Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alessandro Scarselli

Su una classe di gruppi finiti inseparabili II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **68** (1980), n.1, p. 22–25.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1980_8_68_1_22_0>

Algebra. — *Su una classe di gruppi finiti inseparabili* II (*). Nota di ALESSANDRO SCARSELLI, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — We give some sufficient conditions for the splitting of certain extensions of a finite p-group by a group whose Sylow subgroups are elementary abelian.

In [1] H. Bechtell studia i gruppi finiti risolubili G nei quali il residuo $G_{\mathscr{E}}$ rispetto alla classe $\mathscr{E}$ dei gruppi a sottogruppi di Sylow abeliani elementari è un p–gruppo (per un certo numero primo p) e in [2] dimostra che l'unico gruppo non nilpotente inseparabile con $G_{\mathscr{E}}$ p–gruppo metaciclico è l'estensione non spezzante del gruppo dei quaternioni tramite il gruppo simmetrico su 3 oggetti. In [3] abbiamo impostato il problema analogo nel caso che $G_{\mathscr{E}}$ sia un p–gruppo dotato di una catena normale di lunghezza minore o uguale a p e a fattoriali ciclici. Nel presente lavoro si dimostra che tali gruppi sono separabili per $p > 2$. Si ottengono anche altre condizioni sufficienti per lo spezzamento di un gruppo in cui $G_{\mathscr{E}}$ è un p–gruppo.

Nel seguito indicheremo con G un gruppo finito risolubile, con H un suo p'–sottogruppo di Hall, con P un suo p–sottogruppo di Sylow e con $G_{\mathscr{E}}$ il residuo di G rispetto alla formazione $\mathscr{E}$ dei gruppi a sottogruppi di Sylow abeliani elementari.

LEMMA 1. *Sia* K *un sottogruppo normale di* G *contenente* H *e dotato di un p–sottogruppo di Sylow normale* R. *Sia* $U \lhd G$ *e* $U \leq Z(R)$, *allora* $[U, H] = \langle [u, h] \mid u \in U, h \in H \rangle$ *e* $C_U(H)$ *sono sottogruppi normali di* G.

Dimostrazione. Per il ragionamento di Frattini è $G = RN_G(H)$. Sia $g \in G$, $g = xy$ con $x \in N_G(H)$ e $y \in R$. Si avrà $[U, H]^g = [U, H]^{xy} = [U, H]^y = [U, H]$ essendo $[U, H] \leq U$ e $y \in C_G(U)$. Dunque $[U, H] \lhd G$.

Sia poi $u \in C_U(H)$ e $g = y_1 y_2$ con $y_1 \in R$ e $y_2 \in N_G(H)$. Per ogni $h \in H$ si ha $h^{g^{-1}ug} = h^{y_2^{-1} y_1^{-1} u y_1 y_2} = h^{y_2^{-1} u y_2} = h^{y_2^{-1} y_2} = h$. Quindi $C_U(H) \lhd G$.

TEOREMA 1. *Sia* A *un p–gruppo abeliano*, $E \in \mathscr{E}$ *e* G *un ampliamento di* A *tramite* E. *Allora si verifica una delle seguenti condizioni*:

(a) G *è un p–gruppo*

(b) G *si spezza su qualche sottogruppo normale proprio*

(c) $A = \langle 1 \rangle$ *ed* E *ha ordine primo diverso da* p.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
(**) Nella seduta del 12 gennaio 1980.

Dimostrazione. – Non sia G un p–gruppo e sia G inseparabile. Essendo $G/A \in \mathscr{E}$, si ha $G_{\mathscr{E}} \leq A$ e quindi $G_{\mathscr{E}}$ è un p–gruppo abeliano. Essendo H un p'–gruppo si avrà allora $G_{\mathscr{E}} = [G_{\mathscr{E}}, H] \times C_{G_{\mathscr{E}}}(H)$.

In base ai risultati contenuti in [3] è $G_{\mathscr{E}} H \lhd G$ e quindi $G = G_{\mathscr{E}} N_G(H)$ per il ragionamento di Frattini. Si avrà dunque $G = [G_{\mathscr{E}}, H] N_G(H)$. In base al Lemma 1, $[G_{\mathscr{E}}, H] \lhd G$ e $[G_{\mathscr{E}}, H] \cap N_G(H) \leq C_{G_{\mathscr{E}}}(H) \cap [G_{\mathscr{E}}, H] = \langle 1 \rangle$. Si conclude che $[G_{\mathscr{E}}, H] = \langle 1 \rangle$, essendo G inseparabile.

Perciò $N_G(H) = G$ e G si spezza su H. Essendo G inseparabile e non un p–gruppo deve essere $H = G$ e dunque $A = \langle 1 \rangle$. Essendo infine $E = G = H \in \mathscr{E}$ ed inseparabile si conclude che E ha ordine primo diverso da p.

TEOREMA 2. *Sia* G *non nilpotente,* $G_{\mathscr{E}}$ *un* p*–gruppo e* P *abbia classe di nilpotenza minore o uguale a* 2; *allora* G *si spezza su qualche sottogruppo normale proprio.*

Dimostrazione. – Sia G inseparabile e $L = P'^G = \langle P'^g \mid g \in G \rangle$. Si avrà $P \leq C_G(G_{\mathscr{E}}/L)$ e dunque, non avendo G p'–quozienti propri (cfr. [3]), è $H \leq C_G(G_{\mathscr{E}}/L)$. Perciò $G_{\mathscr{E}} H/L = G_{\mathscr{E}}/L \times HL/L$.

Essendo $G_{\mathscr{E}} H \lhd G$ (cfr. [3]) è $HL \lhd G$ e dunque, per il ragionamento di Frattini, $G = LN_G(H)$. Essendo P di classe di nilpotenza minore o uguale a 2, si ha $P' \leq Z(P)$ e quindi $P' \leq Z(G_{\mathscr{E}})$; dunque $L \leq Z(G_{\mathscr{E}})$. In base al Lemma 1, $[L, H] \lhd G$ ed essendo H un p'–gruppo e L un p–gruppo abeliano è $L = [L, H] \times C_L(H)$. Si ha dunque $G = [L, H] N_G(H)$ e $[L, H] \cap N_G(H) \leq [L, H] \cap C_L(H) = \langle 1 \rangle$. Perciò $[L, H] = \langle 1 \rangle$, altrimenti G si spezzerebbe sul sottogruppo normale proprio $[L, H]$ contro l'ipotesi. Si conclude che $N_G(H) = G$ e dunque G si spezza sul sottogruppo normale H, una contraddizione.

LEMMA 2. *Sia* U *un sottogruppo normale minimo di* G, U *un* p*–gruppo e* $G/C_G(U)$ *abbia un* p'*–sottogruppo di Hall normale. Sia* $1 \neq u \in U \cap Z(P)$; *allora* $u^H = \langle u^h \mid h \in H \rangle = U$ *e* $O_p(G/C_G(U)) = \langle 1 \rangle$.

Dimostrazione. Sia $x \in G$, $x = x_1 x_2$ con $x_1 \in H$ e $x_2 \in P$ e sia $h \in H$. Poniamo $hx_1 = h_1 \in H$. Essendo $HC_G(U)/C_G(U) \lhd G/C_G(U)$, per ipotesi, si avrà $h_1 x_2 = cx_2 h_2$ con $c \in C_G(U)$ e $h_2 \in H$. Dunque $u^{hx} = u^{hx_1x_2} = u^{h_1x_2} = u^{cx_2h_2} = u^{h_2}$, essendo $c \in C_G(U)$ e $u \in Z(P)$. Perciò $u^{Hx} = u^H$ per ogni $x \in G$ e dunque $u^H \lhd G$. Essendo U normale minimo e $u \neq 1$, si conclude che $u^H = U$. Sia ora $x \in P$, tale che $xC_G(U) \in O_p(G/C_G(U))$. Sia $h \in H$; risulterà $hx = cxh$ con $c \in C_G(U)$, essendo l'immagine di H in $G/C_G(U)$ un p'–sottogruppo normale di $G/C_G(U)$ (e quindi centralizzato da $O_p(G/C_G(U))$). Si avrà allora $u^{hx} = u^{cxh} = u^h$, essendo $c \in C_G(U)$ e $u \in Z(P)$. Dunque $x \in C_G(u^H) = C_G(U)$ e perciò $O_p(G/C_G(U)) = \langle 1 \rangle$.

LEMMA 3. G *soddisfi le seguenti condizioni*:

(i) G *non ha* p'*–quozienti diversi da* $\langle 1 \rangle$

(ii) $G_{\mathscr{E}}$ *è un* p*–gruppo*

(iii) $G_{\mathscr{g}} H \lhd G$

(iv) $G_{\mathscr{g}}$ *possiede una catena normale di lunghezza minore o uguale a* p, *a fattoriali ciclici*

(v) $p > 2$

(vi) *Se* $L \lhd G$ *e* $L \supseteq H$, *allora* $L \supseteq G_{\mathscr{g}}$

allora G *è prodotto semidiretto di* $G_{\mathscr{g}}$ *con* $N_G(H)$.

Dimostrazione. Sia $G_{\mathscr{g}} = L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_r = \langle 1 \rangle$ una G–serie principale di $G_{\mathscr{g}}$. Per la (iii) $G_{\mathscr{g}} H \lhd G$; sia $H \leq C_G(G_{\mathscr{g}})$, allora $H \lhd G$, per (vi) $G_{\mathscr{g}} = \langle 1 \rangle$ e la tesi del teorema è banalmente verificata. Sia $H \nleq C_G(G_{\mathscr{g}})$; essendo $G_{\mathscr{g}}$ un p–gruppo e H un p'–gruppo, H non può allora centralizzare tutti i fattoriali L_i/L_{i+1} ed esisterà quindi un indice i, tale che $H \leq C_G(L_{i+1})$ e $H \nleq C_G(L_i/L_{i+1})$. Per la (vi) deve essere $G_{\mathscr{g}} \leq C_G(L_{i+1})$.

Essendo $p > 2$ (per la condizione (v)), L_i è un p–gruppo regolare e dunque $\Omega_1(L_i)$ ha esponente p. Essendo $L_i \leq G_{\mathscr{g}}$ e valendo (iv) si conclude che $|\Omega_1(L_i)| \leq p^p$. D'altra parte L_i/L_{i+1} è normale minimo in G/L_{i+1} e $G_{\mathscr{g}}/L_{i+1}$ è un p–sottogruppo normale di G/L_{i+1}; dunque $G_{\mathscr{g}} \leq C_G(L_i/L_{i+1})$. Per la (iii) $G/C_G(L_i/L_{i+1})$ ha un p'–sottogruppo di Hall normale. Per il Lemma 2, applicato al gruppo G/L_{i+1}, risulta $O_p(G/C_G(L_i/L_{i+1})) = \langle 1 \rangle$. Per la condizione (i) $p \mid [G : C_G(L_i/L_{i+1})]$ e, per il Teorema B di Higman e Hall, si ha $[L_i : L_{i+1}] \geq p^p$. D'altra parte $\Omega_1(L_i) L_{i+1}/L_{i+1} \lhd G/L_{i+1}$ e quindi, essendo L_i/L_{i+1} normale minimo in G/L_{i+1} è $\Omega_1(L_i) L_{i+1} = L_i$, oppure $\Omega_1(L_i) \leq L_{i+1}$. Nell'ultimo caso è $H \leq C_G(\Omega_1(L_i))$, ed essendo $p > 2$ e H un p'–gruppo, deve essere $H \leq C_G(L_i)$ contro il fatto che $H \nleq C_G(L_i/L_{i+1})$. In definitiva $L_i/L_{i+1} = \Omega_1(L_i) L_{i+1}/L_{i+1} \simeq \Omega_1(L_i)/L_{i+1} \cap \Omega_1(L_i)$ ha ordine maggiore o uguale a p^p.

Essendo $|\Omega_1(L_i)| \leq p^p$, si ha $L_{i+1} \cap \Omega_1(L_i) = \langle 1 \rangle$ e dunque $L_{i+1} = \langle 1 \rangle$. Ne segue che L_i è normale minimo in G; poniamo $U = L_i$. Consideriamo G/U. Esso soddisfa, con le ovvie modifiche, le ipotesi del Lemma e, procedendo per induzione, si dimostra che $G_{\mathscr{g}}/U \cap N_{G/U}(HU/U) = \langle 1 \rangle$. In particolare $G_{\mathscr{g}} \cap N_G(H) \leq U$.

Come abbiamo già osservato $U \leq Z(G_{\mathscr{g}})$ e dunque, in base al Lemma 1, $C_U(H) \lhd G$. Essendo U normale minimo in G e $H \nleq C_G(U)$, si conclude che $C_U(H) = \langle 1 \rangle$. Si ha allora $G_{\mathscr{g}} \cap N_G(H) \leq U \cap C_G(H) = C_U(H) = \langle 1 \rangle$. Ma $G_{\mathscr{g}} H \lhd G$ (per (iii)) e dunque $G = G_{\mathscr{g}} N_G(H)$, per l'argomento di Frattini e dunque G è prodotto semidiretto di $G_{\mathscr{g}}$ con $N_G(H)$.

TEOREMA 3. *Sia* G *un gruppo non nilpotente*, $G_{\mathscr{g}}$ *un* p*–gruppo* ($p > 2$) *dotato di una catena normale di lunghezza* p *a fattoriali ciclici; allora* G *si spezza su qualche sottogruppo normale proprio.*

Dimostrazione. Sia G inseparabile. G soddisfa le condizioni (i) e (iii) del Lemma 3 in base ai risultati contenuti in [3], soddisfa inoltre anche le condizioni (ii), (iv), (v) per ipotesi.

Sia $L \lhd G$ e $L \supseteq H$; allora $L \cap G_{\mathscr{S}} H \lhd G$ e $L \cap G_{\mathscr{S}} H = (L \cap G_{\mathscr{S}}) H$.

Sia $R = L \cap G_{\mathscr{S}}$. Allora $R \lhd G$. Essendo $G_{\mathscr{S}}/\Phi(G)$ normale minimo in $G/\Phi(G)$ e $\Phi(G) = \Phi(G_{\mathscr{S}})$ (in base ai risultati contenuti in [3]), si ha $R = G_{\mathscr{S}}$ oppure $R \leq \Phi(G)$. Sia $R \leq \Phi(G)$, allora $G = RN_G(H) \leq \Phi(G) N_G(H)$ e dunque $N_G(H) = G$, cioè $H \lhd G$ e G si spezza su H contro l'ipotesi. Perciò è soddisfatta anche la condizione (vi) del Lemma 3 e con essa la conclusione del Teorema.

COROLLARIO. *Sia p un numero primo,* G *un gruppo risolubile finito inseparabile e non nilpotente con* $G_{\mathscr{S}}$ *p-gruppo dotato di una catena normale di lunghezza minore o uguale a p, a fattoriali ciclici; allora $p = 2$ e* G *è l'estensione non spezzante del gruppo dei quaternioni tramite il gruppo simmetrico su* 3 *oggetti.*

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BECHTELL (1976) – *Inseparable finite solvable groups*, «Trans. Amer. Math. Soc.», *216*, 47–60.

[3] H. BECHTELL (1977) – *Inseparable finite solvable groups* II, «Proc. Amer. Math. Soc.», *64*, 25–29.

[3] A. SCARSELLI (1979) – *On a Class of Inseparable Finite Groups*, «Journal of Algebra» *58*, 94–99.