Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Andreana Gandini Zucco

Sur une des conjectures de B. Grünbaum concernant les familles continues de courbes

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **68** (1980), n.5, p. 416–419.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_5_416_0>

Topologia. — *Sur une des conjectures de B. Grünbaum concernant les familles continues de courbes.* Nota di ANDREANA GANDINI ZUCCO, presentata (*) dal Socio G. SCORZA DRAGONI.

RIASSUNTO. — In questa nota mi propongo di dimostrare che per una famiglia continua di curve avente un punto di molteplicità finita per la famiglia, ci sono punti in cui passa una sola curva. Tale risultato è stato dimostrato da Zamfirescu nel caso in cui le curve della famiglia siano tutti segmenti (teorema 11 della nota [7]).

La notion de famille continue de courbes (F.C.C.) est due à B. Grünbaum: on peut trouver une définition dans [1] ou bien dans ma note [8] où je l'ai rappelée.

Notations: toutes les considérations ont lieu sur le plan $\mathbf{R}^2$, $\mathscr{L}$ est une F.C.C. et toutes les courbes de $\mathscr{L}$ ont les extrémités et les extrémités seulement sur une certaine courbe simple et fermée C, D est la composante bornée du complémentaire de C et $\overline{D}$ contient toutes les courbes de $\mathscr{L}$, $L(p)$ est la courbe de $\mathscr{L}$ qui a p comme une extrémité, le point $-p$ est l'extrémité de $L(p)$ différente de p, $M_n(\mathscr{L})$ dénote l'ensemble des points dans le domaine D par lesquels passent au moins n courbes de $\mathscr{L}$, $T_n(\mathscr{L})$ est l'ensemble $M_n(\mathscr{L}) - M_{n+1}(\mathscr{L})$ et $D_n(\mathscr{L})$ est l'ensemble $M_2(\mathscr{L}) - M_{n+1}(\mathscr{L})$. En outre si a et b sont deux points d'une courbe $L(p)$, on indique par arc $[a, b]$ le sous-arc de $L(p)$ ayant les extrémités a et b, par arc $(a, b]$ l'arc $[a, b]$ privé du point a et par arc (a, b) l'arc $[a, b]$ privé des points a et b. Enfin si p et q sont deux points de la courbe C, on désigne par arc $[p, q]$ l'arc de C avec les extrémités p et q, qui ne contient par les point $-p$ et $-q$ et par arc (p, q) on désigne le même arc $[p, q]$ privé des points p et q.

Dans la note présente on se pose le problème de prouver que « pour toute F.C.C. $\mathscr{L}$ si $T_n(\mathscr{L}) \neq \varnothing$ $(n < \infty)$, alors $T_1(\mathscr{L}) \neq \varnothing$ ».

Pour démontre l'assertion ci-dessus, il convient d'utiliser les considérations suivantes.

1. - Fixons d'abord un sens sur la courbe C sur laquelle se trouvent les extrémités des courbes de $\mathscr{L}$. Soit z un point de $T_n(\mathscr{L})$, alors il y a exactement n courbes $L(p_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ de la famille qui passent par z, c'est-à-dire $z = L(p_1) \cap \cdots \cap L(p_{r-1}) \cap L(p_r) \cap L(p_{r+1}) \cap \cdots \cap L(p_n)$ et l'on peut supposer de choisir les symboles de façon que l'ordre des points sur C soit $p_1, \cdots, p_{r-1}$, p_r, $p_{r+1}, \cdots, p_n$, $p_{n+1} = -p_1, \cdots, p_{n+r-1} = -p_{r-1}$, $p_{n+r} = -p_r$, $p_{n+r+1} = -p_{r+1}, \cdots, p_{2n} = -p_n$ lorsque C est parcourue dans le sens fixé.

(*) Nella seduta del 10 maggio 1980.

a) Si l'on choisit deux points quelconques q_1 et q_2 dans l'arc (p_{r-1}, p_r) de C, les courbes L (q_1) et L (q_2) ne passent pas par z et les points L $(q_1) \cap$ L (p_i) et L $(q_2) \cap$ L (p_i) $(i = 1, \cdots, n)$ appartiennent tous les deux à l'arc (p_i, z) ou bien tous les deux à l'arc (z, p_{n+i}) de L (p_i), en effet dans le cas contraire d'après le lemme 1 de [1] on aurait pour z une multiplicité $> n$, ce qui est absurde.

b) Soit p un point quelconque de l'arc (p_{r-1}, p_r) de C, on suppose d'abord que L $(p) \cap$ L (p_1) appartienne à l'arc (z, p_{n+1}) de L (p_1). En tenant compte du fait que L (p) doit traverser le sous-arc de L $(p_1) \cup$ L (p_r) déterminé par $(p_1, z] \cup [z, p_r)$ et du fait que L (p) ne traverse pas l'arc $(p_1, z]$ il en suit que L (p) doit traverser l'arc (z, p_r). Si l'on considère ensuite le sous-arc de L $(p_r) \cup$ L (p_{r-1}) déterminé par $(p_{n+r}, z] \cup [z, p_{n+r-1})$ alors on obtient que L (p) doit traverser l'arc (z, p_{n+r-1}). De même on prouve que si L $(p) \cap$ L (p_1) appartient à l'arc (p_1, z) de L (p), alors L $(p) \cap$ L (p_r) appartient à l'arc (z, p_{n+r}) de L (p_r) et L $(p) \cap$ L (p_{r-1}) appartient à l'arc (p_{r-1}, z) de L (p_{r-1}).

2. A toute courbe L (p_i) $(i = 1, \cdots, n)$ du numéro précédent on peut associer une fonction f_i dans la façon suivante. Soit A_i l'un de deux arcs de C ayant les extrémités p_i et p_{n+i}. Soient $\varphi_i : [a_i, b_i] \to A_i$, $\psi_i : [c_i, d_i] \to$ L (p_i) deux homéomorphismes réalisant des représentations paramétriques des arcs A_i et L (p_i), tels que $\varphi_i(a_i) = \psi_i(c_i) = p_i$, $\varphi_i(b_i) = \psi_i(d_i) = p_{n+i}$. La fonction $f_i : (a_i, b_i) \to (c_i, d_i)$ est définie par $f_i(x) = \psi_i^{-1}(\mathrm{L}(\varphi_i(x)) \cap \mathrm{L}(p_i))$, c'est-à--dire f_i est la fonction de Zamfirescu associée à L (p_i). Il est à noter qu'il s'agit d'une fonction continue. Dénotons par $x_{i,k}$ $(k = 1, \cdots, n)$ les points de $[a_i, b_i]$ tels que $x_{i,k} = \varphi_i^{-1}(p_{i+k-1})$ (c'est-à-dire $x_{i,1} = a_i$, $x_{i,2} = \varphi_i^{-1}(p_{i+1}), \cdots$ $\cdots, x_{i,n} = \varphi_i^{-1}(p_{i+n-1})$).

a) En suivant une procédure identique à celle du lemme 2 de [4] on prouve que tout point $x_{i,k}$ de (a_i, b_i) (donc $k = 2, \cdots, n$) est extrêmum relatif stricte des restrictions de la fonction f_i aux intervalles $(a_i, x_{i,k}]$ et $[x_{i,k}, b_i)$. En employant la notation de [4] on dit que le point $x_{i,k}$ est du type $(+, +)$ (resp. $(+, -), (-, +), (-, -)$) si $x_{i,k}$ est un maximum (resp. maximum, minimum, minimum) relatif stricte de $f_i/(a_i, x_{i,k}]$ et simultanément un maximum (resp. minimum, maximum, minimum) relatif stricte de $f_i/[x_{i,k}, b_i)$.

b) Si les point $x_{i,2}$ et $x_{i,n}$ de (a_i, b_i) sont tous les deux maximums (ou tous les deux minimums) pour les fonctions $f_i/(a_i, x_{i,2}]$ et $f_i/[x_{i,n}, b_i)$, alors $[fr\, f_i((a_i, b_i))] \cap f_i((a_i, b_i))$ n'est pas vide. Il suffit de remarquer que la restriction de la fonction f_i à l'intervalle fermé $[x_{i,2}, x_{i,n}]$ a au moins un maximum (minimum) absolu (comme dans la démonstration du lemme 5 de [8]).

c) Supposons que parmi les points $x_{1,k}$ de (a_1, b_1) il y en ait un du type $(+, -)$ ou bien du type $(-, +)$: soit $x_{1,r}$. Alors les points $x_{r,2}$ et $x_{r,n}$ sont tous les deux maximums ou tous minimums pour les fonctions $f_r/(a_r, x_{r,2}]$ et $f_r/[x_{r,n}, b_r)$. En effet si pour tout $p \in (p_{r-1}, p_r)$ de C et pour tout point $q \in (p_r, p_{r+1})$ de C, les points L $(p) \cap$ L (p_1) et L $(q) \cap$ L (p_1) appartiennent l'un (par exemple L $(p) \cap$ L (p_1)) à l'arc (p_1, z) et l'autre à l'arc (z, p_{n+1}) de L (p_1), alors en vertu du n. 1 les points $L(p) \cap L(p_r)$ et $L(q) \cap L(p_r)$ appartiennent tous les deux à l'arc (z, p_{n+r}) ou bien tous les deux à l'arc (p, z) de $L(p_r)$ (dans ce cas à l'arc (z, p_{n+r})).

Par conséquent on voit comme plus haut que $[fr\, f_r((a_r, b_r))] \cap f_r((a_r, b_r))$ n'est pas vide.

THEOREME 1. (*) – *Soit $\mathscr{L}$ une F.C.C. ayant un point z de multiplicité finie n $(n > 1)$. Alors il y a une courbe* L *par z telle que l'arc de ses points multiples pour $\mathscr{L}$ ne soit pas ouvert sur* L.

Démonstration. – Le point z de l'énoncé a multiplicité n, donc $z = L(p_1) \cap \cap \cdots \cap L(p_n)$. On considère la fonction f_1 associée à la courbe $L(p_1)$ et les points $x_{1,k}$ $(k = 2, \cdots, n)$ tels que $x_{1,k} = \varphi_1^{-1}(p_k)$. Si ces points sont tous du type $(+, +)$ ou bien tous du type $(-, -)$ on a $f_1(x_{1,2}) = \cdots = f_1(x_{1,n}) \in \in [fr\, f_1((a_1, b_1))] \cap f_1((a_1, b_1))$ et pas conséquent sur $L(p_1)$ l'arc des points multiples n'est pas ouvert: $z \in rel\, fr\,(L(p_1) \cap M_2(\mathscr{L}))$. Si ces points ne sont pas tous du même type $(+, +)$ ou $(-, -)$, alors il y a au moins un point du type $(+, -)$ ou $(-, +)$: soit $x_{1,r}$. A l'aide des considérations précédentes on obtient pour la fonction f_r associée à la courbe $L(p_r)$ qu'il y a un point $t \in (c_r, d_r)$ tel que $t \in [fr\, f_r((a_r, b_r))] \cap f_r((a_r, b_r))$. Dans ce cas l'énoncé est démontré sur la courbe $L(p_r) : \psi_r(t) \in rel\ fr\,(L(p_r) \cap M_2(\mathscr{L}))$.

THEOREME 2. – *Soit $\mathscr{L}$ une F.C.C. ayant un point de multiplicité finie, alors il y a un arc de points de* $T_1(\mathscr{L})$.

Démonstration. – On a vu dans le théorème précédent qu'il existe une courbe $L(p)$ telle que l'arc de ses points multiples pour $\mathscr{L}$ ne soit pas ouvert sur $L(p)$, donc il y au moins un point qui appartient à $rel\, fr\,(L(p) \cap M_2(\mathscr{L}))$, soit q. Alors au moins deux courbes de $\mathscr{L}$ passent par q et donc $q \notin C$. Par conséquent si $L(p) \cap M_2(\mathscr{L})$ est contenu (par exemple) dans l'arc $(p, q]$ alors tous les points de l'arc $(q, -p)$ appartiennent à $T_1(\mathscr{L})$.

Remarque. – D'après le théorème 2 suit que la conjecture de B. Grünbaum (voir [2] page 79) «si $\bigcup_{i \geq k} T_i(\mathscr{L}) \neq \varnothing$ et $1 \leq j \leq k < \infty$ alors $T_j(\mathscr{L}) \neq \varnothing$» est vraie pour $j = 1$.

D'après le théorème 1 et le lemme 4 de [8] on a les corollaires suivants:

COROLLAIRE 1. – *Si dans la F.C.C. $\mathscr{L}$ il y a un point z de* $T_3(\mathscr{L})$ *ou de* $T_4(\mathscr{L})$ *et si les courbes par z sont sans points dans* $M_5(\mathscr{L})$, *alors* $T_2(\mathscr{L}) \neq \varnothing$.

COROLLAIRE 2. – *Si dans la F.C.C. $\mathscr{L}$ il y a un point z de multiplicité finie k et si les courbes par z sont sans points dans* $M_{2n+1}(\mathscr{L})$ $(2n + 1 > k)$, *alors* $D_n(\mathscr{L}) \neq \varnothing$ (si $n = 2$ *on a le corollaire* 1).

(*) *Remarque* (ajoutée aux épreuves). – Le Théorème 1 est équivalent au Corollaire 3.4 de la nota suivante: KIM S. WATSON, *Sylvester's problem for spreads of curves*, «Can. J. Math.», 32 (february 1980) 219–239, arrivée chez moi en juin 1980.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. GRÜNBAUM (1966) – *Continuous families of curves*, «Can. J. Math.», *18*, 529–537.

[2] B. GRÜNBAUM (1972) – *Arrangements and spreads, Lectures delivered at a Regional Conference on Combinatorial Geometry*, University of Oklahoma, American Mathematical Society.

[3] T. ZAMFIRESCU (1967) – *Sur les familles continues de courbes* (Note I), « Rend. Lincei », ser. VIII, *42* (8), 771–774.

[4] T. ZAMFIRESCU (1967) – *Sur les familles continues de courbes* (Note II), « Rend. Lincei », ser. VIII, *43* (1–2), 13–17.

[5] T. ZAMFIRESCU (1969) – *On planar continuous families of curves*, «Can. J. Math.», *21*, 513–530.

[6] T. ZAMFIRESCU (1972) – *Sur les familles continues de courbes* (Note V), « Rend. Lincei », ser. VIII, *53* (5), 505–507.

[7] T. ZAMFIRESCU – *Spreads* (à paraître dans « Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg »).

[8] A. GANDINI ZUCCO (1979) – *Sur une conjecture de B. Grünbaum concernant les familles continues de courbes*, « Rend. Lincei », ser. VIII, *66* (5), 372–376.

[9] A. GANDINI ZUCCO (1979) – *Sur la multiplicité par rapport à une famille continue de courbes*, « Rend. Lincei », ser. VIII, *67* (1–2), 99–103.