
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

NICOLA BELLOMO, RICCARDO RIGANTI, MARIA TERESA
VACCA

**Analisi stocastica del moto di una lamina piana in
flusso molecolare**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 68 (1980), n.4, p. 299–305.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_4_299_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di
ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le
copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica matematica. — *Analisi stocastica del moto di una lamina piana in flusso molecolare.* Nota I (*) di NICOLA BELLOMO, RICCARDO RIGANTI e MARIA TERESA VACCA (**), presentata (***) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — Some physical and mathematical problems related to the aerodynamics and dynamics of a flat plate in a molecular flow are studied in this paper. The considered system is a stochastic one since the initial conditions and some of the identification parameters are assumed to be given as constant random variables. The stochastic equation of the dynamics of the system is deduced in this note, and will be mathematically studied and particularized in a pertinent application proposed in the second note.

1. INTRODUZIONE

Come è noto, il calcolo dei coefficienti aerodinamici in regime di flusso molecolare è una applicazione importante della teoria cinetica dei gas. In tale settore di ricerca sono noti lavori teorici di vari autori (vedi bibl. [1, 2, 3] e più in generale il cap. V con la relativa bibliografia del testo di Cercignani [4]) e lavori a carattere sperimentale, ad esempio [5, 6].

Gli studi sopra citati si riferiscono a problemi classici di aerodinamica teorica in condizioni di flusso stazionario, affrontati in termini di soluzione, esatta o approssimata, di opportuni modelli dell'equazione di Boltzmann o di Knudsen. Un aspetto importante di tali studi è la definizione delle condizioni al contorno sulla superficie del corpo di cui si vuole effettuare lo studio aerodinamico. In tale formulazione, secondo i modelli matematici noti, intervengono opportuni parametri di identificazione (che tengono conto di proprietà fisiche del gas e della parete), i quali nei lavori prima citati e comunque nella bibliografia nota sono definiti in senso deterministico. Tuttavia, i problemi fisici reali non sono, a causa del moto del sistema, stazionari e lo studio aerodinamico va unito allo studio della dinamica complessiva del sistema. Inoltre l'identificazione dei parametri relativi alle condizioni al contorno e la definizione delle condizioni iniziali del sistema possono essere effettuate correttamente solo in senso probabilistico.

In questo lavoro si studiano i problemi fisici e matematici relativi all'aerodinamica ed alla dinamica di una lamina piana in regime di flusso molecolare a vari numeri di Knudsen e con stocasticità presenti nei parametri e nelle

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del CNR, G.N.F.M., con contributo CNR, contratto n. 79.00697.01.

(**) Istituto di Meccanica Razionale del Politecnico di Torino.

(***) Nella seduta del 12 aprile 1980.

condizioni iniziali. In particolare nel secondo paragrafo viene descritto matematicamente il problema fisico. Quindi nel terzo paragrafo sono dedotte, basandosi essenzialmente sui metodi della teoria cinetica dei gas [4, 7], le azioni aerodinamiche e le equazioni del moto del sistema, sia in senso deterministico, sia in senso probabilistico.

2. SISTEMA FISICO E DESCRIZIONE MATEMATICA DEL PROBLEMA

Con riferimento alla fig. 1, consideriamo una lamina piana in moto in un gas in equilibrio maxwelliano alla temperatura T_∞ . Assumiamo inoltre un sistema fisso di assi ortogonali $O(x, y)$ in modo che all'istante iniziale il centro della sezione retta della lamina coincida con O e l'asse x sia diretto nel senso del moto della lamina. Sia quindi $B: \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$ il dominio fisico bidimensionale in cui verranno definite le grandezze caratteristiche del sistema.

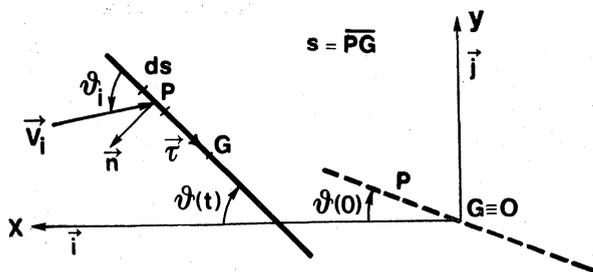


Fig. 1.

Più precisamente il sistema fisico può essere descritto dal seguente insieme di assiomi:

A.1.1 - $\forall P \in B: \rho_\infty = \rho_\infty(P), T_\infty = T_\infty(P)$ sono grandezze note (rispettivamente densità di massa e temperatura del gas) funzioni del punto $P = P(x, y)$.

A.2. - La lamina piana, di massa M , lunghezza l e larghezza b , è a temperatura costante T_w . La velocità iniziale e la posizione del baricentro G della lamina sono note:

$$(1) \quad t = 0 : \quad \vec{V}(t=0) = \vec{V}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} \quad , \quad G \equiv O.$$

La rotazione θ della lamina è una funzione nota del tempo:

$$(2) \quad \theta = \theta(t; \theta_0) \quad , \quad \theta \in (-\theta_a, \theta_a) \quad , \quad \theta_a < \frac{1}{2} \pi.$$

A.3. - Le condizioni termodinamiche del gas all'infinito non sono perturbate dalla presenza della lamina.

A.4. - Le condizioni del sistema gas-lamina sono caratterizzate dalle seguenti disequazioni sui numeri di Knudsen, Reynolds e sulla « speed ratio », rispettivamente Kn , Re ed S , nel modo seguente:

$$(3) \quad \forall t, \forall P \in B: \quad Kn \geq 0.1, \quad 5 \leq S \leq Re$$

ove:

$$(4) \quad Kn \stackrel{\text{df}}{=} \lambda/l, \quad S \stackrel{\text{df}}{=} V/c_\infty, \quad c_\infty \stackrel{\text{df}}{=} (2k/mT_\infty)^{1/2}, \quad Re \stackrel{\text{df}}{=} \rho_\infty V l / \mu_\infty.$$

Nell'assioma A.4 λ , m , μ_∞ sono rispettivamente il libero cammino medio, la massa e la viscosità dinamica del gas; k è la costante di Boltzmann.

Ricordiamo, si veda ad esempio il lavoro [8], che si può assumere la seguente correlazione fra Re , S e Kn ,

$$(5) \quad Re = 16 S / (5 \sqrt{\pi} Kn)$$

e che, con le limitazioni poste su S nella eq. (3), è possibile supporre che non vi siano onde d'urto davanti all'ostacolo.

Consideriamo inoltre le note espressioni della portanza L e della resistenza D , che si generano a causa del moto della lamina nel fluido:

$$(6) \quad L = \frac{1}{2} \rho_\infty V^2 C_L b l \quad D = \frac{1}{2} \rho_\infty V^2 C_D b l$$

In modo del tutto generale si può ipotizzare che i coefficienti di portanza e di resistenza, rispettivamente C_L e C_D , siano funzioni di un insieme α di parametri di identificazione e di un opportuno insieme β di grandezze fisiche caratterizzanti il sistema:

$$(7) \quad C_L = C_L(\alpha, \beta) \quad C_D = C_D(\alpha, \beta)$$

Osserviamo altresì che l'identificazione dei parametri può in generale essere effettuata solo in senso probabilistico e ciò vale soprattutto per sistemi in cui le grandezze fisiche in gioco sono funzioni del tempo [9].

Per un sistema così definito ci si propone, nell'ambito della presente ricerca, di perseguire i seguenti obiettivi:

a) *Definire un modello matematico del tipo:*

$$(8) \quad C_D = C_D(\alpha, \beta), \quad C_L = C_L(\alpha, \beta), \quad P = P(\alpha) \quad \text{con} \quad \int P(\alpha) d\alpha = 1.$$

ove $P(\alpha)$ è una opportuna densità di probabilità associata alla variabile aleatoria α .

b) *Definire l'equazione stocastica del moto del baricentro:*

$$(9) \quad \dot{z} = f(z, t; \alpha, \beta), \quad z = \{z_1 = x, z_2 = y, z_3 = \dot{x}, z_4 = \dot{y}\}$$

essendo assegnate le condizioni iniziali $z(t=0) = z_0$ nella forma di variabile aleatoria.

c) *Definire opportuni metodi matematici idonei ad ottenere risultati qualitativi e quantitativi per l'equazione definita al punto 'b' e quindi per la dinamica complessiva del sistema. (Tale tema è trattato nella Nota II).*

Con riferimento al problema fisico considerato ed in particolare all'assioma A.2, va precisato che il problema corrisponde allo studio della dinamica di un veicolo spaziale il cui baricentro, per proprietà di simmetria, coincide con il baricentro della lamina e le azioni aerodinamiche principali sono dovute alla presenza della lamina.

3. DEDUZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO DEL BARICENTRO DEL SISTEMA

In questo paragrafo verranno studiati i punti 'a' e 'b' definiti alla fine del paragrafo precedente. In particolare si studia il problema di determinare le azioni del fluido sulla lamina, e quindi le equazioni del moto.

Con riferimento alla fig. 1, consideriamo un punto P della lamina ed associamo ad esso una striscia elementare di lunghezza ds . Per tale punto P possiamo calcolare le espressioni analitiche della velocità \vec{V}_i del fluido relativa alla lamina e l'angolo θ_i che questa forma con la lamina stessa. Con ovvie considerazioni cinematico-geometriche risulta:

$$(10) \quad \vec{V}_i = -\vec{V} + s\dot{\theta}\vec{n} \quad ; \quad \sin \theta_i = -\vec{V}_i \cdot \vec{n} / V_i \quad ; \quad \cos \theta_i = \vec{V}_i \cdot \vec{\tau} / V_i$$

ove i versori \vec{n} e $\vec{\tau}$, solidali con la lamina, sono definiti dalle seguenti espressioni:

$$(11) \quad \vec{n} = \sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j} \quad ; \quad \vec{\tau} = -\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}$$

e quindi risulta:

$$(12) \quad \vec{V}_i = \vec{V}_i(x, y, s; t) = (s\dot{\theta} \sin \theta - \dot{x}) \vec{i} - (s\dot{\theta} \cos \theta + \dot{y}) \vec{j}$$

$$(13) \quad \theta_i = \theta_i(x, y, s; t);$$

$$(14) \quad \sin \theta_i = \frac{x \sin \theta - y \cos \theta - s\dot{\theta}}{\{s^2 \dot{\theta}^2 + x^2 + y^2 + 2s\dot{\theta}(y \cos \theta - x \sin \theta)\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$(15) \quad \cos \theta_i = \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{\{s^2 \dot{\theta}^2 + x^2 + y^2 + 2s\dot{\theta}(y \cos \theta - x \sin \theta)\}^{\frac{1}{2}}}$$

Si suppone inoltre che la limitazione posta su θ nell'assioma A.2 sia tale che $\theta_i \in (-\pi/2, \pi/2)$; la (15) è pertanto inessenziale, ma è riportata per comodità di calcolo.

Per dedurre le azioni del fluido sulla lamina, è sufficiente estendere al caso non stazionario i risultati ottenuti da Cercignani-Lampis [2] e da Monaco

[10] in problemi stazionari. In accordo con gli Autori citati, le azioni elementari p_D e p_L nella direzione di \vec{V}_i e in direzione normale ad essa, secondo le ipotesi fisico-matematiche contenute nei lavori [2, 10] e qui non riportate, sono fornite dalle seguenti espressioni:

$$(16) \quad p_D = p_D(\dot{x}, \dot{y}, s; \alpha, \beta, t) = g \cdot p_D^{\text{F.M.}}; \quad p_L = p_L(\dot{x}, \dot{y}, s; \alpha, \beta, t) = g \cdot p_L^{\text{F.M.}}$$

con:

$$(17) \quad \alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\} \quad \beta = \{\rho_\infty, T_\infty, T_w, k/m, Kn\}$$

dove:

$$(18) \quad g = 0.67 + 0.22 \exp\{-1.83 \sin \theta_i / Kn\} + 0.11 \exp\{-(1.83 \sin \theta_i / Kn)^2\}$$

$$(19) \quad p_D^{\text{F.M.}} = p_D^- + p_D^{(1)} + p_D^{(2)}$$

$$(20) \quad p_L^{\text{F.M.}} = \left\{ p_L^- - \frac{\sin \theta_i}{\cos^2 \theta_i} p_D^{(1)} + \frac{1}{\sin \theta_i} p_D^{(2)} \right\} \cos \theta_i$$

ed inoltre, ponendo:

$$(21) \quad u_i = \frac{V_i}{(2 k T_\infty / m)^{1/2}} \sin \theta_i,$$

$$(22) \quad p_D^- = \rho_\infty V_1^2 \frac{\sin \theta_i}{2 u_i^2} \left\{ \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta_i + u_i^2 \right) \{1 + \operatorname{erf}(u_i)\} + \frac{u_i}{\sqrt{\pi}} \exp(-u_i^2) \right\}$$

$$(23) \quad p_D^{(1)} = -\rho_\infty V_i^2 \frac{\sin \theta_i}{2 u_i} (1 - \alpha_1) \cos^2 \theta_i \{ \exp(-u_i^2) / \sqrt{\pi} + u_i [1 + \operatorname{erf}(u_i)] \}$$

$$(24) \quad p_D^{(2)} = \rho_\infty V_i^2 \frac{\alpha_2^{3/2} \sin^3 \theta_i}{\pi u_i^2 \sqrt{T_\infty / T_w}} \{ \exp(-u_i^2) I_1(\theta_i) + \sqrt{\pi} I_2(\theta_i) \}$$

con $I_1(\theta_i)$, $I_2(\theta_i)$ così definiti:

$$(25) \quad I_1(\theta_i) = \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{J + 2(1 - \alpha_2) \cos^2 \phi T_\infty / T_w}{2 J^2} (1 + B^2) \right\} d\phi$$

$$(26) \quad I_2(\theta_i) = \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{B}{J} \exp\{-u_i^2 (J - \alpha_2) / J\} (1 + \operatorname{erf} B) \cdot \left[\frac{1}{2} + (3/2 + B^2) \frac{(1 - \alpha_2) \cos^2 \phi T_\infty / T_w}{J} \right] \right\} d\phi$$

$$(27) \quad B = \frac{u_i \sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{J}} \quad ; \quad J = \alpha_2 + \frac{T_\infty}{T_w} (1 - \alpha_2) \sin^2 \phi$$

ed infine:

$$(28) \quad p_L^- = \rho_\infty \frac{V_i^2}{4u_i^2} \sin^2 \theta_i \{I + \operatorname{erf}(u_i)\}.$$

Le componenti F_x, F_y della forza si ottengono integrando sulla superficie della lamina le componenti p_x e p_y nelle direzioni \vec{i} e \vec{j} delle azioni elementari p_D e p_L ora viste:

$$(29) \quad F_x = b \int_{-l/2}^{l/2} p_x ds \quad ; \quad F_y = b \int_{-l/2}^{l/2} p_y ds.$$

Con il cambiamento di variabile: $s' = s/l$ e con considerazioni di carattere geometrico, F_x ed F_y risultano:

$$(30) \quad F_x = \frac{1}{2} \rho_\infty V^2 b l C_x \quad ; \quad F_y = \frac{1}{2} \rho_\infty V^2 b l C_y,$$

ove i coefficienti adimensionali C_x e C_y sono:

$$(31) \quad C_x = C_x(\dot{x}, \dot{y}; \theta(t), \alpha, \beta) \quad ; \quad C_y = C_y(\dot{x}, \dot{y}; \theta(t), \alpha, \beta),$$

$$(32) \quad C_x = \frac{2}{\rho_\infty V^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{V_i} \{-p_D(l s' \dot{\theta} \sin \theta - \dot{x}) + p_L(l s' \dot{\theta} \cos \theta + \dot{y})\} ds'$$

$$(33) \quad C_y = \frac{2}{\rho_\infty V^2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{V_i} \{-p_D(l s' \dot{\theta} \cos \theta + \dot{y}) - p_L(l s' \dot{\theta} \sin \theta - \dot{x})\} ds'$$

da cui le equazioni del moto del baricentro della lamina possono essere scritte nella forma:

$$(34) \quad \begin{cases} M\ddot{x} = \frac{1}{2} \rho_\infty l b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) C_x(\dot{x}, \dot{y}; \theta(t), \alpha, \beta) \\ M\ddot{y} = \frac{1}{2} \rho_\infty l b (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) C_y(\dot{x}, \dot{y}; \theta(t), \alpha, \beta) \end{cases}$$

o, con il cambiamento di variabile definito nella seconda delle (9), in forma matriciale:

$$(35) \quad \dot{z} = [A] z + \varepsilon a(z, t; \alpha, \beta)$$

con:

$$(36) \quad \varepsilon = \rho_\infty l^2 b / (2M)$$

$$(37) \quad [A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix}$$

$$(38) \quad \psi_x = -\frac{2}{l\rho_\infty} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{p_D(\mathbf{z}, s'; t, \alpha, \beta) \{ls' \dot{\theta} \sin \theta - z_3\} - p_L(\mathbf{z}, s'; t, \alpha, \beta) \{ls' \dot{\theta} \cos \theta + z_4\}}{V_i(\mathbf{z}, s'; t)} ds'$$

$$(39) \quad \psi_y = -\frac{2}{l\rho_\infty} \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{p_D(\mathbf{z}, s'; t, \alpha, \beta) \{ls' \dot{\theta} \cos \theta + z_4\} + p_L(\mathbf{z}, s'; t, \alpha, \beta) \{ls' \dot{\theta} \sin \theta - z_3\}}{V_i(\mathbf{z}, s'; t)} ds'.$$

Nota I. L'eq. (35) è non autonoma per la presenza di $\theta = \theta(t)$ nota e non lineare per la non-linearità del vettore \mathbf{a} . Inoltre se C_x e C_y sono funzioni limitate dei rispettivi argomenti (come è assicurato dal problema fisico) tale equazione soddisfa una condizione locale di Lipschitz.

Nota II. Se a e \mathbf{z}_0 sono variabili aleatorie, l'eq. (35) è una equazione differenziale stocastica e $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ è un processo stocastico.

Nota III. Il parametro adimensionale ϵ definito dalla (36) è da ritenersi piccolo rispetto all'unità, in quanto nella classe di problemi fisici considerati, M è grande rispetto alla massa $\rho_\infty l^2 b$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. HURLBUT e F. SHERMAN (1968) - *Application of the Nocilla wall reflection model to the free-molecule kinetic theory*, « Phys. of Fluids », 2, 486.
- [2] C. CERCIGNANI e M. LAMPIS (1972) - *Free-molecular flow past a flat plate in the presence of nontrivial gas-surface interaction*. « J. Appl. Math. Phys. », ZAMP, 23, 713.
- [3] N. BELLOMO (1978) - *The fluid dynamics of rarefied molecular flow over convex bodies: a new theory and applications*. « J. App. Math. Phys. », ZAMP, 29, 112.
- [4] C. CERCIGNANI (1975) - *Theory and Applications of the Boltzmann Equation*, Scottish Press, Edinburgh, London.
- [5] H. LEGGE e G. KOPPENWALNER (1971) - *Sphere drag measurements in a free jet and a hypersonic low density tunnel*, in « Rarefied Gas Dynamics », ed. D. Dini, S. Nocilla e C. Cercignani, Ed. Tecnico Scientifica, Pisa, Vol. I, 481.
- [6] P. SHARMA e E. KNUTH (1978) - *Interaction of satellite-speed helium atoms with satellite surfaces*, UCLA-ENG 7857 Report, University of California in Los Angeles.
- [7] M. KOGAN (1969) - *Rarefied Gas Dynamics*, Plenum, New York.
- [8] H. ASHKENAS e F. SHERMAN (1965) - *The structure and utilization of supersonic free jets in low density tunnels*, in « Rarefied Gas Dynamics », ed. J. de Leeuw, Academic Press, New York, Vol. II, 841.
- [9] N. BELLOMO e R. MONACO (1979) - *On the mathematical formulation of the boundary conditions in kinetic theory: stochastic models for time-dependent conditions*, in « Rarefied Gas Dynamics », ed. R. Campargue, CEA, Paris, Vol. I, 53.
- [10] R. MONACO - *On the theory of Drag calculation and profile optimization in shockless near free molecular flow*, « Acta Mechanica », 29, 275 (1978)