ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIANFRANCO CAPRIZ

Soluzioni quasi—statiche in viscoelasticità

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 68 (1980), n.6, p. 507–513.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_6_507_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica dei continui. — *Soluzioni quasi-statiche in viscoelasticità* (*). Nota di GIANFRANCO CAPRIZ, presentata (**) dal Socio straniero C. TRUESDELL.

SUMMARY. — The quasi-static solution of a traction problem in the classical linear theory of viscoelasticity can be thought of as an approximation to the solution of a special problem in the dynamics of continua with fading memory.

In un recente lavoro [1] G. Fichera ha avanzato alcuni dubbi sulla rilevanza concreta della teoria dei corpi a memoria evanescente. Quella critica rende opportuna una interpretazione del ruolo, in un più ampio contesto, delle soluzioni cosiddette quasi-statiche di problemi di viscoelasticità lineare. Ad una tale interpretazione è dedicata questa nota.

Sia $\mathcal{B}$ un corpo continuo, B la regione di $\mathbf{R}^3$ occupata da $\mathcal{B}$ in un suo piazzamento, ∂B la frontiera di B , con normale esterna n . Sia $x [p]$ la posizione della generica particella di $\mathcal{B}$ in B [in un altro generico piazzamento di $\mathcal{B}$]; sia

$$u = p - x$$

il vettore spostamento;

$$H = \nabla u$$

il gradiente di spostamento (inteso rispetto al piazzamento B);

$$F = \nabla p = I + \nabla u$$

il gradiente di posizione. Sia infine

$$F = RU \quad , \quad R, R^T = I \quad , \quad U = (F^T F)^{1/2}$$

la nota decomposizione in prodotto di F .

Quanto alle proprietà materiali si supponrà che $\mathcal{B}$ sia a memoria evanescente (si veda, ad esempio, [2], Sez. 38-41); precisamente, detto S il tensore di sforzo di Piola-Kirchhoff, si supponrà che valga per $\mathcal{B}$ una equazione costitutiva del tipo

$$(1) \quad S(t) = \int_{s=0}^{\infty} (F(t-s), F(t)).$$

(*) Lavoro svolto presso il Dipartimento di Meccanica della Johns Hopkins University di Baltimora, U.S.A., in base ad accordi con la U.S. National Science Foundation.

(**) Nella seduta del 26 giugno 1980.

Più esplicitamente, con le notazioni di [2], Sez. 38,

$$S(t) = |\det F(t)| F(t) \mathfrak{f}(U^2(t)) U^{-T}(t) + \\ + |\det F(t)| R(t) \mathfrak{F}_{s=0}^{\infty}(G^*(s, t); U^2(t)) U^{-T}(t),$$

dove

$$G^*(s, t) = U^{-1}(t) U^2(t-s) U^{-1}(t) - I.$$

I funzionali $\mathfrak{H}$ ed $\mathfrak{F}$ vanno intesi definiti sopra una classe $\mathcal{K}$ di storie di deformazione (cioè di funzioni $F(t-s)$, o rispettivamente $U(t-s)$, della variabile non negativa s), classe che appartiene ad un conveniente spazio $\mathcal{S}$ di storie. Per fissare le idee si può pensare: ad uno spazio $\mathcal{S}_B$ di Banach di funzioni $A(x)$ definite per $x \in B$ e con valori in Lin^+ (o Sim^+) e norma $\|A(x)\|$; ad un intervallo fissato $I = (-\infty, d]$ di $\mathbf{R}$ per i valori della variabile tempo t ; quindi, per ogni t in I , allo spazio $\mathcal{S}$ di funzioni di s ($s \geq 0$) con valori in $\mathcal{S}_B$ e norma

$$\|F(x, t)\| = \left(\int_0^{\infty} h(s) \|F(x, t-s)\|^2 ds \right)^{1/2},$$

dove $h(s)$ è un obliivatore nel senso di Coleman e Noll (si veda, ad esempio, [2], Sez. 38).

Va anche inteso: che $\mathcal{K}$ contenga almeno un intorno della storia banale $F = I^\dagger$ (cioè della storia a valore costante I); che

$$\mathfrak{F}_{s=0}^{\infty}(I^\dagger; U^2(t)) = 0;$$

ed infine che B sia un piazzamento esente da sforzi, nel senso che

$$\mathfrak{H}_{s=0}^{\infty}(I^\dagger; I) = 0.$$

Dato lo scopo limitato della nota, non si rendono esplicite precise condizioni di regolarità su $\mathfrak{H}$; si supporrà semplicemente che $\mathfrak{H}$ sia tale da render lecite le operazioni che man mano si indicheranno. Del resto restrizioni qualitative su $\mathfrak{H}$ non sono sufficienti per costruire una buona teoria; il semplice esempio citato nella memoria di Fichera conferma l'importanza (anche per la dimostrazione di teoremi di esistenza ed unicità) di alcune restrizioni quantitative già generalmente accettate come conseguenza di considerazioni meccaniche e termodinamiche.

Si prende in considerazione per semplicità il solo problema di trazione, per quanto, dato il carattere formale degli sviluppi, non ci sia difficoltà a considerare problemi alternativi.

Se ρ_0 è la densità di $\mathcal{B}$ in B , $b(x, t)$ la forza per unità di massa ed $s(x, t)$ la trazione superficiale, il bilancio della quantità di moto richiede che

$$(2) \quad \text{Div } S + \rho_0 \dot{b} = \rho_0 \ddot{p}, \quad \text{in } B,$$

$$(3) \quad S n = s, \quad \text{in } \partial B.$$

Assegnate che siano b ed s rispettivamente in $B \times I$ e $\partial B \times I$, interessa cercare soluzioni $p(x, t)$ delle (1), (2), (3), che soddisfano a certe « condizioni iniziali ». Queste ultime potrebbero richiedere ad esempio che

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} p(x, t) = p_{-\infty}(x), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{p}(x, t) = v_{-\infty}(x),$$

dove $p_{-\infty}, v_{-\infty}$ sono funzioni assegnate su B . È più tradizionale introdurre condizioni alternative, avendo d'occhio teoremi di unicità (si veda, ad esempio, [3], Sez. 28 e 40 e, per un recente contributo, [4]); comunque la scelta è inessenziale nel contesto della nota presente, dove prevale la preoccupazione di stabilire un collegamento con la trattazione di problemi quasi-statici nella teoria lineare classica della viscoelasticità.

In proposito appare conveniente seguire una procedura analoga a quella proposta da Signorini nella teoria non lineare dei corpi iperelastici.

Si introduce un parametro ε moltiplicativo dei carichi

$$b = \varepsilon \bar{b}, \quad s = \varepsilon \bar{s}$$

e ci si pone il problema della esistenza di soluzioni analitiche in ε

$$p = x + \sum_1^{\infty} \varepsilon^k u_k,$$

con gradiente

$$F = 1 + \sum_1^{\infty} \varepsilon^k H_k, \quad H_k = \nabla u_k,$$

soluzioni per le quali il tensore degli sforzi è dato dallo sviluppo

$$(5) \quad S(x, t) = \sum_1^{\infty} \varepsilon^k S_k(x, t)$$

dove

$$(6) \quad S_k(t) = \mathbf{L} H_k(t) + \mathfrak{L}(\{H_r(t-s)\}_{r=0}^{\infty}) + \\ + \mathfrak{S}(\{\{H_r(t-s)\}_1^{k-1}, \{H_r(t)\}_1^{k-1}\}).$$

Nella (6) $\mathbf{L}$ è la derivata di $\mathfrak{S}$ rispetto al valore attuale $F(t)$ di F ed $\mathfrak{L}$ è la derivata di Fréchet di $\mathfrak{S}$ rispetto alla storia passata $\{F(t-s); s > 0\}$ di F ; entrambe le derivate si intendono calcolate per $F(t) = 1$ e sulla storia banale

$F(t-s) = 1^\dagger$. È importante notare che $\mathbf{L}$ ed $\mathfrak{L}$ sono indipendenti dall'indice k ; per quanto riguarda $\mathfrak{L}$ si presume di essere nelle condizioni per cui si può applicare un noto teorema di rappresentazione con un prodotto scalare, ciò che consente di scrivere

$$(7) \quad \mathfrak{L} \left(H_k(t-s) \right) = \int_0^\infty \mathbf{K}(s) H_k(t-s) ds.$$

Nel complesso i primi due termini nel membro destro della (6) rappresentano così un funzionale di isposta del tipo di Boltzmann.

$\mathfrak{S}_k$ è un operatore non lineare che coinvolge derivate di ordine superiore di $\mathfrak{H}$, ma la cui espressione esplicita qui non interessa; esso va calcolato facendo uso di funzioni H_r con r minore di k . $\mathfrak{S}_1$, in particolare, è nullo.

Introducendo lo sviluppo (6) nelle (2), (3) si ottiene il sistema di equazioni lineari

$$(8) \quad \begin{aligned} \text{Div} \left(\mathbf{L} H_k(t) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s) H_k(t-s) ds \right) &= \rho_0 (\ddot{u}_k - b_k^*) & \text{in } B, \\ \left(\mathbf{L} H_k(t) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s) H_k(t-s) ds \right) n &= t_k^*, & \text{in } \partial B, \\ & k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

dove

$$(9) \quad \begin{aligned} b_1^* &= \bar{b} & ; & & b_k^* &= \frac{1}{\rho_0} \text{Div } \mathfrak{S}_k, & & k = 2, 3, \dots; \\ t_1^* &= \bar{t} & ; & & t_k^* &= -\mathfrak{S}_k n, & & k = 2, 3, \dots. \end{aligned}$$

Pur con ovvie cautele, il complesso di equazioni (8), (9) si può pensare come un modello alternativo del sistema originale (1), (2), (3). Ciascuna approssimazione (8) richiede la soluzione di un problema classico di viscoelasticità lineare.

Val la pena a questo punto aprire una parentesi e ricordare una osservazione pertinente a problemi di iperelasticità non lineare (si veda [5], Sez. 6-8). Per offrire una spiegazione dei casi di incompatibilità scoperti da Signorini in quel contesto, conviene cominciare col pensare ad uno speciale problema di elastodinamica per deformazioni finite: precisamente, assegnati in un problema di trazione i carichi (proporzionali ad un parametro ε), il problema consiste nel cercare piazzamenti tali che, se si pone $\mathcal{B}$ in uno di essi (con velocità iniziale nulla), ne consegue un moto nel quale il campo delle accelerazioni è di ordine superiore ad uno nel parametro ε . Ciascun piazzamento con questa proprietà è rappresentato in prima approssimazione dalla soluzione di un problema di elastostatica lineare.

Se la accelerazione risulta di ordine m in ε , si può chiamare di ordine m il piazzamento trovato; soluzioni statiche per le equazioni non lineari della iperelasticità corrispondono a piazzamenti di ordine infinito, e ciascun caso di piazzamento di ordine finito (maggiore di 1) rappresenta un caso di « incompatibilità », nel senso di Signorini, tra la elastostatica lineare e la elastostatica per deformazioni finite.

Questa situazione ha una controparte nella teoria classica lineare dei corpi viscoelastici. Si studiano in quel contesto soluzioni di problemi quasi-statici; ebbene, tali soluzioni possono essere interpretate come approssimazioni del primo ordine a funzioni rappresentanti moti di un corpo a memoria evanescente, moti nei quali la accelerazione è di ordine due almeno rispetto ad un parametro moltiplicativo dei carichi.

Se questa interpretazione è accettata, la assenza o la molteplicità di soluzioni in un problema quasi statico non può essere presa necessariamente come indice del fallimento dello schema meccanico dei corpi a memoria evanescente (come la presenza di casi di incompatibilità in iperelasticità non implica il fallimento di quello schema). Non va escluso che in qualche caso la accelerazione sia dello stesso ordine dei carichi, qualunque sia la scelta delle condizioni iniziali (4); allora è la impostazione quasi-statica che perde interesse. È come se (ben più grossolanamente) si cercasse una soluzione quasi-statica di un problema di trazione con carichi non bilanciati. Viceversa può accadere che esistano infinite approssimazioni del primo ordine a circostanze iniziali a partire dalle quali il moto procede con accelerazione di ordine almeno due.

Per spingere oltre la analogia con il procedimento di perturbazione di Signorini, proponiamoci di cercare condizioni necessarie per l'esistenza di una soluzione quasi-statica di ordine m per il problema (1), (2), (3) cioè per l'esistenza per $k = 1, 2, \dots, m$ di soluzioni del sistema

$$(10) \quad -\text{Div} \left(\mathbf{L} H_k(t) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s) H_k(t-s) ds \right) = \rho_0 b_k^*, \quad \text{in } B,$$

$$(11) \quad \left(\mathbf{L} H_k(t) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s) H_k(t-s) ds \right) n = t_k^*, \quad \text{in } \partial B.$$

Se si moltiplicano scalarmente ambo i membri della (10) per una qualunque funzione v il cui gradiente $V = \nabla v$ appartiene a $\mathcal{H}$, si integra su B e si tiene conto della (11), si ottiene

$$(12) \quad \int_B V(t) \cdot \left(\mathbf{L} H_k(t) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s) H_k(t-s) ds \right) = \int_B \rho_0 b_k^* \cdot v + \int_{\partial B} t_k^* \cdot v.$$

Dunque se, come conseguenza ad esempio di certe proprietà di simmetria di $\mathbf{L}$ e di $\mathbf{K}$, esiste una classe $\mathcal{V}$ di funzioni v per le quali il membro sini-

stro della (12) si annulla, ne conseguono condizioni sui dati

$$(13) \quad \int_B \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial B} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

e condizioni ausiliarie successive

$$(14) \quad \int_B \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}_k = 0, \quad \forall \mathbf{V} | \mathbf{V} \in \mathcal{H}, \quad \mathbf{V} = \nabla v, \quad v \in \mathcal{V}, \quad k = 2, 3, \dots, m.$$

Nell'ambito più classico le (13) hanno il significato di condizioni di equilibrio: ad esempio, una qualunque funzione costante su B appartiene ovviamente a $\mathcal{V}$; corrispondentemente la (13) richiede alle forze agenti su B di avere risultante nullo. Ma va tenuto presente che la (14) per $k = 2$ pone essa stessa delle restrizioni alla approssimazione del primo ordine.

Nella viscoelasticità possono intervenire ulteriori condizioni restrittive. Infatti, se si integrano ambo i membri della (12) rispetto a t , si ottiene, dopo alcune ovvie trasformazioni,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^d dt \left(\int_B \rho_0 \mathbf{b}_k^* \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial B} \mathbf{t}_k^* \cdot \mathbf{v} \right) = \\ & = \int_{-\infty}^d dt \left(\int_B \mathbf{H}_k(t) \cdot \left(\mathbf{L}^T \mathbf{V}(t) + \int_0^{d-t} \mathbf{K}^T(s) \mathbf{V}(t+s) ds \right) \right) = \\ & = \int_{-\infty}^d dt \left(\int_{\partial B} \mathbf{u}_k(t) \cdot \left(\mathbf{L}^T \mathbf{V}(t) + \int_0^{d-t} \mathbf{K}^T(s) \mathbf{V}(t+s) ds \right) \right) n + \\ & - \int_B \mathbf{u}_k(t) \cdot \text{Div} \left(\mathbf{L}^T \mathbf{V}(t) + \int_0^{d-t} \mathbf{K}^T(s) \mathbf{V}(t+s) ds \right). \end{aligned}$$

Dunque se esiste una classe $\mathcal{H}$ di soluzioni v non banali del sistema omogeneo

$$(15) \quad \begin{aligned} & \text{Div} \left(\mathbf{L}^T \mathbf{V}(t) + \int_0^{d-t} \mathbf{K}^T(s) \mathbf{V}(t+s) ds \right) = 0, \quad \text{in } B, \\ & \mathbf{L}^T \mathbf{V}(t) + \int_0^{d-t} \mathbf{K}^T(s) \mathbf{V}(t+s) ds = 0, \quad \text{in } \partial B, \\ & \mathbf{V} = \nabla v, \quad \mathbf{V} \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

i dati devono ulteriormente soddisfare la condizione

$$(16) \quad \int_{-\infty}^d dt \left(\int_B \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial B} \mathbf{i} \cdot \mathbf{v} \right) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{W},$$

e dovranno essere anche verificate le condizioni ausiliarie

$$(17) \quad \int_{-\infty}^d dt \int_B \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}_k = 0, \quad \forall \mathbf{V} \mid \mathbf{V} = \nabla v, \quad v \in \mathcal{W}, \quad k = 2, 3, \dots, m.$$

In conclusione: 1) perchè esistano soluzioni del problema quasi-statico lineare del primo ordine devono essere verificate per i carichi le condizioni (13), (16); 2) se non esistono soluzioni del problema quasi-statico lineare del primo ordine, è da presumere che il fenomeno conseguente alla applicazione dei carichi sia non quasi-statico comunque si scelgano i dati iniziali e che l'approssimazione del primo ordine per l'accelerazione sia non nulla; 3) se la soluzione del problema quasi-statico lineare del primo ordine non è unica, ci si può porre il problema dell'esistenza di soluzioni quasi-statiche di ordine superiore e quindi della determinazione univoca della soluzione coll'uso di condizioni ausiliarie del tipo (14) o (17).

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. FICHERA (1979) - *Avere una memoria tenace crea gravi problemi*, « Arch. Rat. Mech. Analysis », 70, 101-112.
- [2] C. TRUESDELL e W. NOLL (1965) - *The non-linear field theories of mechanics*, « Encyclopedia of Physics », Vol. III/3. Springer, Berlin.
- [3] M. J. LEITMAN e G. M. C. FISHER (1973) - *The linear theory of viscoelasticity*, « Encyclopedia of Physics », Vol. VIa/3. Springer, Berlin.
- [4] M. E. GURTIN, D. W. REYNOLDS e S. J. SPECTOR (1980) - *On uniqueness and bifurcation in nonlinear viscoelasticity*, « Arch. Rat. Mech. Analysis », 72, 303-313.
- [5] G. CAPRIZ e P. PODIO GUIDUGLI (1974) - *On Signorini's perturbation method in finite elasticity*, « Arch. Rat. Mech. Analysis », 57, 1-30.