Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Placido Cicala

Sulla teoria non lineare delle verghe e delle travi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **68** (1980), n.6, p. 501–506.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_6_501_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1980.

Meccanica. — *Sulla teoria non lineare delle verghe e delle travi.* Nota [*] del Socio PLACIDO CICALA.

SUMMARY. — To define the asymptotic behaviour of elastic, one-dimensional structural elements, a vanishing parameter (ε) is introduced, associated with the small elongations of high strength materials. Two categories of non linear problems are recognized, concerning respectively "rods" and "beams" according as the slenderness has the order (ε) and $\sqrt{(\varepsilon)}$. First approximation formulations are presented for either case and refinements prospected.

1. Le presenti considerazioni si riferiscono a problemi non lineari relativi alle travi elastiche formate da materiale il cui funzionamento strutturale cessa assai prima che le dilatazioni si accostino al valore uno: vi rientrano quindi acciai, leghe leggere o materiali compositi, si escludono elementi di grande deformabilità (gomma), si collocano ai margini del campo le strutture in cemento armato, per le quali saranno, in genere, da considerare deformazioni addizionali dovute a fluage o fessurazione.

Problemi del tipo in esame vennero già risolti da Eulero. A Kirchhoff e Clebsch è dovuta la fondamentale trattazione, riportata nel trattato di Love insieme con le più importanti applicazioni. Sui successivi sviluppi Antman dà una visione globale [1], con una trattazione dalle finalità assai ampie: stabilire una teoria generale, capace di esaminare qualunque situazione di carico, di vincolo e di geometria per travi elastiche anche non molto snelle, includendo nel bilancio d'energia le variazioni d'entropia. Ciò porta ad una trattazione complessa dalla quale è difficile giungere a conclusioni concrete.

Nella presente nota si intraprende l'esame del comportamento limite della struttura per $(\varepsilon) \to 0$, essendo (ε) un parametro dell'ordine della massima dilatazione che il materiale sopporta [2]. Stabilita una lunghezza di riferimento L, si osserva che, se l'asse di una trave viene curvato secondo un cerchio di raggio L, affinchè le massime dilatazioni restino di ordine (ε) le dimensioni delle sezioni della trave debbono essere piccole come $\mathrm{L}\,(\varepsilon)$. D'altra parte, se in corrispondenza del carico critico di Eulero si raggiungono dilatazioni di ordine (ε), il quadrato della snellezza deve essere $\simeq 1:(\varepsilon)$ e perciò le dimensioni della sezione di ordine $\sqrt{(\varepsilon)}\,\mathrm{L}$. Si presentano quindi due categorie di problemi: quelli, diciamo, delle « verghe » (rods) di snellezza $(\varepsilon)^{-1}$ e quelli delle « travi »

(*) Presentata nella seduta del 26 giugno 1980.

(1) S. S. ANTMAN - *The Theory of Rods*, Handbuch der Physik, Bd. VI a/2, Springer, Berlin 1972, pp. 641–703.

(2) Una trattazione asintotica per la verga caricata alle estremità è sviluppata nell'importante nota di G. E. HAY, *The finite displacement of thin rods*, « Trans. Am. Soc. », vol. 51, pp. 65–102. Sono ivi trattati alcuni aspetti del problema, qui considerato in una formulazione più affine all'usuale teoria delle travi.

(beams) di snellezza $(\varepsilon)^{-0.5}$. Dalla trattazione generale si derivano quindi due formulazioni, differenti per l'importanza relativa dei termini in equazione e quindi per la scelta dei termini fondamentali. Analoghe distinzioni si presentano nella teoria lineare delle strutture a guscio: lì si è sviluppata una tecnica che permette di stabilire gli ordini di grandezza dei termini in equazione in base ad un esame tabulare del sistema nel suo complesso, anche se formato da infinite equazioni differenziali [3]. Qui non si procederà in modo così sistematico: nella scrittura di qualche equazione si sfruttano conclusioni derivanti dalle successive. Eccettuate le dimensioni delle sezioni, tutte le lunghezze sono qui supposte $\simeq \mathrm{L}$: questo caratterizza la particolare classe di soluzioni in esame.

È interessante rilevare l'analogia fra strutture uni- e bidimensionali nei fenomeni non lineari. Come per la verga, cosi per il guscio, grandi deformazioni possono presentarsi in configurazioni inestensionali [4], ossia con dilatazioni di secondo ordine nelle fibre medie. In entrambi i casi le dilatazioni massime sono proporzionali al prodotto dello spessore per la curvatura derivante dall'inflessione. Inoltre per il guscio esistono inflessioni di passo relativamente corto, rette da equazioni non lineari che presentano varie analogie [5] con quelle qui scritte nel § 3: in questi stati, le deformazioni estensionali e quelli flessionali hanno uguale ordine di grandezza, sia per la trave sia per il guscio. Infine, per ambedue le strutture, le due teorie nella forma linearizzata conducono alla determinazione di carichi critici.

2. Il vettore $\boldsymbol{x}$ dà la posizione del punto nel corpo deformato nella forma

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + (x_1 + u_1)\,\boldsymbol{x}_1 + (x_2 + u_2)\,\boldsymbol{x}_2 + u_3\,\boldsymbol{x}_3 \tag{1}$$

in funzione delle coordinate x_1, x_2, x_3 delle quali dipendono gli spostamenti u_1, u_2, u_3: solo da x_3 dipendono il vettore $\boldsymbol{x}_0$ e i versori ortogonali $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$. Analoga espressione si scrive per il punto corrispondente $\overline{\boldsymbol{x}}$ nello stato iniziale, con $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ e $\overline{\boldsymbol{x}}_0, \overline{\boldsymbol{x}}_1, \overline{\boldsymbol{x}}_2, \overline{\boldsymbol{x}}_3$ per i vettori locali: $x_3 =$ cost. è una sezione piana del corpo. La libertà di scelta di $\boldsymbol{x}_0$ permette di porre tre condizioni per gli spostamenti: sia $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ per $x_1 = x_2 = 0$. Allora $\partial_3 \boldsymbol{x}_0$ (con $\partial_i = \partial/\partial x_i$) è tangente alla fibra deformata $x_1 = x_2 = 0$; stabilendo la coordinata x_3 in modo che $\partial_3 \overline{\boldsymbol{x}}_0$ sia unitario, si può scrivere

$$\partial_3 \overline{\boldsymbol{x}}_0 = \overline{\boldsymbol{x}}_3 \quad , \quad \partial_3 \boldsymbol{x}_0 = (1 + \varepsilon_0)\,\boldsymbol{x}_3 . \tag{2}$$

(3) P. CICALA, *Linear Shell Theories, An Asymptotic Approach*, Levrotto & Bella, Torino, Part. 1, 1978. Part. 2, 1980.

(4) P. CICALA, *Sulla teoria non lineare del guscio elastico*, « L'Aerotecnica, Missili e Spazio », n. 5, 1973, pp. 325–331.

(5) Si confrontino, ad esempio, le prime due equazioni (4) della nota sopra citata con la (15) della presente: gli addendi quadratici si corrispondono perfettamente. I termini precedenti nella (4) corrispondono a ε_0: quelli derivanti dalle curvature (12) trovano analogia con i primi due termini della (15). Naturalmente, sussiste identità negli ordini di grandezza di queste deformazioni.

La residua libertà nella scelta della terna locale permette di porre una condizione del tipo $\partial_1 u_2 = 0$ per $x_1 = x_2 = 0$. Il gradiente di rotazione della terna è definito scrivendo

$$\partial_3 \boldsymbol{x}_1 = \omega_3 \boldsymbol{x}_2 - \omega_2 \boldsymbol{x}_3 \quad , \quad \partial_3 \boldsymbol{x}_2 = \omega_1 \boldsymbol{x}_3 - \omega_3 \boldsymbol{x}_1 \; , \tag{3}$$
$$\partial_3 \boldsymbol{x}_3 = \omega_2 \boldsymbol{x}_1 - \omega_1 \boldsymbol{x}_2 \, .$$

Analoghe relazioni, con simboli sopralineati, si scrivono per lo stato iniziale.

Per l'analisi della deformazione servono le relazioni

$$\begin{aligned}
\partial_1 \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 (1 + \partial_1 u_1) + \boldsymbol{x}_2 \partial_1 u_2 + \boldsymbol{x}_3 \partial_1 u_3 \; , \\
\partial_2 \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 \partial_2 u_1 + \boldsymbol{x}_2 (1 + \partial_2 u_2) + \boldsymbol{x}_3 \partial_2 u_3 \\
\partial_3 \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 [\partial_3 u_1 + \omega_2 u_3 - \omega_3 (x_2 + u_2)] + \\
&\quad + \boldsymbol{x}_2 [\partial_3 u_2 + \omega_3 (x_1 + u_1) - \omega_1 u_3] + \\
&\quad + \boldsymbol{x}_3 [1 + \varepsilon_0 + \partial_3 u_3 + \omega_1 (x_2 + u_2) - \omega_2 (x_1 + u_1)] \, .
\end{aligned} \tag{4}$$

Piccole deformazioni derivanti da spostamenti finiti sono calcolabili dalla

$$2\, \varepsilon_{ij} = \partial_i \boldsymbol{x} \cdot \partial_j \boldsymbol{x} - \partial_i \overline{\boldsymbol{x}} \cdot \partial_j \overline{\boldsymbol{x}} \tag{5}$$

che fornisce le componenti cartesiane di deformazione limitatamente ai termini $\simeq (\varepsilon)$ per la verga la cui sezione abbia tutte le dimensioni dell'ordine di (ε) rispetto alle altre misure della struttura; i termini fondamentali delle espressioni (5) scritte in base alle (4) sono pochi. In particolare, la dilatazione ε_{33} della fibra x_1, $x_2 =$ cost. si può scrivere

$$\varepsilon_{33} = (\omega_1 - \overline{\omega}_1)\, x_2 - (\omega_2 - \overline{\omega}_2)\, x_1 + \varepsilon_0 + \partial_3 u_3 \, . \tag{6}$$

Per gli scorrimenti $\gamma_{13} = 2\, \varepsilon_{13}$ e analogo, si scrive

$$\gamma_{13} = (\overline{\omega}_3 - \omega_3)\, x_2 + \partial_1 u_3 \quad , \quad \gamma_{23} = (\omega_3 - \overline{\omega}_3)\, x_1 + \partial_2 u_3 \, . \tag{7}$$

Per precisare gli ordini di grandezza si debbono includere le considerazioni di equilibrio: per le azioni globali sulla sezione si ha, con $\mathbf{R} = \mathrm{T}_1 \boldsymbol{x}_1 + \mathrm{T}_2 \boldsymbol{x}_2 + \mathrm{N} \boldsymbol{x}_3$, $\mathbf{M} = \mathrm{M}_1 \boldsymbol{x}_1 + \mathrm{M}_2 \boldsymbol{x}_2 + \mathrm{M}_3 \boldsymbol{x}_3$,

$$\partial_3 \mathbf{R} + \boldsymbol{p} = 0 = \partial_3 \mathbf{M} + \boldsymbol{x}_3 \times \mathbf{R} \tag{8}$$

essendo $\mathbf{R}$ la risultante (le cui componenti T_1, T_2 costituiscono le forze taglianti, N lo sforzo assiale), $\boldsymbol{p}\, dx_3$ la forza esterna sull'elemento, $\mathbf{M}$ il momento risultante le cui componenti M_1, M_2 rappresentano i momenti flettenti: essi, con il punto $\boldsymbol{x}_0$ collocato nel baricentro della sezione, sono dati da

$$\mathrm{M}_1 = (\omega_1 - \overline{\omega}_1)\, \mathrm{EJ}_{22} - (\omega_2 - \overline{\omega}_2)\, \mathrm{EJ}_{12} \tag{9}$$

essendo $J_{ij} = \int x_i x_j \, dA$ calcolato sull'area della sezione: l'espressione di M_2 si ottiene da (9) scambiando gli indici 1, 2. La terza componente del momento è data da

$$M_3 = (\omega_3 - \overline{\omega}_3) \, G J_t \tag{10}$$

essengo $G J_t$ la rigidezza torsionale. Poichè questa, come quella flessionale è dell'ordine $EL^4 (\varepsilon)^4$, per le (8), (9), (10) le quantità $|\mathbf{M}|/L$, $|\mathbf{R}|$, $|\boldsymbol{p}|L$ sono di ordine $EL^2(\varepsilon)^4$. In particolare ne consegue $\varepsilon_0 \simeq (\varepsilon)^2$: la deformazione della fibra baricentrica è di secondo ordine (configurazione inestensionale). Fra le tensioni tangenziali sono predominanti quelle di torsione: per il loro calcolo le (7) danno la relazione $\frac{1}{2}(\partial_1 \gamma_{23} - \partial_2 \gamma_{13}) = \omega_3 - \overline{\omega}_3$ che, associata alle condizioni di equilibrio locale, definisce la torsione di St. Venant. Per gli spostamenti si ha $u \simeq L(\varepsilon)^2$.

3. Per la trave con dimensioni di sezione $\simeq L\sqrt{(\varepsilon)}$ consideriamo costanti i versori $\overline{\boldsymbol{x}}_1$, $\overline{\boldsymbol{x}}_2$, $\overline{\boldsymbol{x}}_3$ dello stato iniziale. Perchè le dilatazioni $x_1 \omega_2$, $x_2 \omega_1$ siano dell'ordine (ε), gli spostamenti da cui i gradienti ω_1, ω_2 dipendono saranno $\simeq L\sqrt{(\varepsilon)}$. Questi spostamenti ξ appaiono nelle espressioni seguenti

$$\boldsymbol{x}_0 = \overline{\boldsymbol{x}}_1 \xi_1 + \overline{\boldsymbol{x}}_2 \xi_2 + \overline{\boldsymbol{x}}_3 (x_3 + \xi_3) \quad , \quad \boldsymbol{x}_3 = \overline{\boldsymbol{x}}_1 \partial_3 \xi_1 + \overline{\boldsymbol{x}}_2 \partial_3 \xi_2 + \overline{\boldsymbol{x}}_3 . \tag{11}$$

Si trascurano rispetto a 1 le quantità $(\partial_3 \xi)^2 \simeq (\varepsilon)$. Con la rotazione θ si scrive

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= \overline{\boldsymbol{x}}_1 \cos\theta + \overline{\boldsymbol{x}}_2 \sin\theta - \overline{\boldsymbol{x}}_3 (\partial_3 \xi_1 \cos\theta + \partial_3 \xi_2 \sin\theta) \\ \boldsymbol{x}_2 &= -\overline{\boldsymbol{x}}_1 \sin\theta + \overline{\boldsymbol{x}}_2 \cos\theta + \overline{\boldsymbol{x}}_3 (\partial_3 \xi_1 \sin\theta - \partial_3 \xi_2 \cos\theta) . \end{aligned} \tag{12}$$

Da queste espressioni, in base alle (3) si ricava

$$\omega_2 = \partial_3^2 \xi_1 \cos\theta + \partial_3^2 \xi_2 \sin\theta \, , \; \omega_1 = \partial_3^2 \xi_1 \sin\theta - \partial_3^2 \xi_2 \cos\theta \, , \; \omega_3 = \partial_3 \theta . \tag{13}$$

I vettori (4) sono scomposti nelle direzioni fisse. In particolare si ha

$$\begin{aligned} \partial_3 \boldsymbol{x} = {} & \overline{\boldsymbol{x}}_1 (\partial_3 \xi_1 - X_2) + \overline{\boldsymbol{x}}_2 (\partial_3 \xi_2 + X_1) + \\ & + \overline{\boldsymbol{x}}_3 (1 + \partial_3 \xi_3 + \partial_3 u_3 + \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 + X_2 \partial_3 \xi_1 - X_1 \partial_3 \xi_2) \end{aligned} \tag{14}$$

essendo $X_1 = \omega_3 (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta)$, $X_2 = \omega_3 (x_2 \cos\theta + x_1 \sin\theta)$. Così, al posto della (6) si ottiene l'espressione

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33} = {} & \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 + \partial_3 \xi_3 + \partial_3 u_3 + \tfrac{1}{2}(\partial_3 \xi_1)^2 + \tfrac{1}{2}(\partial_3 \xi_2)^2 + \\ & + \tfrac{1}{2} \omega_3^2 (x_1^2 + x_2^2) . \end{aligned} \tag{15}$$

Se la rigidezza torsionale ha lo stesso ordine $EL^4(\varepsilon)^2$ come quelle flessionali, se eventuali carichi nell'equazione di momento intorno a $\boldsymbol{x}_3$ non superano l'ordine $EL^2(\varepsilon)^3$, risulta $\theta \simeq (\varepsilon)$: immediate semplificazioni conseguono nelle (12)–(15). Se invece quella rigidezza scende a valori assai più bassi, come avviene quando si adottano sezioni semplicemente connesse con pareti sottili, si entra nel campo della torsione di Vlasof–Wagner. Questa si allaccia agli spostamenti $u_3 = w\partial_3\theta$ essendo $w \simeq L^2(\varepsilon)$ lo svergolamento caratteristico della sezione: tali spostamenti sono calcolati integrando le (7) lungo linee di scorrimento nullo. Le corrispondenti dilatazioni $\partial_3 u_3$ entrano nei termini fondamentali della (15) con conseguente modifica delle (9); inoltre si ha un momento torcente addizionale espresso da $E\partial_3^3\theta\int w^2\,dA$, che ha lo stesso ordine di quello (10) della torsione di St. Venant se la rigidezza è $\simeq EL^4(\varepsilon)^3$. In tal caso è $\theta \simeq (\varepsilon)^0$ e le (12)–(15) valgono nella loro forma completa.

4. Il calcolo di prima approssimazione delle verghe nelle situazioni indicate implica 4 incognite scalari nella definizione dei vettori $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$. Le conseguenti deformazioni (4)–(7) determinano i momenti (9)–(10). Dalle condizioni di equilibrio (8) l'eliminazione degli sforzi taglianti conduce a 4 equazioni, con N come quinta incognita. Il sistema differenziale non lineare è completato dalla condizione di inestensionalità $|\partial_3\boldsymbol{x}_0| = 1$. In un ulteriore affinamento interverrebbero le incognite u, qui opportunamente separate dalle più rilevanti caratteristiche di moto della sezione. Sono allora da prendere in considerazione le equazioni di equilibrio punto per punto e sono da mettere in relazione tensioni e deformazioni introducendo come componenti covarianti le (5). Complicazioni analitiche derivano dal fatto che le tensioni entrano naturalmente nelle equazioni di equilibrio con le componenti controvarianti: scrivendo, come consueto, le relazioni fra tensori misti di tensione e deformazione, intervengono per la trasformazione dalle componenti contro- e covarianti rispettivamente, matrici dipendenti dagli spostamenti. Peraltro, il maggiore ostacolo per un coerente affinamento è di natura fisica: deriva dalla necessità di estendere a termini non lineari le relazioni tra tensioni e deformazioni [(6)]. Un calcolo di seconda approssimazione costruito su basi ipotetiche non può garantire maggior precisione che quello di prima approssimazione qui suggerito.

La formulazione (11) per le travi contiene esplicitamente le 4 incognite di prima approssimazione ξ_1, ξ_2, ξ_3, θ. Dalle (13), (15) e (7) si ricavano le deformazioni mediante le quali si esprimono i momenti e lo sforzo N, che qui corrisponde a deformazioni del primo ordine. Le 4 equazioni d'equilibrio anzidette completano il sistema delle equazioni differenziali, semplificato,

(6) MURNAGHAN (*Finite deformations of an elastic solid*, « Amer. Journ. of Mathem. », vol. 59, 1937, pp. 235–260) ha dato, per il corpo elastico isotropo, le relazioni derivanti dall'espressione dell'energia elastica contenente i termini cubici nelle componenti di deformazione. Vi entrano 3 costanti oltre le due dei termini quadratici.

qualora sia possibile, dalle relazioni $\theta \simeq (\varepsilon)$ o $\theta \simeq \sqrt{(\varepsilon)}$ oppure, ove sia $\theta \simeq (\varepsilon)^0$, scritto nella forma completa, incluse le tensioni di Vlasof–Wagner. In questo caso si può effettuare un primo passo di affinamento senza che si esiga la conoscenza dei termini $\simeq (\varepsilon)^2$ nelle relazioni d'elasticità. La trattazione linearizzata (negli spostamenti da una configurazione base) si ricava facilmente dallo stesso sistema indicato. Vi giocano un ruolo essenziale i termini quadratici della (15) (aventi lo stesso ordine degli addendi che precedono): nell'espressione del lavoro interno essi entrano a moltiplicare le tensioni dello stato di base, con pari ordine dei termini di energia flessotorsionale. In particolare, per la trave diritta di scarsa rigidezza torsionale, si giunge per questa via alla trattazione di Kappus sulla stabilità a pressotorsione.