
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ANTONIO LEACI

**Sulle soluzioni di equazioni alle derivate parziali del
primo ordine in insiemi di perimetro finito**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 71 (1981), n.5, p. 55–59.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1981_8_71_5_55_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sulle soluzioni di equazioni alle derivate parziali del primo ordine in insiemi di perimetro finito.* Nota di ANTONIO LEACI, presentata (*) dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — In this paper we study boundary value problems for first order partial differential equations on sets of finite perimeter in the sense of De Giorgi (see [7]). We also study a new type of boundary value problems which has been suggested by issues about the bounce problem.

1. INTRODUZIONE

In questo lavoro studiamo le funzioni u che risolvono l'equazione

$$(*) \quad D_t u + \sum_{i=1}^n a_i D_{x_i} u + bu = c$$

in un insieme $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ed assumono valori assegnati su una parte opportuna della frontiera di E .

I risultati ottenuti generalizzano in due direzioni alcuni dei risultati stabiliti da Bardos in [2]. Da una parte si considerano insiemi E di perimetro finito (con la definizione introdotta da E. De Giorgi in [7]) invece che aperti con frontiera regolare, dall'altra si considera un secondo tipo di problemi al contorno, diverso da quelli considerati da Bardos e da altri autori (vedi ad es. [11], [13], [14]).

Prima di enunciare i principali risultati fissiamo alcune notazioni. Sia $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$ il generico punto di $\mathbb{R}^{n+1}$ e sia $\mathcal{L}^{n+1}$ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^{n+1}$. Per un insieme E di perimetro finito indichiamo con $\mathcal{F}^* E$ la frontiera ridotta secondo De Giorgi (vedi [8]) e con $\nu = (\nu_t, \nu_1, \dots, \nu_n)$ il versore della normale ad $\mathcal{F}^* E$ diretto verso l'interno di E , definito come in [9]. Assegnati i coefficienti a_i dell'equazione (*) poniamo $A = (1, a_1, \dots, a_n)$ e $\langle A, \nu \rangle = \nu_t + \sum_{i=1}^n a_i \nu_i$. Possiamo allora definire due sottoinsiemi di $\mathcal{F}^* E$ nel modo seguente

$$\mathcal{F}_A^+ E = \{(t, x) \in \mathcal{F}^* E \mid \langle A(t, x), \nu(t, x) \rangle > 0\}$$

$$\mathcal{F}_A^- E = \{(t, x) \in \mathcal{F}^* E \mid \langle A(t, x), \nu(t, x) \rangle < 0\}$$

e sui sottoinsiemi Σ di $\mathcal{F}^* E$ considerare lo spazio $L_A^1(\Sigma)$ delle funzioni θ misurabili rispetto alla misura n -dimensionale di Hausdorff $\mathcal{H}^n$ (per la sua definizione vedi ad es. [9], [10]) tali che

$$\|\theta\|_{L_A^1(\Sigma)} \equiv \int_{\Sigma} |\theta| |\langle A, \nu \rangle| d\mathcal{H}^n < \infty.$$

(*) Nella seduta del 21 novembre 1981.

I problemi presi in considerazione sono dei seguenti tipi:

(I) per $\theta \in L^1_A(\mathcal{F}^+_A E)$ assegnata, trovare u soluzione di

$$\begin{cases} D_t u + \sum_{i=1}^n a_i D_{x_i} u + bu = c \\ u|_{\mathcal{F}^+_A E} = \theta \end{cases}$$

(II) se Σ_+ e Σ_- sono sottoinsiemi boreliani rispettivamente di $\mathcal{F}^+_A E$ e $\mathcal{F}^-_A E$ $T: \Sigma_- \rightarrow \Sigma_+$ è una trasformazione invertibile, per ogni $\theta \in L^\infty(\mathcal{F}^+_A E \setminus \Sigma_+)$ trovare u soluzione di

$$\begin{cases} D_t u + \sum_{i=1}^n a_i D_{x_i} u + bu = c \\ u|_{\mathcal{F}^+_A E \setminus \Sigma_+} = \theta, \quad u|_{\Sigma_+} = u|_{\Sigma_-} \circ T^{-1}. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 1. La classe degli insiemi di perimetro finito, oltre ad essere più generale delle classi considerate in [2], ha la proprietà di essere stabile per unione e intersezione che è assai utile nelle applicazioni.

OSSERVAZIONE 2. Il problema (II) è collegato allo studio del problema del rimbalzo, recentemente affrontato da vari autori (vedi [1], [3], [4], [5], [6], [15]), e la sua considerazione permette un notevole approfondimento di alcuni dei risultati contenuti in tali lavori.

OSSERVAZIONE 3. Sui coefficienti $a_i(t, x)$ facciamo un'ipotesi di limitatezza, misurabilità in t e lipschitzianità in x ; ciò comporta la necessità di definire opportunamente le soluzioni « deboli » dei problemi (I), (II), la cui esistenza e unicità è stabilita nei teoremi 7 e 9.

2. IL PROBLEMA (I)

Sia $A = (1, a_1, \dots, a_n)$ un campo di vettori reale su R^{n+1} . Sulle funzioni a_i facciamo la seguente ipotesi:

(H₁) $a_i \in L^\infty(R^{n+1})$ ed esiste $K < +\infty$ tale che per quasi ogni $t \in R$ risulta

$$|a_i(t, x) - a_i(t, y)| \leq K |x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in R^n.$$

Per ogni funzione $\psi \in \text{Lip}(R^{n+1})$ possiamo allora considerare gli operatori

$$\begin{aligned} A\psi &= D_t \psi + \sum_{i=1}^n a_i D_{x_i} \psi \\ A^*\psi &= D_t \psi + \sum_{i=1}^n D_{x_i} (a_i \psi) \end{aligned}$$

È possibile dimostrare, utilizzando risultati di [7] [8] [9] [12], la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 4. *Se E è un insieme limitato di perimetro finito in R^{n+1} e se il campo A verifica l'ipotesi (H_1) allora $\langle A, \nu \rangle \in L^\infty(\mathcal{F}^* E)$ e per ogni $\psi \in \text{Lip}(R^{n+1})$ vale*

$$\int_E A^* \psi \, d\mathcal{L}^{n+1} = - \int_{\mathcal{F}^* E} \psi \langle A, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^n$$

Per il problema (I) con $b \in L^\infty(E)$, $c \in L^1(E)$ e $\theta \in L_A^1(\mathcal{F}_A^+ E)$ possiamo dunque porre, sempre nelle ipotesi della proposizione 4, la seguente definizione.

DEFINIZIONE 5. *Diremo che $u \in L^1(E)$ è soluzione generalizzata del problema (I) se esiste $\zeta \in L_A^1(\mathcal{F}_A^- E)$ tale che per ogni $\psi \in \text{Lip}(R^{n+1})$ si abbia*

$$(I^*) \quad \int_E [u(A^* \psi - b\psi) + c\psi] \, d\mathcal{L}^{n+1} + \int_{\mathcal{F}_A^+ E} \theta \psi \langle A, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^n + \int_{\mathcal{F}_A^- E} \zeta \psi \langle A, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^n = 0.$$

Per dimostrare un teorema di esistenza e unicità della soluzione u e alcune sue proprietà si utilizza il seguente teorema di approssimazione.

TEOREMA 6. *Sia E un insieme limitato di perimetro finito in R^{n+1} e le a_i funzioni che verificano l'ipotesi (H_1) . Per ogni $b \in L^\infty(E)$, $c \in L^1(E)$ e $\theta \in L_A^1(\mathcal{F}_A^+ E)$ esiste una successione ψ_h di funzioni lipschitziane su R^{n+1} tali che:*

- (i) ψ_h converge in $L^1(E)$;
- (ii) $A\psi_h + b\psi_h$ converge a c in $L^1(E)$;
- (iii) $\psi_h|_{\mathcal{F}_A^+ E}$ converge a θ in $L_A^1(\mathcal{F}_A^+ E)$ e $\psi_h|_{\mathcal{F}_A^- E}$ converge in $L_A^1(\mathcal{F}_A^- E)$.

Poichè l'insieme E in considerazione è limitato, possiamo supporre $E \subset [0, T_0] \times R^n$. Dal teorema 6 si ottiene allora il seguente risultato.

TEOREMA 7. *Nelle ipotesi del teorema 6 esiste unica $u \in L^1(E)$ soluzione del problema (I^*) e vale la maggiorazione*

$$\|u\|_{L^1(E)} + \|\zeta\|_{L_A^1(\mathcal{F}_A^- E)} \leq 2(\|\theta\|_{L_A^1(\mathcal{F}_A^+ E)} + \|c\|_{L^1(E)}) e^{(\|b\|_\infty + 2K)T_0}.$$

Per precisare il comportamento delle soluzioni di (I^*) sulle linee caratteristiche, associamo ad ogni $\xi \in R^n$ la soluzione $\gamma_\xi: R \rightarrow R^n$ del sistema caratteristico relativo all'equazione (*):

$$d\gamma_i/dt = a_i(\gamma, t) \quad , \quad \gamma(0) = \xi \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Indicato con E_1 l'insieme dei punti di R^{n+1} di densità 1 rispetto ad E , per quasi ogni $\xi \in R^n$ si trova che:

- (1) l'insieme $E_\xi = \{t \in R \mid (t, \gamma_\xi(t)) \in E_1\}$ (eventualmente vuoto) è unione di intervalli aperti $(\tau_{2h-1}(\xi), \tau_{2h}(\xi))$ con $h=1, 2, \dots, p(\xi) < +\infty$;
- (2) $(\tau_{2h-1}(\xi), \gamma_\xi(\tau_{2h-1}(\xi))) \in \mathcal{F}_A^+ E$; $(\tau_{2h}(\xi), \gamma_\xi(\tau_{2h}(\xi))) \in \mathcal{F}_A^- E$.

Se si considera una soluzione u del problema (I*) possiamo trovare una $\bar{u}$ che differisce da u al più in un insieme di misura $\mathcal{L}^{n+1}$ nulla tale che, per q.o. $\xi \in R^n$ $\bar{u}(t, \gamma_\xi(t))$ sia assolutamente continua su E_ξ e si abbia

$$\begin{cases} d/dt \bar{u}(t, \gamma_\xi(t)) + b(t, \gamma_\xi(t)) \bar{u}(t, \gamma_\xi(t)) = c(t, \gamma_\xi(t)) \\ \lim_{t \rightarrow \tau_{2h-1}(\xi)} \bar{u}(t, \gamma_\xi(t)) = \theta(\tau_{2h-1}(\xi), \gamma_\xi(\tau_{2h-1}(\xi))) \end{cases}$$

2. IL PROBLEMA (II)

Per il problema (II) con b e c appartenenti a $L^\infty(E)$ e $\theta \in L^\infty(\mathcal{F}_A^+ E \setminus \Sigma_+)$ poniamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 8. Diremo che $u \in L^\infty(E)$ è soluzione generalizzata del problema (II) se esiste una funzione boreliana $\zeta \in L^\infty(\Sigma_+ \cup \mathcal{F}_A^- E)$ tale che per ogni $\psi \in \text{Lip}(R^{n+1})$

$$(II^*) \quad \begin{cases} \int_E [u(A^* \psi - b\psi) + c\psi] d\mathcal{L}^{n+1} + \int_{\mathcal{F}_A^+ E \setminus \Sigma_+} \theta \psi(A, \nu) d\mathcal{H}^n + \int_{\Sigma_+ \cup \mathcal{F}_A^- E} \zeta \psi(A, \nu) d\mathcal{H}^n = 0 \\ \text{ed inoltre } \zeta|_{\Sigma_+} = \zeta|_{\Sigma_-} \circ T^{-1}. \end{cases}$$

Sulla trasformazione T facciamo la seguente ipotesi:

(H₂) $T: \Sigma_- \rightarrow \Sigma_+$ è invertibile, boreliana insieme con la sua inversa ed inoltre:

(a) posto $T(t, x) = (t', x')$, si ha $t' \geq t$;

(b) esiste $\sigma: \Sigma_- \rightarrow R$ $\mathcal{H}^n$ -misurabile con $0 \leq \sigma(t, x) \leq e^{m(t'-t)} \mathcal{H}^n$ -q.o. su Σ_- (dove $m > 0$ e t' è come in (a)) tale che per ogni $\psi \in \text{Lip}(R^{n+1})$ si ha

$$\int_{\Sigma_+} \psi(A, \nu) d\mathcal{H}^n = - \int_{\Sigma_-} (\psi \circ T) \sigma(A, \nu) d\mathcal{H}^n.$$

È possibile allora dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA 9. Sia E un insieme limitato di perimetro finito in R^{n+1} e supponiamo che valgano le ipotesi (H₁) e (H₂). Allora, per ogni $b, c \in L^\infty(E)$ e $\theta \in L^\infty(\mathcal{F}_A^+ E \setminus \Sigma_+)$ esiste unica $u \in L^\infty(E)$ soluzione del problema (II*) e vale

$$\|u\|_\infty + \|\zeta\|_\infty \leq 2(\|\theta\|_\infty + \|c\|_\infty T) e^{\|b\|_\infty T}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. AMERIO (1976) – *Su un problema di vincoli unilaterali per l'equazione non omogenea della corda vibrante*. « IAC », Pubbl., Serie D, n. 109.
- [2] C. BARDOS (1970) – *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre*. « Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. », 4 Serie t. 3.
- [3] G. BUTTAZZO e D. PERCIVALE – *Sull'approssimazione del problema del rimbalzo unidimensionale*. In corso di stampa su « Ricerche Mat. ».
- [4] G. BUTTAZZO e D. PERCIVALE – *The bounce problem on n -dimensional riemannian manifolds*. In corso di stampa su « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. ».
- [5] M. CARRIERO e E. PASCALI (1980) – *Il problema del rimbalzo unidimensionale*. « Rend. Mat. », Serie VI, vol. 13 (4).
- [6] C. CITRINI (1979) – *Discontinuous solutions of non linear hyperbolic equation with unilateral constraints*. « Manuscripta Math. », 29.
- [7] E. DE GIORGI (1954) – *Su una teoria generale della misura $(r - 1)$ dimensionale in uno spazio ad r dimensioni*. « Ann. Mat. Pura Appl. SIV », t. xxxvi.
- [8] E. DE GIORGI (1955) – *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r - 1)$ dimensionali in uno spazio ad r dimensioni*. « Ricerche Mat. », vol. IV.
- [9] E. DE GIORGI, F. COLOMBINI e L. C. PICCININI (1972) * *Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate*. « Quaderni della S.N.S. », Pisa.
- [10] H. FEDERER (1969) – * *Geometric measure theory*. Springer, Berlin.
- [11] K. JORGENS (1958) – *An asymptotic expansion in the theory of Neutron Transport*. « Comm. Pure App. Math. », vol. 11.
- [12] M. MIRANDA (1964) – *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito*. « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. », 18.
- [13] K. W. REED (1965) – *On a problem in Neutron transport theory*. « J. Math. Anal. and App. », vol. 10.
- [14] K. W. REED (1966) – *On Weak and strong solution for the neutron transport equation*. « J. Anal. Math. », vol. 17.
- [15] M. SCHATZMANN (1978) – *A class of non linear differential equations of second order in time*. « Nonlinear Analysis », vol. 2 (3).