ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ENNIO DE GIORGI, GIANNI DAL MASO, PLACIDO LONGO

Γ -Limiti di ostacoli

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 68 (1980), n.6, p. 481–487.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_6_481_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 26 giugno 1980

Presiede il Socio Anziano VINCENZO CAGLIOTI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Calcolo delle variazioni. — Γ -*Limiti di ostacoli*^(*). Nota di ENNIO DE GIORGI, GIANNI DAL MASO e PLACIDO LONGO, presentata^(**) dal Corresp. E. DE GIORGI.

SUMMARY. — In this paper we show that all limits of sequences of minimum problems of the type

$$\min \left\{ \int |Du|^2 + \int |u|^2 : u \geq \psi_h \quad \text{on } B \right\}$$

are minimum problems of the type

$$\min \left\{ \int |Du|^2 + \int |u|^2 + \int_B f(x, u) d\mu + \nu(B) \right\}$$

where μ, ν are positive Radon measures, $\mu \in H^{-1}$ and $f(x, u)$ is convex and non-increasing in the variable u .

In questa nota presentiamo alcuni teoremi relativi ai limiti di successioni di problemi di minimo di integrali del tipo di Dirichlet con ostacoli variabili. Tale argomento è stato in questi ultimi anni oggetto di studio da parte di vari autori (cfr. [1], ..., [9], [18] e [19]), in ipotesi meno generali per quanto riguarda la successione di ostacoli, anche se più generali per quanto riguarda gli integrali da minimizzare.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A.

(**) Nella seduta del 26 giugno 1980.

Prima di esporre i principali risultati, fissiamo alcune notazioni. Indicheremo con L^2, H^1, H^{-1}, C rispettivamente gli spazi $L^2(\mathbf{R}^n), H^1(\mathbf{R}^n), H^{-1}(\mathbf{R}^n), C(\mathbf{R}^n)$; per ogni sottinsieme E di $\mathbf{R}^n$ definiamo la *capacità di E* mediante la formula

$$\text{cap } E = \inf \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} \|u_h\|_{H^1} : u_h \in C \cap H^1, \sum_{h=1}^{\infty} |u_h(x)| \geq 1 \quad \forall x \in E \right\},$$

che ci dà una capacità esterna del tipo considerato in [16], [17] (precisamente coincidono gli insiemi di boreliani di capacità nulla).

Diremo che una proprietà $p(x)$ è vera cap. q.o. su E se $\text{cap} \{x \in E : p(x) \text{ è falso}\} = 0$. Per ogni funzione $u \in H^1$ poniamo

$$\tilde{u}(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\text{mis } B_r(x)} \int_{B_r(x)} u(y) dy$$

dove $B_r(x)$ è la sfera aperta di centro x e raggio r .

Indicheremo con $\mathcal{B}$ la famiglia dei boreliani limitati di $\mathbf{R}^n$ e con $\mathcal{A}$ la famiglia degli aperti limitati di $\mathbf{R}^n$. Una parte $\tilde{\mathcal{B}}$ di $\mathcal{B}$ (risp. di $\mathcal{A}$) si dirà ricca in $\mathcal{B}$ (risp. in $\mathcal{A}$) se per ogni famiglia $(B_t)_{t \in]0, 1[}$ di elementi di $\mathcal{B}$ (risp. di $\mathcal{A}$), con $\bar{B}_s \subseteq \dot{B}_t$ per ogni $s < t$, l'insieme $\{t \in]0, 1[: B_t \notin \tilde{\mathcal{B}}\}$ è al più numerabile (cfr. [15], [10]).

Indichiamo con $\mathcal{H}$ l'insieme delle terne (f, μ, ν) dove μ, ν sono misure di Radon positive, $\mu \in H^{-1}$, ed $f: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow]-\infty, +\infty]$ è una funzione con le seguenti proprietà:

- (i) per ogni $t \in \mathbf{R}$ $x \mapsto f(x, t)$ è boreliana su $\mathbf{R}^n$;
- (ii) per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ $t \mapsto f(x, t)$ è convessa, non crescente e semi-continua inferiormente su $\mathbf{R}$;
- (iii) per ogni $t \in \mathbf{R}$ ed ogni B di $\mathcal{B}$

$$\int_B f(x, t) d\mu(x) + \nu(B) \geq 0.$$

Indichiamo con $\mathcal{G}$ l'insieme delle funzioni $g: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ verificanti le seguenti condizioni:

- (iv) per ogni $t \in \mathbf{R}$ $x \mapsto g(x, t)$ è boreliana su $\mathbf{R}^n$;
- (v) per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ $t \mapsto g(x, t)$ è continua su $\mathbf{R}$;
- (vi) esistono $a \in L^1, c \in]0, 1[, C > 0$ tali che

$$-a(x) - c|t|^2 \leq g(x, t) \leq a(x) + C|t|^2 \quad \text{per ogni } (x, t) \in \mathbf{R}^{n+1}.$$

La classe $\mathcal{G}$ contiene ad esempio tutte le funzioni del tipo $g(x) \cdot t$ con $g \in L^2$.

Per ogni funzione $\psi: \mathbf{R}^n \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ consideriamo il funzionale tipo ostacolo dal basso $F_\psi: H^1 \times \mathcal{B} \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+$ definito da

$$(1.1) \quad F_\psi(u, B) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tilde{u} \geq \psi \quad \text{cap. q.o. su } B \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questa nota presentiamo le linee generali della dimostrazione del seguente teorema.

TEOREMA 1. - Sia (ψ_h) una successione di funzioni di $\mathbf{R}^n$ in $\bar{\mathbf{R}}$. Supponiamo che esista una funzione $\gamma: \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}_+$ tale che, per ogni $B \in \mathcal{B}$ ed ogni $h \in \mathbf{N}$

$$\min_{u \in H^1} [\|u\|_{H^1}^2 + F_{\psi_h}(u, B)] \leq \gamma(B).$$

Allora esistono una successione crescente di interi (h_k) , una terna (f, μ, ν) della classe $\mathcal{H}$ ed una famiglia $\tilde{\mathcal{B}}$ ricca in $\mathcal{B}$, tali che, posto

$$(1.2) \quad F(u, B) = \int_B f(x, \tilde{u}(x)) d\mu(x) + \nu(B),$$

e posto, per ogni funzione g della classe $\mathcal{G}$,

$$(1.3) \quad m_k(g, B) = \min_{u \in H^1} \left[\|u\|_{H^1}^2 + F_{\psi_{h_k}}(u, B) + \int_{\mathbf{R}^n} g(x, u) dx \right]$$

$$(1.4) \quad m(g, B) = \min_{u \in H^1} \left[\|u\|_{H^1}^2 + F(u, B) + \int_{\mathbf{R}^n} g(x, u) dx \right]$$

si ha

$$m(g, B) = \lim_k m_k(g, B)$$

per ogni $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ ed ogni $g \in \mathcal{G}$.

OSSERVAZIONE 2. - Si può dimostrare che se $B \in \tilde{\mathcal{B}}$, $g \in \mathcal{G}$, (k_i) è una successione crescente di interi, (u_i) è una successione in H^1 convergente ad u_0 in L^2 e, per ogni $i \in \mathbf{N}$, u_i è un punto di minimo in H^1 del funzionale che compare nella (1.3) con $k = k_i$, allora u_0 è un punto di minimo in H^1 del funzionale che compare nella (1.4).

OSSERVAZIONE 3. - Se $B \in \mathcal{B}$ ed esistono un aperto A ed un compatto K , con $K \subseteq \overset{\circ}{B} \subseteq B \subseteq A$ tali che $\psi_h(x) = -\infty$ per ogni $x \in A - K$, allora $B \in \tilde{\mathcal{B}}$.

OSSERVAZIONE 4. - In alcuni casi $F(u, B)$ assume solo i valori 0 e $+\infty$. Si può dimostrare che in questi casi esiste una funzione $\psi: \mathbf{R}^n \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ tale che,

per ogni $u \in H^1$ ed ogni $B \in \tilde{\mathcal{B}}$, si ha

$$F(u, B) = F_\psi(u, B) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tilde{u} \geq \psi \text{ cap. q.o. su } B \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Tuttavia vi sono dei casi in cui F assume anche valori reali positivi diversi da zero (cfr. [8]).

OSSERVAZIONE 5. - Con metodi analoghi a quelli indicati in questa nota si può dimostrare che esiste una famiglia $\tilde{\mathcal{A}}$ ricca in $\mathcal{A}$ tale che, per ogni $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ ed ogni $g \in \mathcal{G}$, posto

$$(1.5) \quad \begin{aligned} M_k(g) &= \min_{u \in H^1} \left[\|u\|_{H^1}^2 + F_{\psi_{h_k}}(u, A) + \int_A g(x, u) dx \right] \\ M(g) &= \min_{u \in H^1} \left[\|u\|_{H^1}^2 + F(u, A) + \int_A g(x, u) dx \right], \end{aligned}$$

si ha

$$M(g) = \lim_k M_k(g),$$

e vale una proprietà di convergenza in $L^2_{loc}(A)$ dei punti di minimo in $H^1(A)$ dei funzionali che compaiono nella (1.5) analoga a quella esposta nell'Osservazione 2.

Inoltre si può dimostrare che, se $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ ed esiste un compatto K contenuto in A , tale che $\psi_h(x) \leq 0$ per ogni $x \in A - K$, allora i minimi e i punti di minimo in $H^1_0(A)$ verificano proprietà di convergenza analoghe a quelle sopra considerate nel caso di $H^1(A)$.

2. - La dimostrazione del Teorema 1 utilizza la teoria della Γ -convergenza (cfr. [13], [14], [11], [12]). Richiamiamo, per comodità del lettore, alcune definizioni di tale teoria. Sia (G_h) una successione di funzionali definiti in L^2 ed a valori in $\bar{\mathbf{R}}$, sia u un elemento di L^2 e sia $\mathcal{T}(u)$ l'insieme degli intorni di u in L^2 . Si pone allora:

$$\Gamma(\mathbf{N}^-, (L^2)^-) \lim_{h \rightarrow \infty} G_h(v) = \sup_{U \in \mathcal{T}(u)} \liminf_{h \rightarrow \infty} \inf_{v \in U} G_h(v)$$

$$\Gamma(\mathbf{N}^+, (L^2)^-) \lim_{h \rightarrow \infty} G_h(v) = \sup_{U \in \mathcal{T}(u)} \limsup_{h \rightarrow \infty} \inf_{v \in U} G_h(v).$$

Qualora i due limiti precedenti coincidano, il loro comune valore verrà indicato con

$$\Gamma((L^2)^-) \lim_{h \rightarrow \infty} G_h(v).$$

Fissata una funzione $\gamma: \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}_+$, consideriamo la classe $\mathcal{F}_\gamma$ dei funzionali $F: H^1 \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}_+$ che verificano le condizioni seguenti:

(a) per ogni $B \in \mathcal{B}$ la funzione $u \mapsto F(u, B)$ è convessa, non crescente e *semicontinua inferiormente* su H^1 ;

(b) per ogni $u \in H^1$ la funzione $B \mapsto F(u, B)$ è crescente su $\mathcal{B}$, ed $F(u, \emptyset) = 0$;

(c) per ogni $A \in \mathcal{A}$ ed ogni coppia di funzioni u, v di H^1 , con $u|_A = v|_A$, si ha $F(u, A) = F(v, A)$;

(d) per ogni $B \in \mathcal{B}$

$$\inf_{u \in H^1} [\|u\|_{H^1}^2 + F(u, B)] \leq \gamma(B);$$

(e) esiste una famiglia $\tilde{\mathcal{B}}$ ricca in $\mathcal{B}$ tale che, per ogni $B \in \tilde{\mathcal{B}}$ ed ogni coppia u, v di funzioni di H^1 , si ha

$$F(u \wedge v, B) + F(u \vee v, B) \leq F(u, B) + F(v, B);$$

(f) esistono un funzionale $\tilde{F}: H^1 \times \mathcal{B} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ ed una famiglia $\tilde{\mathcal{A}}$ ricca in $\mathcal{A}$, tale che per ogni $u \in H^1$ la funzione $B \mapsto \tilde{F}(u, B)$ è numerabilmente additiva su $\mathcal{B}$, e per ogni $u \in H^1$ ed ogni $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ si ha $F(u, A) = \tilde{F}(u, A)$. Si dimostra che i funzionali tipo ostacolo dal basso $F_\psi(u, B)$ definiti dalla (1.1) appartengono alla classe $\mathcal{F}_\gamma$. Inoltre, nelle ipotesi del Teorema 1, anche il funzionale definito dalla (1.2) appartiene alla classe $\mathcal{F}_\gamma$.

La parte essenziale della dimostrazione del Teorema 1 consiste nel provare la compattezza della classe $\mathcal{F}_\gamma$. Precisamente vale il seguente teorema.

TEOREMA 6. - Sia (F_h) una successione di funzionali della classe $\mathcal{F}_\gamma$. Allora esistono una sottosuccessione (F_{h_k}) ed una famiglia $\tilde{\mathcal{B}}$ ricca in $\mathcal{B}$, tali che, posto

$$\|u\|_{H^1}^2 + F^-(u, B) = \Gamma(\mathbf{N}^-, (L^2)^-) \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ v \rightarrow u}} [\|v\|_{H^1}^2 + F_{h_k}(v, B)],$$

$$\|u\|_{H^1}^2 + F^+(u, B) = \Gamma(\mathbf{N}^+, (L^2)^-) \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ v \rightarrow u}} [\|v\|_{H^1}^2 + F_{h_k}(v, B)],$$

si ha $F^-(u, B) = F^+(u, B)$ per ogni $u \in H^1$ ed ogni $B \in \tilde{\mathcal{B}}$. Inoltre il funzionale F^+ appartiene alla classe $\mathcal{F}_\gamma$.

Per noti teoremi che collegano la Γ -convergenza alla convergenza dei minimi e dei punti di minimo (cfr. [13] e [14]), il Teorema 1 sarà una conseguenza del Teorema 6 se avremo dimostrato che ogni funzionale della classe $\mathcal{F}_\gamma$ ha una rappresentazione integrale del tipo della (1.2). Ciò è possibile grazie al seguente teorema:

TEOREMA 7. - Sia F un funzionale della classe $\mathcal{F}_\gamma$. Allora esistono una terna (f, μ, ν) della classe $\mathcal{H}$ ed una famiglia $\tilde{\mathcal{B}}$ ricca in $\mathcal{B}$, tali che

$$F(u, B) = \int_B f(x, \tilde{u}(x)) d\mu(x) + \nu(B)$$

per ogni $u \in H^1$ ed ogni $B \in \tilde{\mathcal{B}}$.

3. - Fra i teoremi 6 e 7 il piú difficile da dimostrare è il Teorema 7; diamo qui un breve cenno alla via che si può seguire nella dimostrazione.

Consideriamo la classe ausiliaria dei funzionali p -lipschitziani. Diremo che un funzionale $F: H^1 \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}$ è p -lipschitziano se p è una misura di Radon positiva con $p \in H^{-1}$, e si ha

$$|F(u, B) - F(v, B)| \leq \int_B |\tilde{u} - \tilde{v}| dp$$

per ogni $B \in \mathcal{B}$ ed ogni coppia u, v di funzioni di H^1 .

Vale allora il seguente teorema:

TEOREMA 8. - Se F è un funzionale p -lipschitziano della classe $\mathcal{F}_\gamma$, allora esistono una terna (f, μ, ν) della classe $\mathcal{H}$ ed una famiglia $\tilde{\mathcal{B}}$ ricca in $\mathcal{B}$, tali che

$$F(u, B) = \int_B f(x, \tilde{u}(x)) d\mu(x) + \nu(B)$$

per ogni $u \in H^1, B \in \tilde{\mathcal{B}}$. Inoltre si ha $\mu \leq p$ e

$$|f(x, t_1) - f(x, t_2)| \leq |t_1 - t_2|$$

per ogni $x \in \mathbf{R}^n, t_1, t_2 \in \mathbf{R}$.

La formula di rappresentazione integrale del Teorema 7 è ora una conseguenza del seguente lemma:

LEMMA 9. - Sia F un funzionale della classe $\mathcal{F}_\gamma$. Allora esistono una successione crescente (G_h) di funzionali p_h -lipschitziani della classe $\mathcal{F}_\gamma$, ed una famiglia $\tilde{\mathcal{B}}$ ricca in $\mathcal{B}$, tali che

$$F(u, B) = \sup_h G_h(u, B)$$

per ogni $u \in H^1$ ed ogni $B \in \tilde{\mathcal{B}}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. ATTOUCH (1979) - *Convergence des solutions d'inéquations variationnelles avec obstacles*, in Proceedings of the International Meeting on « Recent Methods in Non-linear Analysis », Rome, May 8-12, 1978, edited by E. De Giorgi, E. Megenes, U. Mosco, 101-113. Pitagora editrice, Bologna.
- [2] H. ATTOUCH e C. PICARD (1979) - *Problèmes variationnels et théorie du potentiel non linéaire*, « Annales Fac. Sci. Toulouse », 1, 89-136.
- [3] H. ATTOUCH e C. SBORDONE - *Asymptotic limits for perturbed functionals of Calculus of Variations*, To appear on « Ricerche Mat. ».
- [4] M. BIROLI (1977) - *Sur la G-convergence pour des inéquations quasi-variationnelles*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (5) 14-A, 540-550.
- [5] M. BIROLI (1977) - *G-convergence for elliptic equations, variational inequalities and quasi-variational inequalities*, « Rend. Sem. Mat. Fis. Milano », 47, 269-328.
- [6] L. BOCCARDO e I. CAPUZZO-DOLCETTA (1975) - *G-convergenza e problema di Dirichlet unilaterale*, « Boll. Un. Mat. Ital. », 12, 115-123.
- [7] L. BOCCARDO e P. MARCELLINI (1976) - *Sulla convergenza delle soluzioni di disequazioni variazionali*, « Ann. Mat. Pura Appl. », (4) 110, 137-159.
- [8] L. CARBONE e F. COLOMBINI (1978) - *Sur la convergence de fonctionnelles soumises à des contraintes unilatérales*, preprint della Scuola Normale Superiore di Pisa.
- [9] L. CARBONE e C. SBORDONE (1979) - *Some properties of Γ -limits of integral functionals*, « Ann. Mat. Pura Appl. » (4) 122, 1-60.
- [10] G. DAL MASO (1978) - *Alcuni teoremi sui Γ -limiti di misure*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (5) 15-B, 182-192.
- [11] E. DE GIORGI (1977) - *Γ -convergenza e G-convergenza*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (5) 14-A, 213-220.
- [12] E. DE GIORGI (1979) - *Convergence problems for functionals and operators*, Proceedings of the International Meeting on « Recent Methods in Non-linear Analysis ». Rome, May 8-12, 1978. Edited by E. De Giorgi, E. Magenes, U. Mosco, 131-188. Pitagora editrice, Bologna.
- [13] E. DE GIORGI e T. FRANZONI (1975) - *Su un tipo di convergenza variazionale*, « Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. », (8) 58, 842-850.
- [14] E. DE GIORGI e T. FRANZONI (1979) - *Su un tipo di convergenza variazionale*, « Rendiconti del Seminario matematico di Brescia », 3, 63-101.
- [15] E. DE GIORGI e G. LETTA (1977) - *Une notion général de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci », (4) 4, 61-99.
- [16] J. DENY e J. L. LIONS (1954) - *Les espaces du type de Beppo Levi*, « Ann. Inst. Fourier », 5, 305-370.
- [17] H. LEWY e G. STAMPACCHIA (1969) - *On the regularity of the solution of a variational inequality*, « Comm. Pure Appl. Mat. », 22, 153-188.
- [18] P. MARCELLINI e C. SBORDONE (1978) - *Homogenization of non uniformly elliptic operators*, « Applicable Anal. », 8, 101-114.
- [19] F. MURAT - *Sur l'homogénéisation d'inéquations elliptiques du 2ème ordre, relatives au convexe $K(\psi_1, \psi_2) = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \text{ p. p. dans } \Omega\}$* , preprint Univ. Paris VI.