
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ADRIANA BROGINI BRATTI

**Qualche risultato sui processi stocastici generalizzati,
e debolmente stazionari**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 68 (1980), n.5, p. 420–425.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_5_420_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Calcolo delle probabilità. — *Qualche risultato sui processi stocastici generalizzati, e debolmente stazionari.* Nota di ADRIANA BROGINI BRATTI (*), presentata (**) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — By using convolution, we will give a theorem about density of «usual» processes in the space of generalized stochastic processes. An integration theorem is given also. At last, some example.

INTRODUZIONE

L'oggetto di questo lavoro è quello di fornire un teorema di approssimazione, ed uno di integrazione, (cfr. il seguente paragrafo 2), per i processi stocastici generalizzati, debolmente stazionari, mediante *successioni* di processi stocastici «usuali». Manca per altro, e lo diciamo subito, un teorema di rappresentazione locale di tali processi, come derivate *deboli* (distribuzionali) degli usuali processi stocastici; un teorema cioè, del tipo del Teorema XXI di [4], pag. 82.

Avendo in mente, soprattutto, la teoria dei *processi debolmente stazionari*, (*covariance stationary*, cfr. [1], pag. 4), ci si limiterà alla trattazione dei *processi del secondo ordine*, cfr. [6], n. 161, pag. o3.

I metodi usati, e gli strumenti, sono quelli, ormai classici, della Teoria delle Distribuzioni [4], e dell'Analisi Funzionale sui prodotti tensoriali topologici [5].

E per concludere: seguendo la via della semplicità, si è lavorato nell'ambito dei processi stocastici generalizzati, (distribuzioni su $\mathbb{R}$, il corpo reale, a valori in L^2 , spazio delle funzioni misurabili, e di quadrato sommabile rispetto a qualche misura di probabilità), piuttosto che in quello dei *campi stocastici*, (distribuzioni su $\mathbb{R}^n$ a valori in L^2); in quest'ultimo caso, comunque, i risultati sono del tutto sinottici.

1) Sia $\mathbb{R}$ il corpo reale; la variabile, in $\mathbb{R}$, sia t . Se A è un insieme non vuoto, (variabile x), sia S una σ -algebra di parti di A ; e sia $P: S \rightarrow \mathbb{R}_+$, ($\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$), una probabilità, (la terna (A, S, P) si dice uno spazio di probabilità).

Ogni funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, che sia misurabile, cioè: per ogni boreliano B di $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B) \in S$, si dice una variabile casuale, (brevemente: una v.c.), su A .

(*) Istituto di Statistica, Via VIII febbraio I-35100, Padova.

(**) Nella seduta del 10 maggio 1980.

Indichiamo con $L^2(A)$, rispettivamente: $L^1(A)$, lo spazio delle funzioni reali, definite su A , misurabili, e di quadrato sommabile, risp.: sommabili, secondo la misura P . La topologia su $L^2(A)$, risp.: su $L^1(A)$, sia quella fornita dalla norma:

$$(I) \quad \begin{aligned} f \in L^2(A), \quad \|f\|_2 &= \left(\int f(x)^2 dP(x) \right)^{1/2}; \\ f \in L^1(A), \quad \|f\| &= \int |f(x)| dP(x) \end{aligned}$$

Per il fatto che $P(A) = 1$, usando la disuguaglianza di Hölder, si ha: il prodotto: $L^2(A) \times L^2(A) \rightarrow L^1(A)$ è un'applicazione bilineare e continua.

DEFINIZIONE 1. Ogni funzione $f: R \rightarrow L^2(A)$, localmente sommabile su R , ⁽¹⁾, si dice un processo stocastico, (brevemente: un p.s.), su A , a parametri in R .

Indichiamo con $\mathcal{P}$ lo spazio di tutti i processi definiti come sopra; su $\mathcal{P}$, la topologia sia quella della convergenza uniforme sui compatti di R , cioè: una successione, (f_n) converge a zero in $\mathcal{P}$, se e solo se $f_n(t; x)$ converge a zero in $L^2(A)$ uniformemente al variare di t nei compatti di R .

DEFINIZIONE 2. Se $f \in \mathcal{P}$, f si dice debolmente stazionario ⁽²⁾ se e solo se:

- i) $E(f(t; x)) = \int f(t; x) dP(x)$, è indipendente da $t \in R$;
- ii) $\forall h \in R, \text{Cov}(f(t; x), f(t+h; x)) = \int f(t; x)f(t+h; x) dP(x)$, è indipendente da $t \in R$.

In base a [3], pag. 8, Teorema 1.4.1, risulta subito che la funzione $h \rightarrow \text{Cov}(f(t; x), f(t+h; x))$, detta *funzione di autocovarianza* del processo f , è semidefinita positiva, non appena f sia debolmente stazionario, cioè per ogni sottoinsieme finito di R , $(a_1, \dots, a_n)$, e per ogni $(t_1, \dots, t_n)$, la somma $\sum_{i,j} a_i a_j \text{Cov}(t_i - t_j)$ è non negativa.

Indichiamo con $D = D(R)$ lo spazio delle funzioni test su R , dotato dell'usuale topologia ⁽³⁾.

(1) Cioè: per ogni $K \subset R$, K compatto, esiste $\int_K f(t; x) d\lambda(t)$, λ la misura di Lebesgue su R .

(2) f si dice stazionario se e solo se: $\forall h \in R$, e per ogni sottoinsieme finito di R , $(t_1, \dots, t_n)$, le v.c. $(f(t_1; x), \dots, f(t_n; x))$ e le v.c. $(f(t_1+h; x), \dots, f(t_n+h; x))$ hanno la stessa distribuzione di probabilità.

(3) Ricordiamo che $D = \bigcup \{D(K), K \text{ compatto in } R\}$; dove $D(K) = \{f: K \rightarrow R, f \text{ indefinitamente derivabile e supporto di } f \text{ in } K\}$. Una successione in $D(K)$ converge a zero se e solo se essa ed ogni sua derivata converge uniformemente a zero su K . Se W è un sottoinsieme convesso di D , W è intorno dello zero in D se e solo se $W \cap D(K)$ è intorno di zero in ogni $D(K)$.

DEFINIZIONE 1'. Ogni $u: D \rightarrow L^2(A)$, lineare e continua, si dice un processo stocastico generalizzato, (brevemente: un p.s.g.), su A .

Indichiamo con $\mathcal{P}'$ lo spazio di tutti i processi stocastici generalizzati su A ; su $\mathcal{P}'$ vi sia la topologia della convergenza uniforme sui limitati di D , ⁽⁴⁾.

Ogni $f \in \mathcal{P}$ definisce in modo naturale un p.s.g., u_f , nel modo seguente:

$$(2) \quad \forall \varphi \in D, \quad u_f(\varphi) = \int f(t; x) \varphi(t) d\lambda(t).$$

La formula (2) permette immediatamente l'immersione di $\mathcal{P}$ in $\mathcal{P}'$; tale immersione è (evidentemente) continua ⁽⁵⁾.

DEFINIZIONE 2'. Se $u \in \mathcal{P}'$, u si dice debolmente stazionario se e solo se:

$$\begin{aligned} \text{i')} \quad \forall h \in \mathbb{R}, \quad E(u(\varphi)(x)) &= \int u(\varphi)(x) dP(x) = E(u(\tau_{-h}\varphi)(x)) = \\ &= \int u(\tau_{-h}\varphi)(x) dP(x) = u(\varphi(t+h))(x) dP(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii')} \quad \forall h \in \mathbb{R}, \quad E(u(\varphi), u(\psi)) &= \int u(\varphi)(x) u(\psi)(x) dP(x) = \\ &= E(u(\tau_{-h}\varphi), u(\tau_{-h}\psi)) = \int u(\varphi(t+h)) u(\psi(t+h))(x) dP(x). \end{aligned}$$

Indichiamo con $\mathcal{P}_s$, rispettivamente: con $\mathcal{P}'_s$, lo spazio dei processi stocastici debolmente stazionari, e quello dei processi stocastici generalizzati debolmente stazionari; su $\mathcal{P}_s$, su $\mathcal{P}'_s$, vi siano le rispettive topologie relative da $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$.

Seguendo [3], pag. 257, se $u \in \mathcal{P}'_s$, l'applicazione $E \circ u: D \rightarrow \mathbb{R}$, $E \circ u(\varphi) = \int u(\varphi)(x) dP(x)$, è lineare e continua; inoltre: è invariante per traslazioni, $E \circ u(\varphi) = E \circ u(\tau_h \varphi)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$. Ciò implica che $E \circ u(\varphi) = \int \varphi(t) d\lambda(t)$.

Se si pone, poi, $B_u: D \times D \rightarrow \mathbb{R}$, $B_u(\varphi, \psi) = \int u(\varphi)(x) u(\psi)(x) dP(x)$, B_u risulta una forma bilineare su $D \times D$, continua e definita positiva, ($B_u(\varphi, \varphi) \geq 0$); allora: $B_u(\varphi, \psi) = \langle B_0(u) \cdot \varphi * \check{\psi} \rangle$ ⁽⁶⁾, dove $B_0(u)$ è la trasformata di Fourier di una misura a crescita lenta, cioè: esiste una misura $m, m: C_c^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, che è una distribuzione temperata, e tale che: $B_0(u) = \mathcal{F}(m)$. m si dice la densità spettrale del p.s.g. u ; B_u si dice la forma (bilineare e continua) di autocovarianza del p.s.g. u .

(4) E con tale topologia $\mathcal{P}'$ risulta isomorfo a $D' \hat{\otimes} L^2(A)$.

(5) Anche che si tratti di un'immersione è immediato.

(6) $\check{\psi}(t) = \psi(-t)$.

TEOREMA I. $\mathcal{P}_s$ è denso, per successioni, in $\mathcal{P}'_s$.

Dimostrazione. La formula (2) permette l'immersione continua di $\mathcal{P}_s$ in $\mathcal{P}'_s$. Infatti: se $f \in \mathcal{P}_s$, e $u_f \in \mathcal{P}'_s$, si ha:

$$\begin{aligned} E(u_f(\tau_{-h}\varphi)) &= \int \left(\int f(t; x) \varphi(t+h) d\lambda(t) \right) dP(x) = \\ &= \int \left(\int f(t-h; x) \varphi(t) d\lambda(t) \right) dP(x) = \\ &= \int \left(\int f(t-h; x) dP(x) \right) \varphi(t) d\lambda(t), \end{aligned}$$

(φ ha supporto compatto e quindi l'inversione degli integrali è possibile).

In definitiva: per il fatto che $\int f(t-h; x) dP(x) = \int f(t; x) dP(x)$ risulta: $E(u_f(\tau_{-h}\varphi)) = E(u_f(\varphi))$.

Analogamente per dimostrare la ii') della definizione 2'.

Sia $\varphi \in D$; si consideri l'applicazione lineare $(*\varphi) \otimes i: D' \otimes L^2(A) \rightarrow C^\infty \otimes L^2(A)$ ⁽⁷⁾, così definita: $(*\varphi) \otimes i(u \otimes f) = (u * \varphi) \otimes f$. In virtù del Teorema V, pag. 257 di [4], $(*\varphi) \otimes i$ è continua; quindi ammette un (unico) prolungamento continuo $(*\varphi) \hat{\otimes} i$, a tutto $D' \hat{\otimes} L^2(A)$ ⁽⁸⁾.

Indichiamo con $u * \varphi$ l'immagine mediante il prolungamento di sopra, di u .

In base al fatto che: se $u \otimes f \in D' \otimes L^2(A)$, $(u \otimes f) * \varphi$ è del tipo: $\langle u_s \cdot (t-s) \rangle \otimes f(x)$, si ha subito, passando al limite in $\mathcal{P}'$:

$$u * \varphi = \langle u_s \cdot \varphi(t-s) \rangle; \quad \text{così che: se } u \in \mathcal{P}'_s \text{ e se } \varphi \in D,$$

i) $E(u * \varphi(t; x)) = \int \langle u_s \cdot \varphi(t-s) \rangle(x) dP(x) = E(u(\tau_t \check{\varphi}))$, indipendente da $t \in \mathbb{R}$;

ii) $E(u(\tau_t \varphi), u(\tau_{h+t} \varphi))$, ancora indipendente da $t \in \mathbb{R}$, come si vede applicando la trasformazione di variabili $t + h/2 = u$, e poi usando la ii') della definizione 2'.

In definitiva: se $u \in \mathcal{P}'_s$ e se $\varphi \in D$, $u * \varphi$ è un processo stocastico debolmente stazionario.

Sia, allora (φ_n) una successione in D convergente alla misura di Dirac δ , nello spazio E' delle distribuzioni a supporto compatto ⁽⁹⁾.

(7) C^∞ è lo spazio delle funzioni indefinitamente derivabili, su $\mathbb{R}$, dotato della topologia dell'uniforme convergenza sui compatti di $\mathbb{R}$. da (5) si ricava che $C^\infty \hat{\otimes} L^2(A) = C^\infty(\mathbb{R}; L^2(A))$ spazio delle funzioni di $\mathbb{R}$ in $L^2(A)$ indefinitamente derivabili.

(8) $C^0_c(\mathbb{R})$ è lo spazio delle funzioni continue su $\mathbb{R}$, dotato di una topologia come D .

(9) E' è il duale topologico di C^∞ . La sua topologia è quella dei duali forti, cioè: convergenza uniforme dei funzionali di E' sulle parti limitate di C^∞ .

È immediato dimostrare che:

$$\lim_n u * \varphi_n = u$$

in $\mathcal{P}'_s$, seguendo la tecnica di [4], Teorema XI, pag. 168.

La dimostrazione è conclusa.

2) Ancora seguendo [4], pag. 52, sia $u \in \mathcal{P}'_s$; *dimostriamo che esiste* $v \in \mathcal{P}'_s$ *tale che* $Dv = u$, ovvero: per ogni $\varphi \in D$ $Dv(\varphi) = -v(\varphi) = u(\varphi)$.

Infatti: se $\varphi \in D$, e se $\varphi_0 \in D$ è tale che $\int \varphi_0(t) d\lambda(t) = 1$, sia $\psi \in D$ tale che:

$$D\psi = \varphi - \varphi_0 \int \varphi(t) d\lambda(t).$$

Chiaramente $\psi \in D$, poiché $\varphi - \varphi_0 \int \varphi(t) d\lambda(t)$ ha integrale nullo.

Allora: se $f \in L^2(A)$ la $v: D \rightarrow L^2(A)$ così definita: $v(\varphi) = -u(\psi) + f(x) \int \varphi(t) d\lambda(t)$ è una primitiva di u ; e $v \in \mathcal{P}'_s$. Infatti: la prima affermazione è immediata; per quanto riguarda la seconda:

i') $E(v(\tau_h \varphi)) = -E(u(\tau_h \varphi)) + \int f(x) dP(x) \int \varphi(t+h) d\lambda(t)$, indipendente da $h \in \mathbb{R}$, visto che $u \in \mathcal{P}'_s$ e che $\int \varphi(t+h) d\lambda(t) = \int \varphi(t) d\lambda(t)$.

ii') $E(v(\varphi_1), v(\varphi_2)) = E(u(\psi_1), u(\psi_2)) + \int f^2(x) dP(x) \int \varphi_1(t) d\lambda(t) \times \int \varphi_2(t) d\lambda(t) - \int f(x) (u(\psi_1)(x) + u(\psi_2)(x)) dP(x)$, che è invariante, rispetto alle traslazioni in D , sempre per le stesse ragioni di prima.

La dimostrazione è conclusa.

Si osservi che: una primitiva di $u \in \mathcal{P}'_s$ in $\mathcal{P}'_s$ è determinata a meno di p.s.g. costanti.

Sia $u: D \rightarrow L^2(A)$ il p.s.g. unità, [3], pag. 254; tale processo è un debolmente stazionario, (ed è un esempio di p.s.g. non rappresentabile mediante un processo « usuale » debolmente stazionario, nel senso che: non esiste $f \in \mathcal{P}_s$ tale che $u_f = u$).

Con i calcoli appena svolti, è immediato vedere che un suo integrale, ancora in $\mathcal{P}'_s$, è fornito dal *processo di Wiener-Levy*, cfr. [3], pag. 253); la cui

forma di autocovarianza è fornita dalla

$$B(\varphi, \psi) = \int_0^{\infty} (\hat{\varphi}(t) - \hat{\varphi}(\infty)) (\hat{\psi}(t) - \hat{\psi}(\infty)) d\lambda(t) \quad (10).$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. A. FULLER (1976) - *Introduction to statistical time series*, John Wiley and Sons. Inc.
- [2] J. L. DOOB (1953) - *Stochastic processes*, John Wiley and Sons. Inc.
- [3] I. M. GUELFAND and N. Y. VILENKIN (1967) - *Les distributions*, T. 4, Dunod,
- [4] L. SCHWARTZ (1966) - *Théorie des distributions*, Hermann, Paris.
- [5] L. SCHWARTZ (1953-1954) - *Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels nucléaires. Applications*, Séminaire Schwartz.
- [6] L. SCHWARTZ - *La fonction aléatoire du mouvement brownien*, « Séminaire Bourbaki », Volume 1956/1957-1957/1958, Exposées 137-168.

$$(10) \int_0^{\infty} s \varphi(s) ds = \int_0^{\infty} (\check{\psi}(\infty) - \check{\varphi}(s)) ds. \text{ Aggiungiamo: da un punto di vista « fisico »,}$$

il processo di Wiener-Levy ben rappresenta il moto « a caso », o moto browniano, delle particelle.