
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GABRIELLA CORSI TANI

Su una congettura di J.R. Durbin e M. McDonald

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 69 (1980), n.3-4, p. 106-110.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_69_3-4_106_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Algebra. — *Su una congettura di J. R. Durbin e M. McDonald.*
 Nota (*) di GABRIELLA CORSI TANI, presentata dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this Note it is proved that a finite p -group G , which is not abelian of type $(2, 2)$, has a c.c.s. (characteristic cyclic series) if and only if $\text{Aut } G$ is supersoluble. It follows that a supersoluble group can occur as automorphism group of a finite p -group (nonabelian of type $(2, 2)$) only if strictly p -closed.

1. INTRODUZIONE

Nel 1971 J. R. Durbin e M. McDonald, in uno studio [7] sui gruppi aventi una c.c.s. (characteristic cyclic series), cioè una catena caratteristica a fattori ciclici, congetturano (dopo averlo dimostrato nel caso $p = 2, 3$) che un p -gruppo finito G possa avere una c.c.s. se e solo se $\text{Aut } G$ (l'automorfo di G) è supersolubile di esponente divisore di $p^t(p-1)$. Dimostriamo qui la validità di tale congettura (**); proveremo anzi che, se G non è abeliano di tipo $(2, 2)$, è sufficiente affinché G abbia una c.c.s., che sia $\text{Aut } G$ supersolubile. Si ottiene questo risultato attraverso una descrizione del sottogruppo di Fitting $F(\text{Aut } G)$ dell'automorfo di G .

Più precisamente proveremo che: se G è un p -gruppo finito non abeliano, $F(\text{Aut } G)$ è sempre un p -gruppo; per il Teorema 1 di R. Laue [11] si può dare allora la seguente descrizione di $F(\text{Aut } G)$:

(i) Se G è un p -gruppo finito non abeliano, o abeliano con $p = 2$, non elementare, $F(\text{Aut } G)$ è un p -gruppo (diverso dall'identità [13]).

(ii) Se G è un p -gruppo finito abeliano non elementare, con $p \neq 2$, allora $F(\text{Aut } G) = \mathcal{B} \times \mathcal{P}$, dove $\mathcal{P}$ è un p -gruppo non identico e $\mathcal{B}$, ciclico di ordine $p-1$ e incluso in $Z(\text{Aut } G)$, è costituito da automorfismi potenza omogenei.

Tenuto conto che, per un p -gruppo abeliano elementare G , è sempre $O_p(\text{Aut } G) = 1$ (cfr. [13]), si ha infine:

(iii) Se G è un p -gruppo finito abeliano elementare, allora $F(\text{Aut } G) = \mathcal{B}$, dove $\mathcal{B}$ è come in (ii), eccettuati i casi G di tipo $(2, 2)$ o $(3, 3)$ in cui si ha

(*) Pervenuta all'Accademia il 1° ottobre 1980.

(**) Durante la correzione delle bozze mi sono accorta che una seconda e più generale congettura di J. R. Durbin e M. McDonald è stata provata da A. Baartmans (1974) in « J. Algebra », 29, pp. 143-149. La mia dimostrazione è peraltro indipendente e si applica a tutti i p -gruppi finiti diversi da $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e non solo a quelli che non hanno tale gruppo come fattore diretto.

rispettivamente: $F(\text{Aut } G) \simeq \mathbf{Z}_3$; $F(\text{Aut } G) = \mathbf{Q}$ (gruppo dei quaternioni di ordine 8).

Le notazioni sono quelle usuali, quali si trovano ad esempio in [8]. I gruppi di cui tratteremo sono tutti finiti.

2. GRUPPI Σ -SOLUBILI E Σ -NILPOTENTI

DEFINIZIONE 1. Dato un gruppo G , un gruppo Σ si dirà *un gruppo di operatori di G* (e G si dirà un Σ -gruppo) se è dato un omomorfismo τ di Σ in $\text{Aut } G$; se indichiamo con $C_\Sigma(G)$ il nucleo di τ si ha dunque che $\Sigma/C_\Sigma(G)$ è isomorfo ad un sottogruppo di $\text{Aut } G$. Per semplicità indicheremo con il medesimo simbolo σ l'automorfismo associato da τ all'operatore $\sigma \in \Sigma$ e, se $\mathcal{B}$ è un sottogruppo di $\text{Aut } G$ incluso in Σ^τ , diremo che $\mathcal{B}$ è incluso in Σ .

DEFINIZIONE 2. Un Σ -gruppo G si dirà Σ -solubile se possiede una Σ -catena subnormale a fattori ciclici; ciò equivale a dire che G è risolubile e Σ normalizza una serie di composizione di G .

G si dirà Σ -nilpotente, se Σ stabilizza una catena subnormale di G , ossia se Σ induce l'identità in ogni fattore di una Σ -catena subnormale di G .

OSSERVAZIONE 3. Se $\Sigma = \text{Aut } G$, G è Σ -solubile se e solo possiede una c. c. s.

TEOREMA 4. (B. Huppert [9]; S. A. Syskin [14])⁽¹⁾. Se Σ è un gruppo di operatori del gruppo G , e G è Σ -solubile, allora $\Sigma/C_\Sigma(G)$ è supersolubile.

COROLLARIO 5. Se il gruppo G ha una c.c.s. allora $\text{Aut } G$ è supersolubile.

DEFINIZIONE 6. (R. Baer [2]). Un gruppo G si dice *strettamente p -chiuso* se $G'G^{p-1}$ è un p -sottogruppo di G .

LEMMA 7. (R. Baer [3], Lemma 5.1)⁽²⁾. Se Σ è un gruppo di automorfismi, abeliano di esponente divisore di $p-1$, di un p -gruppo abeliano elementare

(1) B. Huppert, in [9] Teorema 12, prova il teorema sotto la restrizione $\text{Inn}(G) \subseteq \Sigma$, che viene tolta da S. A. Syskin [14]. La formulazione di B. Huppert è apparentemente diversa, ma ci si riconduce a questa pensando G immerso nel suo prodotto semidiretto con $\Sigma/C_\Sigma(G)$. J. R. Durbin e McDonald danno una diversa e più lunga dimostrazione del teorema nel caso particolare $\Sigma = \text{Aut } G$.

Questo teorema si può anche estendere al caso G infinito, sostituendo l'induzione sulla lunghezza di una Σ -catena a fattori ciclici di G all'induzione sugli ordini di G e Σ , usata da B. Huppert (cfr. [5]).

(2) La formulazione di Baer è espressa con un diverso linguaggio ed è più generale, ma la sua dimostrazione si adatta facilmente alla dimostrazione del lemma nella forma qui adottata (cfr. [5]). Si può ricavare questo lemma anche come caso particolare del Teorema 1.3 di [2]: la dimostrazione di quest'ultimo si basa sul fatto che un gruppo strettamente p -chiuso è supersolubile e ciò poggia a sua volta su una caratterizzazione dei gruppi supersolubili data dallo stesso Baer in [1] Teorema 1, pag. 184.

M che sia Σ -irriducibile (ossia che non ammetta Σ -sottogruppi propri non banali), allora Σ è ciclico e $|M| = p$.

TEOREMA 8. (R. Baer [2]; P. Schmid [12])⁽³⁾. *Se Σ è un gruppo di operatori di un p -gruppo G :*

- a) G è Σ -nilpotente se e solo se $\Sigma/C_\Sigma(G)$ è un p -gruppo.
- b) G è Σ -solubile se e solo se $\Sigma/C_\Sigma(G)$ è un gruppo strettamente p -chiuso.

Dimostrazione. a) È ben noto (cfr. per esempio [8] Corollario 5.3.3.) che, se Σ stabilizza una catena subnormale del p -gruppo G , allora $\Sigma/C_\Sigma(G)$ è un p -gruppo. Se viceversa $\Sigma/C_\Sigma(G)$ è un p -gruppo, anche il prodotto semidiretto H di G con $\Sigma/C_\Sigma(G)$ è un p -gruppo; se

$$1 = Z_0(H) \subset Z_1(H) \subset \dots \subset Z_c(H) = H$$

è la sua serie centrale ascendente è facile vedere che la Σ -catena principale di G

$$(1) \quad 1 = Z_0(H) \cap G \subseteq Z_1(H) \cap G \subseteq \dots \subseteq Z_c(H) \cap G = G$$

è stabilizzata da Σ ; pertanto G è Σ -nilpotente.

b) Se G è Σ -solubile, non si perde in generalità supponendo che G ammetta una Σ -serie di composizione a fattori ciclici di ordine p ; sia essa:

$$(2) \quad 1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n = G.$$

Allora Σ deve indurre in ogni fattore G_{i+1}/G_i ($i = 0, \dots, n$) un gruppo di automorfismi abeliano di esponente divisore di $p - 1$, dunque

$$(\Sigma/C_\Sigma(G))^{p-1} \cdot (\Sigma/C_\Sigma(G))' \subseteq \bigcap_{i=0}^{n-1} C_{\text{Aut } G}(G_{i+1}/G_i);$$

ma il gruppo a destra nella relazione stabilizza la catena (2) e quindi è un p -gruppo; pertanto $\Sigma/C_\Sigma(G)$ è strettamente p -chiuso. Se viceversa $\Sigma/C_\Sigma(G)$ è strettamente p -chiuso, esso possiede un sottogruppo di Sylow normale $\mathcal{P}$ e, ragionando come in a), nel prodotto semidiretto H di G mediante $\mathcal{P}$, si ha che $\mathcal{P}$ stabilizza la catena (1) di G ; inoltre, poichè $\mathcal{P} \triangleleft \Sigma$, ogni $\sigma \in \Sigma$ induce in H un automorfismo che muta in sé G ed ogni $Z_i(H)$ ($i = 0, \dots, c$). Possiamo allora raffinare in G la catena (1) ad una Σ -serie di composizione, che sarà ancora stabilizzata da $\mathcal{P}$; Σ induce dunque in ogni fattore di tale raffinamento un gruppo di automorfismi isomorfo ad un quoziente di $\Sigma/\mathcal{P}$ e quindi abeliano di esponente divisore di $p - 1$. Per il Lemma 1.7 allora i fattori della Σ -serie di composizione costruita sono tutti ciclici di ordine p .

(3) Si può ricavare la formulazione b) come caso particolare del Teorema 2.1 di [2]. Per comodità del lettore ne tracciamo una dimostrazione diretta.

COROLLARIO 9. *Un p -gruppo G ha una c.c.s. se e solo se $\text{Aut } G$ è un gruppo strettamente p -chiuso (e come tale supersolubile di esponente $p^t(p-1)$).*

COROLLARIO 10. *Un 2-gruppo G ha una c.c.s. se e solo se $\text{Aut } G$ è un 2-gruppo (cfr. [7]).*

3. p -GRUPPI CON AUTOMORFO SUPERSOLUBILE

LEMMA 1. *Un p -gruppo finito G non si può mai decomporre nel prodotto diretto di due fattori A e B diversi dall'unità con A caratteristico e B abeliano.*

Infatti detti M un sottogruppo massimale di A ed H un sottogruppo minimale di B , esiste un omomorfismo $\alpha: A \rightarrow B$ con $\text{Ker } \alpha = M$ e $\text{Im } \alpha = N$. Ma l'esistenza di un omomorfismo non nullo da A in B equivale, per il risultato 3.1 [6] di M. Curzio, ad A non caratteristico in $G = A \times B$.

LEMMA 2. *Se G è un p -gruppo non abeliano, $F(\text{Aut } G)$ è un p -gruppo.*

Sia $\mathcal{B}$ il p' -sottogruppo di Hall di $F(\text{Aut } G)$, dal Lemma 1 e dal Teorema 3 di [11] segue immediatamente che $[G, \mathcal{B}] = 1$ oppure $C_G(\mathcal{B}) = 1$; quindi o $G = C_G(\mathcal{B})$, cioè $\mathcal{B} = 1$, oppure $G = [G, \mathcal{B}]$, nel qual caso, sempre per il Teorema 3 di [11], G è abeliano.

TEOREMA 3. *Se G è un p -gruppo non isomorfo a $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, G ha una c.c.s. se e solo se $\text{Aut } G$ è supersolubile.*

Dimostrazione. La necessità della condizione è espressa dal Corollario 5. Supponiamo dunque che $\text{Aut } G$ sia supersolubile. Se G è un p -gruppo soddisfacente le condizioni (i) dell'introduzione, $\text{Aut } G$ possiede un p -sottogruppo normale $\mathcal{P}$ che in particolare deve essere $\text{Aut } G$ -solubile; dal Teorema 8 segue allora che $\text{Aut } G/C_{\text{Aut } G}(\mathcal{P})$ è strettamente p -chiuso; ma $\mathcal{P}$ è il sottogruppo di Fitting di $\text{Aut } G$, quindi $C_{\text{Aut } G}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}$; dunque $\text{Aut } G$, in quanto ampliamento di un p -gruppo mediante un gruppo strettamente p -chiuso, è a sua volta strettamente p -chiuso. Per il Corollario 9 segue quindi che G ha una c.c.s.

In [7] si osserva che i p -gruppi abeliani G aventi una c.c.s. sono tutti e soli quelli di tipo $(p^{n_1}, p^{n_2}, \dots, p^{n_r})$ con $n_1 < n_2 < \dots < n_r$ e d'altra parte si prova che, se G soddisfa le condizioni (ii) dell'introduzione, G ha questo tipo se e solo se $\text{Aut } G$ è supersolubile.

Infine, se G è un p -gruppo abeliano elementare, allora $\text{Aut } G = \text{GL}(n, p)$ è supersolubile solo nel caso che G sia ciclico di ordine p o $G \simeq \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ ⁽⁴⁾. Pertanto i gruppi abeliani di tipo $(2, 2)$ sono gli unici p -gruppi finiti che, pur non avendo una c.c.s., hanno automorfo supersolubile.

COROLLARIO 4. *Un gruppo che sia l'automorfo di un p -gruppo non isomorfo a $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ è supersolubile se e solo se è strettamente p -chiuso (cfr. Corollario 9).*

(4) $\text{SL}(2, p) \subset \text{GL}(n, p)$ non è risolubile per $p \geq 5$; inoltre $\text{SL}(2, p)$ non è supersolubile per $p = 3$, essendo non supersolubile il suo quoziente di ordine 12 $\text{PSL}(2, 3)$. Infine $\text{GL}(n, 2)$ non è risolubile per $n \geq 3$, perché $F(\text{GL}(n, 2)) = 1$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. BAER (1957) - *Classes of finite groups and their properties*. « Illinois J. Math. », 1, 115-187.
- [2] R. BAER (1959) - *Supersoluble Immersion*. « Canad. J. Math. », 11, 353-369.
- [3] R. BAER (1969) - *Principal factors, maximal subgroups*, ecc. « Illinois J. Math. », 13, 1-52.
- [4] C. D. H. COOPER (1968) - *Power Automorphisms of a group*. « Math. Z. », 107, 335-356.
- [5] G. CORSI TANI (1974) - *Gruppi Σ -solubili e Σ -nilpotenti*. « Istituto Matematico Ulisse Dini », 1, 1-31.
- [6] M. CURZIO (1976) - *Gruppi risolubili a sottogruppi subnormali caratteristici*. « Symposia Math. », 17, 283-300.
- [7] J. R. DURBIN, M. McDONALD (1971) - *Groups with a characteristic cyclic series*, « J. Algebra », 18, 453-460.
- [8] D. GORENSTEIN (1968) - *Finite Groups*. Harper & Row.
- [9] B. HUPPERT (1954) - *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen*. « Math. Z. », 60, 409-434.
- [10] B. HUPPERT (1967) - *Endliche Gruppen I*. Springer Verlag.
- [11] R. LAUE (1976) - *Zur Charakterisierung der Fittinggruppe der Automorphismengruppe einer endlichen Gruppe*. « J. Algebra », 40, 618-626.
- [12] P. SCHMID (1972) - *Untergruppenreihen normalisierende Automorphismengruppen*. « Arch. Math. (Basel) », 23, 459-468.
- [13] P. SCHMID (1976) - *Normal p -Subgroups in the Group of outer automorphisms of a finite p -group*. « Math. Z. », 147, 271-277.
- [14] S. A. SYSKIN (1968) - *Super-solvable groups of automorphisms of finite solvable groups*. « Algebra i Logika », 7, 105-107.