ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIOVANNA BOSCHI PETTINI

**Sulla propagazione in un dielettrico non lineare
assorbente**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 69 (1980), n.3-4, p.
174-184.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_3-4_174_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_3-4_174_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Sulla propagazione in un dielettrico non lineare assorbente* (*). Nota (**) di GIOVANNA BOSCHI PETTINI, presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — An approximate method of integration for some differential equations in non-linear optics developed by Graffi has been here extended to the propagation in an absorbing non linear medium.

Circa vent'anni fa sono stati scoperti alcuni interessanti fenomeni ottici che si possono spiegare, sia pure in forma molto schematica, solo ammettendo non lineari le equazioni costitutive dell'elettromagnetismo, per esempio ammettendo il vettore spostamento funzione non lineare del vettore campo elettrico. È sorto così un nuovo capitolo della fisica denominato ottica non lineare.

La letteratura sull'ottica non lineare (o più in generale sulla propagazione in un dielettrico non lineare) è ormai assai vasta; ci limiteremo perciò a citare, fra i trattati dedicati a tale argomento, solo quello di N. Bloembergen [1].

Le memorie originali di carattere prevalentemente teorico si possono suddividere in due gruppi (anche se, naturalmente, una tale suddivisione non è sempre facile da eseguire). Nel primo, quelle dedicate a questioni matematiche generali sulle equazioni non lineari alle derivate parziali che si incontrano nell'ottica non lineare, nel secondo quelle relative all'applicazione di metodi approssimati per risolvere le predette equazioni e la loro discussione fisica.

Nel primo gruppo emergono le memorie di L. Cesari [2], [3], [4], [5], [6] e sono inoltre notevoli alcune di P. Bassanini [7], [8], [9], [10], [11], [12]. Nel secondo gruppo citerò G. Pettini [13], P. Bassanini [14], [15], L. Cesari [16], D. Graffi [17]. Gran parte di questi lavori sono corredati da una ampia bibliografia. In particolare D. Graffi [17], ispirandosi ai metodi asintotici degli autori russi [18], ha proposto un metodo approssimato per l'integrazione di alcune equazioni dell'ottica non lineare valide per onde piane periodiche che si propagano in un semispazio. Però nello sviluppo del metodo, ha per semplicità trascurato la conduttività del mezzo nel calcolo degli armonici di ordine superiore.

In questa Nota intendo riprendere il metodo del Graffi tenendo conto della conduttività γ del mezzo che però si supporrà, come accade nelle applicazioni all'ottica non lineare, molto piccola; la suddetta questione non mi sembra sviluppata nei lavori che ho avuto occasione di consultare. I risultati ottenuti sono, in sostanza, i seguenti.

(*) Ricerca svolta nell'ambito dell'attività del G.N.F.M. del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 31 ottobre 1980.

Il campo dell'onda che si propaga nel mezzo non lineare ha sensibilmente la stessa espressione del caso in cui è $\gamma = 0$, però compare un fattore di smorzamento, espresso da $\exp(-\delta z)$, $\delta = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, che quindi è lo stesso sia per l'onda principale che per tutti gli armonici. L'onda riflessa è sensibilmente la stessa che si ha nel caso $\gamma = 0$.

I risultati sono intuitivi però, per raggiungerli, sono necessarie considerazioni non immediate per le semplificazioni ammissibili nelle formule generali.

Infine, nell'ultimo paragrafo, ho esposto alcune precisazioni del metodo di Graffi che ritengo non prive di interesse.

1. Consideriamo le equazioni di Maxwell per un'onda periodica e piana che si propaga in uno strato dielettrico non lineare, nella direzione dell'asse z di un sistema ortogonale $0, x, y, z$, normale ai piani che limitano lo strato.

In base ad opportune ipotesi, in [17] (§ 6,2 formule (2.3) (2.4)) si è trovato, per le predette equazioni, l'espressione:

$$(1.1) \quad -\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial D}{\partial t} + \gamma E; \quad (1.2) \quad -\frac{\partial E}{\partial z} = \mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

dove E, D sono rispettivamente le uniche componenti lungo l'asse x del campo elettrico e del vettore spostamento, H l'unica componente lungo l'asse y del campo magnetico, D è funzione non lineare di E , γ è la conduttività del mezzo. Eliminando H fra (1.1) e (1.2), si ottiene:

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} + \gamma \mu \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Alle (1.1) e (1.2) occorre associare le condizioni sui piani che limitano lo strato, condizioni dovute a L. Cesari [3].

Poichè supporremo (come in [17]) infinito lo spessore dello strato, cioè il mezzo non lineare occupa il semispazio che, con opportuna scelta dell'origine, coincide con i punti dove è $z > 0$ ed è perciò limitato dal piano $z = 0$, basterà stabilire le condizioni suddette su questo piano.

Supponiamo che nel semispazio $z < 0$ esista una sorgente di onde elettromagnetiche piane che si propagano nel verso positivo dell'asse z , con componenti non nulle del campo elettrico $E_i(z, t)$ e del campo magnetico $H_i(z, t)$ rispettivamente lungo l'asse x e lungo l'asse y .

Supponiamo inoltre che il mezzo per $z < 0$ sia l'aria o il vuoto, sicchè per $z < 0$ sia $\gamma = 0$, la costante dielettrica sia ϵ_0 e la permeabilità sia ancora μ . Allora, se $E(z, t), H(z, t)$ sono le componenti del campo per $z > 0$ (che abbiamo già indicato con E, H) e $E_r(z, t), H_r(z, t)$ i campi dell'onda riflessa, per le condizioni di continuità sul piano $z = 0$ si ha:

$$(1.4) \quad E_i(0, t) + E_r(0, t) = E(0, t);$$

$$(1.5) \quad H_i(0, t) + H_r(0, t) = H(0, t).$$

Ora, poichè per $z < 0$ valgono le relazioni ben note:

$$H_i(z, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu}} E_i(z, t) \quad ; \quad H_r(z, t) = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu}} E_r(z, t)$$

dalle (1.4), (1.5), eliminando il campo riflesso, si ottiene la condizione valida sul piano $z = 0$:

$$(1.6) \quad \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu}} E(0, t) + H(0, t) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu}} E_i(0, t) + H_i(0, t) = 2 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu}} E_i(0, t)$$

in cui si suppone noto $E_i(0, t)$.

Come si è detto, D è una funzione non lineare di E ; supporremo però debole la non linearità cioè scriveremo:

$$(1.7) \quad D(E) = \epsilon E + \eta F(E)$$

dove ϵ è una costante (costante dielettrica del mezzo per piccoli valori di E), $F(E)$ indica una funzione non lineare di E ed η è un numero positivo molto piccolo onde siano lecite alcune approssimazioni di cui diremo in seguito, in particolare trascurabili i termini in $O(\eta^2)$.

Ammettiamo anche la conduttività γ dell'ordine di η per $z > 0$, cioè scriviamo:

$$(1.8) \quad \gamma = \eta \gamma_1.$$

La (1.3) diventa allora:

$$(1.9) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu \eta \frac{\partial^2 F(E)}{\partial t^2} + \mu \eta \gamma_1 \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Ora ammettiamo che E_i e H_i siano funzioni sinusoidali del tempo di pulsazione ω (e quindi di periodo $T = 2\pi/\omega$) e che E sia una funzione periodica del tempo di periodo T . Allora, col procedimento indicato in [17] (§ 6,5), per risolvere approssimativamente la (1.9) poniamo:

$$(1.10) \quad E = A(z) e^{i\vartheta} + \eta \sum'_n C_n e^{in(\vartheta+\varphi)} + \text{c.c.}$$

con (a, φ) reali):

$$(1.11) \quad \vartheta = \omega(t - \sqrt{\epsilon\mu} z) \quad ; \quad A(z) = a(z) e^{i\varphi(z)}.$$

Le C_n sono numeri complessi funzioni di z , $\sum'_n$ significa sommatoria rispetto all'indice n , escluso $n = 1$ che è stato messo in evidenza nel primo termine a secondo membro di (1.10); infine col simbolo c.c. si indica il complesso coniugato dei termini scritti esplicitamente a secondo membro di un'equazione.

A meno di termini $O(\eta^2)$ risulta ([17], § 6,5, formule (5.19), (5.20)):

$$(1.12) \quad \eta \frac{\partial^2 F(E)}{\partial t^2} = -\eta \omega^2 \sum_0^\infty n^2 \bar{p}_n e^{in(\vartheta+\varphi)} + \text{c.c.}$$

con:

$$(1.13) \quad \bar{p}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(2a \cos(\vartheta + \varphi)) e^{-in(\vartheta + \varphi)} d(\vartheta + \varphi)$$

e $\bar{p}_n$ è reale ([17] § 6,7 formula 7,1) quindi per (1.10), sostituendo in (1.9), si ricava con opportune approssimazioni (cfr. [17], § 6, 5) il sistema⁽¹⁾ ($n = 0, 2, 3, \dots$):

$$(1.14) \quad \left\{ \frac{dA}{dz} = -\frac{\eta}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (\gamma_1 A + i\omega \bar{p}_1 e^{i\varphi}) \right.$$

$$(1.15) \quad \left. \left\{ 2i\omega n \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{dC_n}{dz} - \frac{d^2 C_n}{dz^2} = \mu\omega^2 n^2 \bar{p}_n - in\omega\mu \gamma C_n \right. \right.$$

Dalle (1.14), (1.15), con opportune condizioni fisiche di cui diremo in seguito, e tenendo conto della (1.6), si può ricavare A e C_n e quindi E.

Si ha inoltre ([17], § 7 formula (7.9)):

$$(1.16) \quad H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A e^{i\vartheta} - \frac{1}{\mu i \omega} \frac{dA}{dz} e^{i\vartheta} + \\ + \eta \Sigma' \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} C_n - \frac{1}{\mu i \omega n} \frac{dC_n}{dz} \right) e^{in(\vartheta + \varphi)} + \text{c.c.}$$

2. Passiamo ora ad esaminare le soluzioni di (1.14) supponendo, per maggiore generalità, γ e $\bar{p}_1$ contemporaneamente diversi da zero (in [17] ci si limita al caso in cui è $0 \neq \gamma \neq 0$ oppure $\bar{p}_1 \neq 0$).

Poichè, per la seconda di (1.11):

$$(2.1) \quad \frac{dA}{dz} = \frac{da}{dz} e^{i\varphi} + ia e^{i\varphi} \frac{d\varphi}{dz}$$

sostituendo nella (1.14) e uguagliando fra loro le parti reali e le parti immaginarie, si ottiene:

$$(2.2) \quad \frac{da}{dz} = -\frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} a; \quad (2.3) \quad \frac{d\varphi}{dz} = -\eta \frac{\omega}{2a} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \bar{p}_1.$$

Da (2.2) si ha, se a_0 è il valore di a per $z = 0$:

$$(2.4) \quad a(z) = a_0 e^{-(\gamma/2)\sqrt{(\mu/\varepsilon)}z}$$

Da (2.3), poichè $\bar{p}_1$ è funzione di a e l'espressione di a è data da (2.4), si può, mediante una quadratura, ricavare $\varphi(z)$ qualora sia noto il valore $\varphi_0 = \varphi(0)$.

(1) In [17] (§ 5, formula (5.22)) si è scritto per errore γ_1 invece di γ . All'ultimo paragrafo giustificheremo meglio la (1.15).

Determiniamo, ora, il valore a_0 di $a(z)$ per $z=0$. A tale scopo ricordiamo la relazione (1.6) valida sul piano $z=0$ che, se il campo incidente è sinusoidale ed espresso da ($\mathcal{E}_0$ è un numero assegnato che, senza restrizione, si può supporre reale):

$$E_i(0, t) = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} + \text{c.c.}$$

si scrive

$$(2.5) \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} E(0, t) + H(0, t) = 2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} + \text{c.c.}$$

Tenuto conto di (1.10), (1.11), (1.14) e (1.16) scriveremo pertanto:

$$(2.6) \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} [a_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)} + \eta \sum_n' C_n(0) e^{in(\omega t + \varphi_0)}] + \\ + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} a_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)} - \frac{1}{\mu i \omega} \left(\frac{dA}{dz} \right)_0 e^{i\omega t} + \\ + \eta \sum_n' \left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} C_n(0) - \frac{1}{\mu i \omega n} \left(\frac{dC_n}{dz} \right)_0 \right] e^{in(\omega t + \varphi_0)} = 2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}.$$

Uguagliando i termini in $e^{i\omega t}$, tenuto conto di (1.14) calcolata per $z=0$, dalla (2.6) si trae:

$$(2.7) \quad \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} - i \frac{\gamma}{2\omega \sqrt{\varepsilon \mu}} \right] a_0 e^{i\varphi_0} + \eta \frac{\bar{p}_1(0)}{2 \sqrt{\varepsilon \mu}} e^{i\varphi_0} = 2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} \mathcal{E}_0$$

e quindi:

$$(2.8) \quad a_0 = \frac{2 \sqrt{\varepsilon_0} \mathcal{E}_0 e^{-i\varphi_0} - \eta (\bar{p}_1(0)/2 \sqrt{\varepsilon})}{\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon} - i(\gamma/2 \omega \sqrt{\varepsilon})}.$$

Poichè a_0 è reale, uguagliando a zero la parte immaginaria del secondo membro di (2.8) si potrebbe determinare φ_0 . Non faremo questo calcolo perchè, per il seguito, non interessa il valore di φ_0 .

3. Riprendiamo ora la (1.15). Supporremo, come si fa di solito:

$$(3.1) \quad F(E) = \alpha E^m$$

con α costante e m intero maggiore di 1.

Allora, tenuto conto di (2.4), si ha, posto (supponiamo ora $n > 1$):

$$(3.2) \quad p_n = \alpha \frac{2^m a_0^m}{2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^m(\vartheta + \varphi) e^{-in(\vartheta + \varphi)} d(\vartheta + \varphi),$$

$$(3.2) \quad \bar{p}_n = e^{-(m/2)\gamma \sqrt{\mu/\varepsilon} z} p_n$$

con ovvio significato di p_n che risulta indipendente da z .

Dalla (1.15) si ha dunque l'equazione:

$$(3.3) \quad \frac{d^2 C_n}{dz^2} - 2 i \omega n \sqrt{\epsilon \mu} \frac{d C_n}{dz} - i \omega n \mu \gamma C_n = - \mu \omega^2 n^2 e^{-(m/2) \gamma \sqrt{\mu/\epsilon} z} p_n.$$

Cerchiamo anzitutto un integrale particolare della (3.3) ponendo:

$$(3.4) \quad \bar{C}_n = \lambda e^{-(m/2) \gamma \sqrt{\mu/\epsilon} z}$$

dove λ è una costante da determinare. Si ha subito:

$$(3.5) \quad \lambda = - \frac{\mu \omega^2 n^2 p_n}{\frac{m^2 \gamma^2 \mu}{4\epsilon} + i \omega n \mu \gamma (m-1)}.$$

Cerchiamo ora due integrali particolari indipendenti dell'equazione omogenea corrispondente a (3.3). Poniamo:

$$(3.6) \quad C_n = e^{uz}$$

di modo che si ha l'equazione caratteristica:

$$(3.7) \quad u^2 - 2 i \omega n \sqrt{\epsilon \mu} u - i n \omega \mu \gamma = 0$$

da cui si trae:

$$(3.8) \quad u = i \omega n \sqrt{\epsilon \mu} \pm \sqrt{-\omega^2 n^2 \epsilon \mu + i n \omega \mu \gamma}.$$

Si ottengono così due valori di u e quindi due integrali particolari dell'equazione omogenea. Per studiare meglio il valore di u si ponga:

$$(3.9) \quad \sqrt{-\omega^2 n^2 \epsilon \mu + i n \omega \mu \gamma} = \delta + i \beta.$$

Innalzando a quadrato e uguagliando le parti immaginarie si ha subito:

$$(3.10) \quad 2 \delta \beta = n \omega \mu \gamma$$

cioè δ e β devono avere lo stesso segno. Noi sceglieremo la radice di (3.9) in modo che δ risulti positivo e tale sarà anche β .

Dalla (3.8), tenuto conto della (3.9), avremo allora:

$$(3.11) \quad u_1 = i (\omega n \sqrt{\epsilon \mu} + \beta) + \delta \quad ; \quad u_2 = i (\omega n \sqrt{\epsilon \mu} - \beta) - \delta.$$

Risulta quindi, se K e K' sono costanti:

$$(3.12) \quad C_n = K' e^{i (\omega n \sqrt{\epsilon \mu} + \beta) z} e^{\delta z} + K e^{i (\omega n \sqrt{\epsilon \mu} - \beta) z} e^{-\delta z} + \bar{C}_n.$$

Ora, se fosse $K' \neq 0$, si avrebbe che $|C_n| \rightarrow +\infty$ per $z \rightarrow +\infty$ (o, per lo meno, per valori abbastanza grandi di z , C_n crescerebbe con z) il che è assurdo fisicamente, quindi deve essere $K' = 0$.

Del resto, come si è osservato in [17] (§ 6, 7), il primo termine a secondo membro di (3.12), moltiplicato per $e^{in(\vartheta+\varphi)}$, rappresenta, poichè β è positivo (e, come vedremo, grande rispetto a $d\varphi/dz$ che è dell'ordine di η), un'onda che si propaga nel verso negativo dell'asse z , il che si esclude.

La costante K si ricava, poi, con la condizione (1.6) sul piano $z = 0$. A questo scopo scriviamo tale condizione per l'onda di frequenza $n\omega$ che stiamo esaminando, cioè consideriamo i termini di frequenza $n\omega$ che compaiono nella (2.6) con $n > 1$. Si ha, dopo qualche semplificazione:

$$(3.13) \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} C_n + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} C_n - \frac{1}{\mu i \omega n} \frac{dC_n}{dz} = 0$$

dove C_n e dC_n/dz vanno calcolati per $z = 0$. Eseguendo i calcoli (ricordando (3.12)) si ha quindi:

$$(3.14) \quad \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \right) (K + \lambda) - \frac{1}{\mu i \omega n} (-\delta - i\beta + i\omega n \sqrt{\varepsilon\mu}) K + \\ + \frac{\frac{m}{2} \gamma \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\mu i \omega n} \lambda = 0$$

da cui, ricavando K in funzione di λ , si trae:

$$(3.15) \quad K = \frac{-\omega n (\sqrt{\varepsilon_0 \mu} + \sqrt{\varepsilon \mu}) + im \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\omega n \sqrt{\varepsilon_0 \mu} + \beta - i\delta} \lambda.$$

Valendosi delle (1.10) e (1.16), si può calcolare il campo nel mezzo non lineare, e il campo riflesso. Però, per meglio discutere i risultati ottenuti, conviene eseguire alcune semplificazioni tenendo conto che, per ipotesi, γ è molto piccolo.

Calcoliamo, intanto, β e δ a meno di termini dell'ordine di γ^2 (o, che è lo stesso, di η^2). Si ha, sviluppando la radice in serie:

$$\delta + i\beta = \sqrt{-\omega^2 n^2 \varepsilon \mu + im \omega \mu \gamma} = i\omega n \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{1 - \frac{in\omega \mu \gamma}{\omega^2 n^2 \varepsilon \mu}} = \\ = i\omega n \sqrt{\varepsilon \mu} \left[1 - i \frac{\gamma}{2 \omega n \varepsilon} + O(\gamma^2) \right] = i\omega n \sqrt{\varepsilon \mu} + \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + O(\gamma^2)$$

pertanto

$$(3.16) \quad \beta = \omega n \sqrt{\varepsilon \mu} + O(\gamma^2) \quad ; \quad \delta = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + O(\gamma^2)$$

e per la (3.15) si ha:

$$(3.17) \quad K = \frac{-\omega n (\sqrt{\varepsilon_0 \mu} + \sqrt{\varepsilon \mu}) + im \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\omega n (\sqrt{\varepsilon_0 \mu} + \sqrt{\varepsilon \mu}) - i \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + O(\gamma^2)} \lambda =$$

$$= -\lambda + \frac{i \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (m-1)}{\omega n (\sqrt{\varepsilon_0 \mu} + \sqrt{\varepsilon \mu}) - i \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} + O(\gamma^2)} \lambda.$$

Se ora nell'ultima espressione all'ultimo membro di (3.17) sostituiamo a λ il suo valore (espresso dalla (3.5) in cui si trascurano i termini $O(\gamma^2)$), tenendo conto che $\lambda\gamma$ è finito per ogni γ e che, essendo γ molto piccolo rispetto a $\sqrt{\varepsilon_0}$ e $\sqrt{\varepsilon}$, si può porre $\gamma = 0$ al denominatore, otteniamo:

$$(3.18) \quad K = -\lambda - \frac{i \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} (m-1)}{\omega n (\sqrt{\varepsilon_0 \mu} + \sqrt{\varepsilon \mu})} \cdot \frac{\mu \omega^2 n^2 p_n}{i \omega n \mu \gamma (m-1)} =$$

$$= -\lambda - \frac{p_n}{2 (\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} + \varepsilon)}.$$

Quindi si ha, ricordando il valore di β e di δ espresso da (3.16) e tenuto conto di (3.4) e (3.12):

$$(3.19) \quad C_n = -\lambda e^{-\delta z} + \lambda e^{-m\delta z} - \frac{p_n}{2 (\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} + \varepsilon)} e^{-\delta z} =$$

$$= \lambda e^{-\delta z} [e^{-(m-1)\delta z} - 1] - \frac{p_n}{2 (\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} + \varepsilon)} e^{-\delta z}.$$

Non è inutile cercare di semplificare ulteriormente questa espressione tenendo conto che γ è molto piccolo e limitandoci a valori non troppo grandi di z (che, del resto, è il caso che a noi interessa). A tale scopo osserviamo che l'ultimo termine all'ultimo membro di (3.19) è indipendente da γ ; quanto al primo esso si può scrivere, sviluppando in serie l'esponenziale entro parentesi:

$$(3.20) \quad \lambda e^{-\delta z} [-(m-1)\delta z + O(\delta^2)] =$$

$$= e^{-\delta z} \left[\frac{-(m-1) i \omega n p_n}{2 (m-1)} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} z + O(\gamma^2) \right] =$$

$$= -e^{-\delta z} \left[\frac{n i \omega}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} p_n z + O(\gamma^2) \right].$$

Dunque, trascurando i termini $O(\gamma^2)$, cioè per γ molto piccolo, C_n tende al valore:

$$(3.21) \quad C_n(z) = - \left[\frac{n i \omega}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} p_n z + \frac{p_n}{2(\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} + \varepsilon)} \right] e^{-\delta z}$$

che, per $\gamma = 0$ (ossia per $\delta \rightarrow 0$), coincide col risultato (§ 6,7 formula (7.19)) ricavato in [17].

4. Calcoliamo ora il campo dell'onda riflessa sul piano $z = 0$, con una approssimazione dell'ordine di γ^2 . Poichè per (1.4) risulta:

$$(4.1) \quad E_r(0, t) = E(0, t) - E_i(0, t),$$

se ci limitiamo a considerare l'onda riflessa di frequenza $n\omega$, con $n > 1$ (che indicheremo con E_{rn}), otteniamo:

$$(4.2) \quad E_{rn}(0, t) = E_n(0, t)$$

dove $E_n(0, t)$ è il termine di frequenza $n\omega$ di (1.10) calcolato sul piano $z = 0$. Si ha allora, ricavando $C_n(0)$ da (3.19) (senza tener conto delle approssimazioni che hanno condotto a (3.21)):

$$(4.3) \quad E_{rn}(0, t) = \eta C_n(0) e^{in(\omega t + \varphi_0)} + \text{c.c.} = -\eta \frac{p_n}{2(\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} + \varepsilon)} e^{in(\omega t + \varphi_0)} + \text{c.c.}$$

$E_{rn}(z, t)$ si ottiene da (4.3) sostituendo a ωt , $\omega(t + \sqrt{\varepsilon_0 \mu} z)$ nell'argomento dell'esponenziale.

Pertanto, nella nostra approssimazione, l'onda riflessa è la stessa che si ha nel caso $\gamma = 0$ (cfr. [17], § 7, formula (7.21)).

5. Riprendiamo le considerazioni di Graffi ([17], § 5) che hanno condotto all'equazione cui soddisfa C_n .

A questo scopo consideriamo la (1.3) e l'espressione (1.10) di E e calcoliamo esplicitamente l'equazione cui soddisfa il termine di frequenza $n\omega$ cioè il termine $C_n e^{in(\vartheta + \varphi)}$.

Si ha, posto $\bar{\vartheta} = \vartheta + \varphi$:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} (C_n e^{in\bar{\vartheta}}) &= \frac{d^2 C_n}{dz^2} e^{in\bar{\vartheta}} + 2 \frac{dC_n}{dz} \frac{de^{in\bar{\vartheta}}}{dz} + C_n \frac{d^2 e^{in\bar{\vartheta}}}{dz^2} = \\ &= \frac{d^2 C_n}{dz^2} e^{in\bar{\vartheta}} + 2 in \frac{dC_n}{dz} \left(-\omega \sqrt{\varepsilon \mu} + \frac{d\varphi}{dz} \right) e^{in\bar{\vartheta}} - \\ &- C_n \left[n^2 \left(-\omega \sqrt{\varepsilon \mu} + \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 - in \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \right] e^{in\bar{\vartheta}} \end{aligned}$$

e

$$(5.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} (C_n e^{in\bar{\vartheta}}) = in\omega C_n e^{in\bar{\vartheta}} \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} (C_n e^{in\bar{\vartheta}}) = -n^2 \omega^2 C_n e^{in\bar{\vartheta}}$$

Pertanto l'equazione cercata è:

$$(5.3) \quad \frac{d^2 C_n}{dz^2} + 2in \left(-\omega \sqrt{\epsilon\mu} + \frac{d\varphi}{dz} \right) \frac{dC_n}{dz} - \\ - \left[n^2 \left(\left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 - 2\omega \sqrt{\epsilon\mu} \frac{d\varphi}{dz} \right) - in \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + in\omega\mu\gamma \right] C_n = -\mu\omega^2 n^2 \bar{p}_n.$$

Ora si osservi che, nel caso $F(E) = \alpha E^m$ con m pari, $d\varphi/dz = 0$ per m pari ([17], § 6,8 formula (8.6)), quindi la (5.3) si riduce all'equazione (3.3) che abbiamo preso in esame nelle pagine precedenti.

Se invece è $d\varphi/dz \neq 0$, poichè per (2.3) è $d\varphi/dz = O(\eta)$ e $d^2\varphi/dz^2 = O(\eta^2)$, il coefficiente del termine in dC_n/dz nella (5.3) si riduce, per la piccolezza di $d\varphi/dz$ rispetto a $\omega \sqrt{\epsilon\mu}$, al valore $-2in\omega \sqrt{\epsilon\mu}$, come nella (3.3).

Quanto al coefficiente di C_n , trascurando i termini $O(\eta^2)$ e ricordando il valore di $d\varphi/dz$, esso si riduce a:

$$(5.4) \quad -in\omega\mu \left(\gamma + i \frac{n\omega}{a} \bar{p}_1 \right).$$

Ora, se $\omega \bar{p}_1$ è trascurabile rispetto a γ , si ricade nell'equazione (3.3).

Intendo comunque, in un prossimo lavoro, studiare il caso in cui $\omega \bar{p}_1$ sia paragonabile a γ .

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. BLOEMBERGEN - *Nsn linear Optics*, «W. A. Benjamin-INC», I ediz. (1964), II ediz. (1976).
- [2] L. CESARI (1974) - *A boundary value problem for quasi-linear hyperbolic systems in the Schauder canonic form*, «Annali Scuola Normale Superiore di Pisa», (4), 1, 311-358.
- [3] L. CESARI (1974) - *Sistemi iperbolici e oscillazioni non lineari*, «Rendiconti Seminario Mat. e Fis. Università Milano», 44, 139-154.
- [4] L. CESARI (1974) - *Un problema ai limiti per sistemi di equazioni iperboliche quasi lineari alle derivate parziali*, «Rendiconti Accad. Naz. Lincei», (8), 56, 1-4.
- [5] L. CESARI (1974) - *A boundary value problem for quasi linear hyperbolic systems*, «Rivista Matematica Univ. Parma», 3, 107-131.
- [6] L. CESARI (1974) - *Un problema ai limiti per le equazioni iperboliche quasi lineari nella forma canonica di Schauder*, «Rendiconti Accad. Naz. Lincei», (8), 57, 303-307.
- [7] P. BASSANINI (1976) - *A non linear hyperbolic problem arising from a question of non linear optics*, «ZAMP», 27, 409-422.
- [8] P. BASSANINI (1975) - *Sul tempo di esistenza di soluzioni regolari di un sistema iperbolico quasi lineare*, «Rendiconti Accad. Naz. Lincei», 59, 256-262.
- [9] P. BASSANINI (1976) - *Su una recente dimostrazione circa il problema di Cauchy per sistemi quasi-lineari iperbolici*, «Bollettino U.M.I.», (5), 13-B; 322-335.
- [10] P. BASSANINI (1977) - *On a recent proof concerning a boundary value problem for quasi linear hyperbolic systems in the Schauder canonic form*, «Boll. U.M.I.», 14-A, 325-332.
- [11] P. BASSANINI (1978) - *On the existence time of smooth solutions of quasi linear hyperbolic systems in the first canonic form*, «Boll. U.M.I.», 15-A; 214-224.

- [12] P. BASSANINI e M. C. SALVATORI (1979) – *A theorem of existence and uniqueness in non linear optics* « Boll. U.M.I. », 16-B, 597-611.
- [13] G. PETTINI (1968) – *Su una questione di ottica non lineare*, « Atti Sem. Mat. e Fis. Università Modena », 17, 351-364.
- [14] P. BASSANINI (1979) – *An application of Lax's estimates to the determination of critical crystal thickness in non linear laser optics*, « Journal of Mathematics-Physics », 20, 1650-1652.
- [15] P. BASSANINI e M. C. SALVATORI (1979) – *Problemi ai limiti per sistemi iperbolici quasi lineari e generazione di armoniche ottiche*, « Rivista Mat. Univ. Parma », (4), 5, 55-76.
- [16] L. CESARI (1978) – *The duplication of frequency in laser radiation through non linear media*, « Report. University of Michigan ».
- [17] D. GRAFFI (1980) – *Non linear partial differential equations in physical problems*, « Research Notes in Mathematics », 42, Pitman Publishing Limited Boston London Melbourne, Cap. VI.
- [18] Y. A. MITROPOLSKY (1960) – *Problèmes de la théorie asymptotique des oscillations non stationnaires*, Gauthier-Villars Paris.