,h}^+} = \theta_h \,, & \textit{dove } c \in L^\infty(E_1 \cup E_2) \textit{ e } \operatorname{supp} c \subseteq \bar{E}_1 \end{cases}$$

si ha:

$u_h \Big|_{E_1}$ *converge in* $L^1(E_1)$ *all'unica soluzione* w *di classe* $L^\infty(E_1)$ *del problema di trasmissione*

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1 w = c & \textit{in } E_1 \\ w \Big|_{F_1^+} = u_0 \\ w \Big|_{S_1^+} = w \Big|_{S_1^-} \circ T^{-1}. \end{cases}$$

La dimostrazione del Teorema 1 è fondata su un opportuno adattamento di questo Lemma al caso in cui

$$\mathcal{B}_h = \mathcal{A}_h = \frac{\partial}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial x} + (f - \psi_h(x)) \frac{\partial}{\partial p} \qquad (h \geq 2) \,,$$

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}_1 = \frac{\partial}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial p} \,;$$

$$c = 0 \,; \qquad A_h = (1, p, f(t) - \psi_h(x)) \qquad (h \geq 2) \,, \qquad A_1 = (1, p, f(t)) \,,$$

$$E_1 = \{(t, x, p) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq t \leq T_0 \,, x^2 + p^2 \leq l \,, x < 0\} \,,$$

$$E_2 = \{(t, x, p) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leq t \leq T_0 \,, x^2 + p^2 \leq l \,, x > 0\}$$

(con l costante arbitraria positiva),

$$T(t, 0, p) = (t, 0, -p) \quad , \quad u_0 \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^\infty(\mathbf{R}^2),$$

$$u\Big|_{F_1^+} = \begin{cases} u_0 & x \leq 0 \ , \ t = 0, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$\theta_h = 0$, e passando poi al limite per $l \to +\infty$.

Per passare dal Teorema 1 al Teorema 2, basta osservare che per i risultati di [10], l'unione delle curve caratteristiche $(t, x(t), p(t))$ soddisfacenti le condizioni $\dot{x}(t) = p(t), \dot{p}(t) = f(t), x(\tau) = p(\tau) = 0$ per qualche τ, ha intersezione di misura nulla con ogni piano $t =$ costante.

Bibliografia

[1] L. Amerio e G. Prouse (1975) - *Study of the motion of a string vibrating against an obstacle*. « Rend. di Matematica » (2), vol. 8, serie VI.

[2] L. Amerio (1976) - *Su un problema di vincoli unilaterali per l'equazione non omogenea della corda vibrante*. « IAC », Pubb. serie D, N. 109, 3-11.

[3] G. Buttazzo e D. Percivale - *Sull'approssimazione del problema del rimbalzo unidimensionale*. In corso di stampa su Ricerche Mat.

[4] G. Buttazzo e D. Percivale - *The bounce problem on n-dimensional Riemannian manifolds*. In corso di stampa su « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. ».

[5] M. Carriero e E. Pascali (1980) - *Il problema del rimbalzo unidimensionale e sue approssimazioni con penalizzazioni non convesse*. « Rend. di Mat. », (4), vol. 13, serie 6, 541-553.

[6] M. Carriero e E. Pascali (1982) - *Uniqueness of the one-dimensional bounce problem as a generic property in* $L^1([0, T]; R)$. « Boll. Un. Mat. Ital. », (5) 1-A, 87-91.

[7] M. Carriero (1981) - *G-convergenza per il problema del rimbalzo unidimensionale*. Atti del Convegno « Studio di problemi-limite dell'Analisi Funzionale », Bressanone 7-9 Settembre, 53-77.

[8] C. Citrini (1979) - *Discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic equation with unilateral constraints*. « Manuscripta Math. », *29*, 323-352.

[9] E. De Giorgi, F. Colombini e L. C. Piccinini (1972) - *Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate*. Quaderni della S.N.S. Pisa.

[10] A. Leaci - *Sulle soluzioni di equazioni alle derivate parziali del primo ordine in insiemi di perimetro finito*. In corso di stampa su « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. ».

[11] A. Leaci - In preparazione.

[12] M. Schatzman (1978) - *A class of nonlinear differential equations of second order in time*. « Nonlinear Analysis », vol. 2 (3), 355-373.