Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gianni Dal Maso

Limiti di soluzioni di problemi variazionali con ostacoli bilaterali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **69** (1980), n.6, p. 333–337.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_6_333_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1980.

Calcolo delle variazioni. — *Limiti di soluzioni di problemi variazionali con ostacoli bilaterali.* Nota di GIANNI DAL MASO, presentata (*) dal Corrisp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — If $\{\varphi_h\}$ and $\{\psi_h\}$ are sequences of arbitrary functions from $\mathbf{R}^n$ into $\overline{\mathbf{R}}$, with $\varphi_h \leq \psi_h$, then there exist two subsequences $\{\varphi_{h_k}\}$ and $\{\psi_{h_k}\}$, a function $f(x, u)$ convex in u, and two positive Radon measures μ and ν, with $\mu \in H^{-1}(\mathbf{R}^n)$, such that for every "admissible" open set A and Borel set B, with $B \subseteq A$, and for every $g \in L^2(A)$, the sequences $\{m_k\}$ and $\{u_k\}$ of the minima and of the minimum points of the functional

$$\int_A [\,|Du|^2 + |u|^2 + gu]\,dx\,,$$

with constraints of the type $\varphi_{hk} \leq u \leq \psi_{hk}$ on B, converge respectively of the minimum m_0 and to the minimum point u_0 of the functional

$$\int_A [\,|Du|^2 + |u|^2 + gu]\,dx + \int_B f(x, u)\,d\mu + \nu(B)\,,$$

without any additional external constraint.

Questa Nota contiene l'enunciato e le linee generali della dimostrazione di un'estensione al caso degli ostacoli bilaterali dei risultati stabiliti in [5] e [2] per gli ostacoli unilaterali. Precisamente si dà una caratterizzazione dei limiti di successioni di problemi di minimo per il funzionale

$$\int_A [\,|Du|^2 + |u|^2]\,dx$$

con ostacoli bilaterali della forma

$$\varphi_h \leq \tilde{u} \leq \psi_h \qquad \text{cap. q.o. su B}\,, \tag{1}$$

dove A è un aperto di $\mathbf{R}^n$, B è un boreliano contenuto in A,

$$\tilde{u}(x) = \min \lim_{r \to 0} \frac{1}{\operatorname{mis} B_r(x)} \int_{B_r(x)} u(y)\,dy\,,$$

e nella (1) l'espressione cap. q.o. su B significa che l'insieme degli $x \in B$ che non verificano la relazione $\varphi_h(x) \leq \tilde{u}(x) \leq \psi_h(x)$ ha capacità nulla.

Prima di enunciare il Teorema principale dobbiamo richiamare una definizione già introdotta in [5] e [2].

(*) Nella seduta del 6 dicembre 1980.

Indichiamo con $\mathscr{B}$ l'insieme dei boreliani limitati di $\mathbf{R}^n$ e con $\mathscr{A}$ l'insieme degli aperti limitati di $\mathbf{R}^n$. Una parte $\tilde{\mathscr{B}}$ di $\mathscr{B}$ si dirà *ricca* in $\mathscr{B}$ se, per ogni famiglia $(B_t)_{t \in \mathbf{R}}$ di elementi di $\mathscr{B}$, con $\overline{B}_s \subseteq \mathring{B}_t$ per ogni $s < t$, l'insieme $\{t \in \mathbf{R} : B_t \notin \tilde{\mathscr{B}}\}$ è al più numerabile.

THEOREMA 1. *Siano* $\{\varphi_h\}$ *e* $\{\psi_h\}$ *due successioni di funzioni di* $\mathbf{R}^n$ *in* $\overline{\mathbf{R}}$. *Supponiamo che esista una successione* $\{u_h\}$ *limitata in* $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ *tale che* $\varphi_h \leq \tilde{u}_h \leq \psi_h$ *cap. q.o. su* $\mathbf{R}^n$. *Allora esistono*

(*i*) *una successione crescente d'interi* $\{h_k\}$,

(*ii*) *due misure di Radon positive* μ *e* ν, *con* $\mu \in H^{-1}(\mathbf{R}^n)$,

(*iii*) *una funzione boreliana* $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to [0, +\infty]$, *con* $t \to f(x, t)$ *convessa e semicontinua inferiormente su* $\mathbf{R}$ *per ogni* $x \in \mathbf{R}^n$,

(*iv*) *una famiglia* $\tilde{\mathscr{B}}$ *ricca in* $\mathscr{B}$,

tali che, se indichiamo con $m_k(g, A, B)$ *ed* $u_k(g, A, B)$ (A *aperto*, $B \in \mathscr{B}$, $B \subseteq A$, $g \in L^2(A)$) *rispettivamente il minimo ed il punto di minimo del funzionale*

$$\| u \|^2_{H^1(A)} + \int_A g u \, dx$$

nell'insieme $\{u \in H^1(A) : \varphi_{h_k} \leq \tilde{u} \leq \psi_{h_k}$ *cap. q.o. su* $B\}$, *e indichiamo con* $m(g, A, B)$ *ed* $u(g, A, B)$ *rispettivamente il minimo ed il punto di minimo in* $H^1(A)$ *del funzionale*

$$\| u \|^2_{H^1(A)} + \int_A g u \, dx + \int_B f(x, \tilde{u}(x)) \, d\mu(x) + \nu(B),$$

allora

(*v*) $\lim_k m_k(g, A, B) = m(g, A, B)$

(*vi*) $\{u_k(g, A, B)\}$ *converge a* $u(g, A, B)$ *in* $L^2_{\mathrm{loc}}(A)$

per ogni $B \in \tilde{\mathscr{B}}$, *per ogni aperto* A *con* $A \supseteq \overline{B}$, *o con* $A = B$, *e per ogni* $g \in L^2(A)$.

OSSERVAZIONE 2. Se $B \in \mathscr{B}$ ed esistono un aperto A ed un compatto K, con $K \subseteq \mathring{B} \subseteq B \subseteq A$, tali che $\varphi_h = -\infty$ e $\psi_h = +\infty$ su $A - K$ per ogni $h \in \mathbf{N}$, allora $B \in \tilde{\mathscr{B}}$.

OSSERVAZIONE 3. Data $w \in H^1(A)$, i problemi di minimo in $H^1(A)$ considerati nel Teorema 1 possono essere sostituiti dai corrispondenti problemi con la condizione al contorno di Dirichlet $u - w \in H^1_0(A)$ nei due casi seguenti:

(*i*) $B \in \tilde{\mathscr{B}}$, A aperto, $A \supseteq \overline{B}$;

(*ii*) $B = A \in \mathscr{A} \cap \tilde{\mathscr{B}}$ ed esiste un compatto K contenuto in A tale che $\varphi_h \leq \tilde{w} \leq \psi_h$ cap. q.o su $A - K$.

OSSERVAZIONE 4. Se il funzionale

$$F(u, B) = \int_B f(x, \tilde{u}(x))\, d\mu(x) + \nu(B) \tag{2}$$

fornito dal Teorema 1 assume solo i valori 0 e $+\infty$, si può dimostrare che esistono due funzioni $\varphi, \psi : \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$, ed una famiglia $\tilde{\mathcal{B}}$ ricca in $\mathcal{B}$ e contenente $\mathcal{A}$, tali che

$$F(u, B) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \varphi \le \tilde{u} \le \psi \quad \text{cap. q.o. su B} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{3}$$

per ogni $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ e per ogni $u \in H^1(A)$, con A aperto, $A \supseteq \overline{B}$ o $A = B$.

Viceversa ogni funzionale del tipo (3) ammette una rappresentazione del tipo (2) per tutti i B di un'opportuna famiglia $\tilde{\mathcal{B}}$ ricca in $\mathcal{B}$ e contenente $\mathcal{A}$, e per tutte le u di $H^1(A)$, con A aperto, $A \supseteq \overline{B}$ o $A = B$; se φ e ψ sono continue una tale rappresentazione è data da:

$$\mu(B) = \int_B \exp(-|x|)\, dx$$

$$\nu(B) = 0$$

$$f(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \varphi(x) \le t \le \psi(x) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo infine che esistono degli esempi di successioni di ostacoli $\{\varphi_h\}$ e $\{\psi_h\}$ per le quali f assume tutti i valori reali compresi tra 0 e $+\infty$ (cfr. [1]), ed esempi nei quali non è possibile prendere $\nu = 0$ se si vuole rispettare la condizione $\mu \in H^{-1}(\mathbf{R}^n)$.

Notiamo che la differenza essenziale tra il nostro Teorema 1 ed il Teorema analogo stabilito nel caso degli ostacoli unilaterali (cfr. [5] Teorema 1 e [2] Teorema 0.1) è che il funzionale (a valori 0, $+\infty$) associato all'ostacolo bilaterale $\varphi_h \le \tilde{u} \le \psi_h$, pur essendo ancora convesso, non è monotono rispetto ad u, e questo obbliga a modificare sostanzialmente la linea della dimostrazione. Esponendone ora le linee generali, metteremo in evidenza soprattutto gli elementi di novità rispetto ai lavori [5] e [2], mentre per i dettagli rimandiamo ad un prossimo articolo.

Fissata una funzione $\gamma : \mathcal{A} \to \mathbf{R}_+$, consideriamo la classe $\mathcal{F}_\gamma$ dei funzionali $F : L^2_{loc}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ che verificano le seguenti condizioni:

(*a*) per ogni $u \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^n)$ la funzione $B \mapsto F(u, B)$ è crescente su $\mathcal{B}$ ed $F(u, \emptyset) = 0$;

(*b*) se $u, v \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^n)$, $A \in \mathcal{A}$, $u = v$ q.o. su A, allora $F(u, B) = F(v, B)$ per ogni $B \in \mathcal{B}$ con $B \subseteq A$;

(*c*) per ogni $B \in \mathscr{B}$ ed ogni aperto A, con $A \supseteq B$, la funzione $u \mapsto F(u, B)$ è convessa e semicontinua inferiormente su $H^1(A)$;

(*d*) per ogni $A \in \mathscr{A}$

$$\min_{u \in H^1(\mathbf{R}^n)} [\| u \|^2_{H^1(\mathbf{R}^n)} + F(u, A)] \leq \gamma(A);$$

(*e*) esiste un funzionale $\tilde{F} : L^2_{loc}(\mathbf{R}^n) \times \mathscr{B} \to [0, +\infty]$ tale che, per ogni $u \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^n)$ la funzione $B \mapsto \tilde{F}(u, B)$ sia numerabilmente additiva su $\mathscr{B}$, e si abbia $\tilde{F}(u, A) = F(u, A)$ per ogni $u \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^n)$, $A \in \mathscr{A}$;

(*f*) per ogni $A \in \mathscr{A}$ e per ogni $u, v, w \in H^1(A)$, con $w \geq 0$ q.o. su A,

$$F((u \wedge v) + w, A) + F(u \vee v, A) \leq F(u + w, A) + F(v, A).$$

La condizione (*f*), molto più forte di quella analoga richiesta in [5] e [2], compensa la mancanza di monotonia rispetto ad u del « vincolo » F.

Non è difficile verificare che i funzionali dei tipi (2) e (3) appartengono alla classe $\mathscr{F}_\gamma$, purchè verifichino la condizione (*d*).

Come in [5] e [2], il primo passo della dimostrazione del Teorema 1 è il seguente Teorema di compatezza rispetto alla $\Gamma(L^2(A)^-)$-convergenza (cfr. [3], [4], [6]).

TEOREMA 5. *Sia* $\{F_h\}$ *una successione di funzionali della classe* $\mathscr{F}_\gamma$. *Allora esistono una sottosuccessione* $\{F_{h_k}\}$, *un funzionale* F *della classe* $\mathscr{F}_\gamma$ *ed una famiglia* $\tilde{\mathscr{B}}$ *ricca in* $\mathscr{B}$, *tali che*

$$\| u \|^2_{H^1(A)} + F(u, B) = \Gamma(L^2(A)^-) \lim_{\substack{k \to \infty \\ v \to u}} [\| v \|^2_{H^1(A)} + F_{h_k}(v, B)]$$

per ogni $B \in \tilde{\mathscr{B}}$, *per ogni aperto* A *con* $A \supseteq \overline{B}$, *o con* $A = B$, *e per ogni* $u \in H^1(A)$.

Il passo successivo, che è poi quello in cui si incontrano le maggiori difficoltà, è la dimostrazione del seguente Teorema di rappresentazione.

TEOREMA 6. *Per ogni funzionale* F *della classe* $\mathscr{F}_\gamma$ *esistono* $\mu, \nu, f, \tilde{\mathscr{B}}$ *verificanti le condizioni* (*ii*), (*iii*), (*iv*) *del Teorema* 1, *tali che*

$$F(u, B) = \int_B f(x, \tilde{u}(x)) \, d\mu(x) + \nu(B)$$

per ogni $B \in \tilde{\mathscr{B}}$ *e per ogni* $u \in H^1(A)$, *con* A *aperto*, $A \supseteq \overline{B}$ *o* $A = B$.

Per ricondurre la dimostrazione del Teorema 6 al caso studiato in [5] (Teorema 7) e [2] (Teorema 4.7), possiamo introdurre due nuovi funzionali $F_1, F_2 : L^2_{loc}(\mathbf{R}^n) \times \mathscr{B} \to [0, +\infty]$, definiti nel modo seguente:

$$F_1(u, B) =$$

$$= \sup \{F(u \wedge v, A) - F(v, A) : A \in \mathscr{A}, A \subseteq B, v \in H^1(A), F(v, A) < +\infty\} +$$

$$+ \inf \{F(v, A) : A \in \mathscr{A}, A \supseteq B, v \in H^1(A)\}$$

$$F_2(u\,,B) =$$
$$= \sup\{F(u \vee v\,,A) - F(v\,,A) : A \in \mathscr{A}\,, A \subseteq B\,, v \in H^1(A)\,, F(v\,,A) < +\infty\}.$$

Si dimostra che per ogni $A \in \mathscr{A}$, $u \in H^1(A)$

$$F(u\,,A) = F_1(u\,,A) + F_2(u\,,A)\,; \tag{4}$$

si dimostra inoltre che F_1 ed F_2 soddisfano le condizioni (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), (*e*), e verificano la condizione (*f*) nel caso $w = 0$; infine si fa vedere che per ogni aperto A e per ogni boreliano limitato B contenuto in A, le funzioni $u \mapsto F_1(u\,,B)$ e $u \mapsto F_2(u\,,B)$ sono rispettivamente decrescente e crescente su $H^1(A)$. Pertanto, per i teoremi citati di [5] e [2], F_1 ed F_2 si possono rappresentare in forma integrale come previsto dal Teorema 6, e quindi per la (4) anche F è rappresentabile in forma integrale.

Terzo ed ultimo passo della dimostrazione del Teorema 1 è la deduzione piuttosto facile di esso dai Teoremi 5 e 6.

Desidero ringraziare il prof. E. De Giorgi per le utili discussioni avute con lui su questi argomenti.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. CARBONE e F. COLOMBINI (1980) – *On convergence of functionals with unilateral constraints*, « J. Math. Pures Appl. », (9) *59*, pp. 465–500.

[2] G. DAL MASO e P. LONGO – *Γ-limits of obstacles*, di prossima pubblicazione su « Ann. Mat. Pura Appl. ».

[3] E. DE GIORGI (1977) – *Γ-convergenza e G-convergenza*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (5) *14*-A, pp. 213–220.

[4] E. DE GIORGI (1979) – *Convergence problems for functionals and operators*, Proceedings of the International Meeting on « Recent Methods in Non-linear Analysis », Rome, May 8–12, 1978. Edited by E. De Giorgi, E. Magenes, U. Mosco, pp. 131–188. Pitagora Editrice, Bologna.

[5] E. DE GIORGI, G. DAL MASO e P. LONGO (1980) – *Γ-limiti di ostacoli*, « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », (8), *68*, pp. 481–487.

[6] E. DE GIORGI e T. FRANZONI (1975) – *Su un tipo di convergenza variazionale*, « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », (8) *58*, pp. 842–850.