
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MASSIMO TESSAROTTO

**Un approccio variazionale alla teoria del trasporto
collisionale nei plasmi confinati magneticamente**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 69 (1980), n.3-4, p.
161–165.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_3-4_161_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_3-4_161_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Un approccio variazionale alla teoria del trasporto collisionale nei plasmi confinati magneticamente* (*). Nota (**) di MASSIMO TESSAROTTO (***), presentata dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — A variational theory is developed for the study of collisional transport in a multi-species plasma immersed in an equilibrium magnetic field defined in a general non-symmetric and bounded domain. The present approach allows, in principle, the consideration of the exact Fokker-Planck collision operator appearing in the kinetic equation for the one-particle distribution function of each species and the determination of the transport coefficients relevant for a macroscopic description of the dynamical system.

1. INTRODUZIONE

Nella presente nota si intendono illustrare alcuni sviluppi nel campo della teoria del trasporto collisionale nei plasmi confinati magneticamente che riguardano specificatamente quella classe di plasmi, detti quiescenti, nei quali fluttuazioni collettive del campo elettromagnetico, prodotte dal moto delle particelle ionizzate, si possano ritenere trascurabili. In tal caso è noto che i processi di trasporto sono generati dalle interazioni coulombiane binarie grazie all'effetto combinato dovuto alla presenza di moti di deriva diamagnetica (prodotti a loro volta dalle inomogeneità del plasma).

Nel seguito intendiamo, più precisamente, soffermare la nostra attenzione sullo studio del trasporto collisionale in un plasma a più componenti ed immerso in un campo magnetico di equilibrio a priori imprecisato, ma comunque tale da consentire l'introduzione di usuali metodi perturbativi basati sullo sviluppo in termini del raggio di Larmor [1]. Il problema è stato affrontato in precedenza [2-8] introducendo, tra l'altro, semplificazioni che comportano l'introduzione di operatori di collisione approssimati nell'equazione cinetica e la cui giustificazione non appare, in molti casi, rigorosa. In [8] tale operatore è stato espresso in termini della cosiddetta approssimazione di localizzazione [9], introdotta inizialmente nello studio del trasporto collisionale in configurazioni toroidali ed assisimmetriche. L'estensione di tale modello a configurazioni generalmente non simmetriche non appare ovvia, poichè richiede la validità di opportune condizioni di consistenza [8].

(*) Tale studio è stato condotto nell'ambito di un contratto di mobilità dell'EURATOM presso il FOM-Instituut voor Plasmafysica, Rijnhuizen, Olanda, con contributo finanziario del «Nederlandse Organisatie voor Zuiver-Wetenschappelijk Onderzoek» (ZWO), Olanda.

(**) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1980.

(***) FOM-Instituut voor Plasmafysica, Rijnhuizen, Nieuwegein, Olanda; indirizzo permanente: Istituto di Meccanica, Università degli Studi, Trieste, Italia.

L'interesse allo sviluppo di una teoria del trasporto nella quale i processi collisionali siano trattati con esattezza, facendo cioè uso dell'operatore di collisione corretto nell'equazione cinetica, è ovvio e le sue applicazioni potenzialmente di grande importanza. In questa nota si intende illustrare un metodo variazionale il quale consente di formulare tale problema in maniera particolarmente elegante e fornire al tempo stesso lo strumento matematico adatto ad una sua più rigorosa trattazione, generalizzando con ciò a configurazioni largamente arbitrarie un approccio variazionale introdotto inizialmente per lo studio di configurazioni toroidali ed assisimmetriche [9, 10].

2. UN PRINCIPIO VARIAZIONE PER L'EQUAZIONE DI FOKKER-PLANCK

L'evoluzione del sistema dinamico considerato è assunta nel seguito, come è appropriato allo studio di plasmi in cui effetti cinetici (ovvero dovuti a deviazioni dall'equilibrio termodinamico locale) sono significativi, in termini dell'equazione di Fokker-Planck. In tal caso è possibile ridursi, invocando qui usuali metodi perturbativi [1] allo studio dell'equazione di (detta di « deriva »):

$$(1) \quad v_{\parallel} \hat{n} \cdot \nabla \bar{f}_1 = \frac{e}{T} v_{\parallel} E_{\parallel}^{\text{rot}} f_0 - \mathbf{v}_D \cdot \nabla f_0 + C(f_0 | \bar{f}_1)$$

dove $v_{\parallel}$ è la componente parallela al campo magnetico di equilibrio $\mathbf{B}(\mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \hat{n})$ con $\hat{n} = \text{vers}(\mathbf{B})$, e è la carica elettrica, T la temperatura della distribuzione maxwelliana di equilibrio f_0 - assunta nel seguito essere uguale a per tutte le specie di particelle del plasma - e $\mathbf{v}_D$ è la velocità di deriva magnetica:

$$(2) \quad \mathbf{v}_D = \frac{\hat{n}}{\Omega} \wedge (\mu \nabla B + v_{\parallel}^2 \hat{n} \cdot \nabla \hat{n})$$

essendo Ω la frequenza di Larmor. Nell'equazione (1) $E_{\parallel}^{\text{rot}}$ è l'eventuale componente rotazionale del campo elettrico (prodotta sia dal moto spontaneo delle particelle ionizzate che da possibili sorgenti esterne), mentre $C(f_0 | \bar{f}_1)$ è l'usuale operatore di Fokker-Planck linearizzato. La (1) è una equazione (in generale integro-differenziale) per la perturbazione $\bar{f}_1 = \bar{f}_1(\varepsilon, \mu, r)$, essendo $\varepsilon = v^2/2 - e \Phi/m$, $\mu = v_{\parallel}^2/2 B$, ed avendo indicato con $\bar{A} = (2\pi)^{-1} \oint d\theta A$, dove $\theta = \arctg(\mathbf{v} \cdot \hat{b} / \mathbf{v} \cdot \hat{p})$ e $(\hat{b}, \hat{p}, \hat{n})$ è una terna destrorsa di versori ortogonali. Infine, le condizioni al contorno per tale equazione dipendono dalla topologia delle linee di flusso magnetiche e pertanto dalla scelta della configurazione di equilibrio [8].

Per costruire un principio variazionale per l'equazione di deriva è conveniente definire allora il seguente funzionale:

$$(3) \quad \dot{W} = \dot{S} + 2 \sum_k \iint_{v_0=c} \frac{d\Sigma}{|\nabla p_0|} \int d^3 v \bar{f}_{1,k} G_k$$

dove la somma è estesa agli indici di specie, l'integrale superficiale è fatto rispetto ad una superficie isobara ($p_0 = c$), $\dot{S}$ è lo integrale superficiale del tasso di produzione di entropia, ovvero:

$$(4) \quad \dot{S} = - \sum_k \iint_{p_0=c} \frac{d\Sigma}{|\nabla p_0|} \int d^3v f_{1,k} C(f_0 | f_1) / f_{0,k}$$

mentre G_k risulta:

$$(5) \quad G_k = \mathbf{v}_{D,k} \cdot \nabla f_{0,k} / f_{0,k} - \frac{e_k}{T_k} v_{\parallel} E_{\parallel}^{\text{rot}}.$$

È allora immediato verificare che il funzionale $\dot{W}$ è una forma quadratica autoaggiunta. Da ciò segue come conseguenza elementare che l'equazione:

$$(6) \quad \delta \dot{W} = 0$$

dove le variazioni sono del tipo:

$$(7) \quad \delta f_1 = \delta f_1(\varepsilon, \mu, p_0)$$

è un principio variazionale per l'equazione di deriva (1).

In particolare è possibile verificare che la (6) risulta esplicitamente:

$$(8) \quad \iint_{A_i} \frac{d\Sigma B}{v_{\parallel} |\nabla p_0|} \left\{ -\mathbf{v}_D \cdot \nabla f_0 + \frac{e}{T} v_{\parallel} E_{\parallel}^{\text{rot}} f_0 + C(f_0 | f_1) \right\} = 0$$

dove il dominio di integrazione A_i coincide con tutta una superficie isobara $\Sigma(p_0)$ nel caso di particelle circolanti (ovvero tali che la variabile di pozzo $\lambda = \mu/\varepsilon$ risulti $0 \leq \lambda \leq 1/B_{\max}$ con $B_{\max}$ il massimo assoluto di B su una linea di flusso magnetica), mentre nel caso di particelle intrappolate adiabaticamente (ovvero tali che $1/B_{\max} \leq \lambda \leq 1/B$) risulta $A_i = \{\mathbf{r} : \mathbf{r} \in \Sigma(p_0), 1/B_{\max} \leq \lambda \leq 1/B(\mathbf{r})\}$. Pertanto l'equazione (7) è un principio variazionale per l'equazione integrale ottenuta mediando opportunamente su una superficie isobara (o rispettivamente sul dominio A_i sopra definito per le particelle intrappolate) l'equazione di deriva. È interessante notare che tale principio variazionale si riconduce, nel caso particolare di configurazioni assisimmetriche alla formulazione originaria dovuta a Rosenbluth, Hazeltine e Hinton [10], rappresentandone dunque la naturale estensione alla trattazione di equilibri più generali.

3. UNA RELAZIONE TRA IL FUNZIONALE $\dot{W}$ ED I COEFFICIENTI DI TRASPORTO

Vogliamo ora dimostrare una relazione fondamentale che sussiste tra il funzionale $\dot{W}$ ed i coefficienti di trasporto radiale. Dalla definizione elementare:

$$(9) \quad \Gamma_F = \iint_{p_0=c} d\Sigma \frac{\nabla p_0}{|\nabla p_0|} \cdot \int d^3v \mathbf{v} F f$$

del coefficiente di trasporto (radiale) per la variabile dinamica $F = F(v)$, risulta allora:

$$(10) \quad \Gamma_F = \Gamma_{FG} + \Gamma_{FE} + \Gamma_{FC}$$

dove Γ_{FE} e Γ_{FC} sono i contributi dovuti alla deriva elettrica e di Spitzer (o classico) calcolati esattamente in [8], i quali risultano, all'ordine più significativo (nello sviluppo perturbativo in termini del raggio di Larmor), indipendenti dalla perturbazione $\tilde{f}_1$. Il contributo Γ_{FG} è il cosiddetto termine 'geometrico' che risulta esplicitamente:

$$(11) \quad \Gamma_{FG} = \iint_{p_0=c} d\Sigma \int d^3v \frac{\nabla p_0}{|\nabla p_0|} \cdot \mathbf{v}_D F(f_0 + \tilde{f}_1)$$

dove supporremo, per semplicità, che non vi siano contributi da parte della distribuzione di equilibrio f_0 (condizione soddisfatta in generale per configurazioni con shear finito). Usando allora l'identità;

$$(12) \quad \sum_k \iint_{p_0=c} \frac{d\Sigma}{|\nabla p_0|} \int d^3v \tilde{f}_{1,k} C(f_0 | f_1) / f_{0,k} = \sum_k \iint_{p_0=c} \frac{d\Sigma}{|\nabla p_0|} \int d^3v G_k \tilde{f}_{1,k}$$

dalla definizione di $\dot{W}$ risulta immediatamente:

$$(13) \quad \dot{W} = - \sum_k \left\{ A_{1k} \Gamma_{1G,k} + A_{2k} \Gamma_{EG,k} + \iint_{p_0=c} \frac{d\Sigma}{|\nabla p_0|} A_{3k} J_{||k} \right\}$$

dove $\Gamma_{1G,k}$ e $\Gamma_{EG,k}$ sono rispettivamente i flussi di particelle ($F=1$) e di energia cinetica ($F=E=mv^2/2$), mentre $J_{||k}$ è la densità di corrente parallela trasportata dalla specie k -esima, ovvero:

$$(14) \quad J_{||k} = e_k \int d^3v v_{||} \tilde{f}_{1,k}$$

Nella relazione (13) A_{1k} , A_{2k} e A_{3k} sono le forze « termodinamiche » ovvero:

$$(15) \quad \begin{aligned} A_{1k} &= - \frac{\partial}{\partial p_0} \ln N_k \left(1 - \frac{3}{2} \eta_k \right) \\ A_{2k} &= - \frac{1}{T_k^2} \frac{\partial}{\partial p_0} \ln T_k \\ A_{3k} &= E_{||}^{\text{rot}} / T_k \end{aligned}$$

con $\eta_k = \partial \ln T_k / \partial \ln N_k$. Ne segue, dunque, che per la determinazione dei summenzionati flussi non è, a rigore, necessario risolvere l'equazione di deriva (1), bensì è sufficiente ottenere l'espressione di $\dot{W}$, problema che, in linea di

principio, può presentarsi più semplice in quanto richiede un minor grado di 'informazione'. Tale conclusione è, dunque, del tutto analoga a quella cui si perviene nella trattazione di configurazioni (assi-) simmetriche [9-11], cosa che consente di applicare, in particolare, analoghi metodi perturbativi nello studio del trasporto collisionale in geometria generale. Tale questione sarà esaminata in dettaglio in una successiva nota [11].

4. CONCLUSIONI

La formulazione variazionale illustrata in questa comunicazione è potenzialmente applicabile allo studio di plasmi confinati sia artificialmente in laboratorio (nelle più svariate configurazioni di equilibrio) che osservati in natura, ed è valida sotto ipotesi molto generali, la cui verifica si fonda, conclusivamente, soltanto sulle osservazioni sperimentali. Tale teoria può dunque essere utile per la descrizione dei fenomeni di trasporto che intervengono in tali sistemi dinamici.

BIGLIOGRAFIA

- [1] CHEW C., GOLDBERGER M. L., LOW F. (1954) - « Proc. Roy. Soc. (London) », *A* 236, 112;
RUTHERFORD P. H. (1970) - « Phys. Fluids », *13*, 1482.
- [2] FRIEMAN E. A. (1970) - « Phys. Fluids », *13*, 490.
- [3] STRINGER T. E. (1972) - « Nucl. Fusion », *12*, 689.
- [4] CONNOR J. W., HASTIE R. J. (1973) - « Nucl. Fusion », *13*, 221.
- [5] KROMMES J. A., RUTHERFORD P. H. (1973) - « Nucl. Fusion », *14*, 695.
- [6] DAVIDSON J. N. (1976) - « Nucl. Fusion », *16*, 731.
- [7] TSANG K. T. (1976) - « Nucl. Fusion », *17*, 557.
- [8] TESSAROTTO M., in pubblicazione su « Annali di Mat. Pura ed Appl. » (1980).
- [9] ROSENBLUTH M. N., HAZELTINE R. D., HINTON F. L. (1972) - « Phys. Fluids », *15*, 116.
- [10] HAZELTINE R. D., HINTON F. L., ROSENBLUTH M. N. (1973) - « Phys. Fluids », *16*, 1645.
- [11] TESSAROTTO M., in preparazione (1980).