Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Grioli

Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.6, p. 426–432.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_6_426_0>

Fisica matematica. — *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui.* Nota II (*) del Socio GIUSEPPE GRIOLI.

SUMMARY. — It is proposed a theory of propagation of discontinuity waves which is not affected by the paradox of an infinite velocity of propagation of temperature. The theory is based on a constitutive equation of differential type for the heat flux, depending on the deformation of material.

Applications are made concerning the case of a non viscous fluid and that of an elastic body.

4. – FLUIDI NON VISCOSI

Quale prima applicazione della teoria esposta nella Nota I [13] si supponga che il continuo sia un fluido non viscoso del quale indicherò con p la pressione e con $\boldsymbol{v}$ la velocità euleriana. Sulla base delle notazioni già introdotte, si dovrà ritenere, notoriamente,

$$p = \frac{\partial I}{\partial \rho} = f(T, \rho) \tag{4.1}$$

e sussistono le equazioni

$$\operatorname{grad}_P p = \rho (\mathbf{F} - \dot{\boldsymbol{v}}) \quad , \quad \dot{\rho} + \rho \operatorname{div}_P \boldsymbol{v} = 0 . \tag{4.2}$$

Le variabili cinematico–geometriche rappresentate dalle a_s si riducono allo jacobiano della trasformazione che muta lo stato iniziale in quello attuale ma ben note considerazioni permettono di sostituire ad esso la densità.

Nello spirito della teoria proposta, si dovrà supporre che p, ρ, $\boldsymbol{q}$, T e $\boldsymbol{v}$ siano ovunque continue ma che le loro derivate parziali prime abbiano delle discontinuità di prima specie nell'attraversamento del fronte d'onda. Denotando con β, γ e λ i parametri caratteristici delle discontinuità delle derivate prime di p, ρ e $\boldsymbol{v}$, risulta

$$[\operatorname{grad}_P p] = \beta \boldsymbol{n} \quad , \quad [\dot{\rho}] = -\gamma V \quad , \quad [\dot{\boldsymbol{v}}] = -\lambda V \quad , \quad [\operatorname{div}_P \boldsymbol{v}] = \lambda \cdot \boldsymbol{n}, \tag{4.3}$$

mentre, a causa di (4.1), si ha

$$\beta = \frac{\partial f}{\partial T} \alpha + \frac{\partial f}{\partial \rho} \gamma = \frac{\partial f}{\partial T} \alpha + \gamma V_0^2 , \tag{4.4}$$

(*) Presentata nella seduta del 27 novembre 1979.

pur di indicare con

$$V_0 = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \rho}}, \qquad \left(\text{è da ritenersi } \frac{\partial f}{\partial \rho} > 0\right), \tag{4.5}$$

la nota espressione della velocità di propagazione delle onde acustiche (longitudinali). Da (4.2,2), (4.3) segue, classicamente,

$$\beta \boldsymbol{n} - \rho V \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad , \quad \gamma V - \rho \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{n} = 0 , \tag{4.6}$$

dalla quale, tenuto conto di (4.4), si deduce

$$\gamma (V_0^2 - V^2) + \frac{\partial f}{\partial T} \alpha = 0 . \tag{4.7}$$

Sulla base delle (4.6), (4.7), si riconosce che non sono possibili onde trasversali, come accade nei casi di propagazione isoterma o adiabatica.

È facile riconoscere che adattando la (3.6) al caso dei fluidi non viscosi, tenuto conto che in tal caso L diviene un coefficiente di proporzionalità, si ottiene

$$\left(zcV^2 - z \frac{\partial L}{L \, \partial T} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} V - L\right) \alpha - \left(T \frac{\partial f}{\partial T} V + \frac{\partial L}{L \, \partial \rho} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}\right) \gamma z V = 0. \tag{4.8}$$

La (4.8) va associata alla (4.7) per la determinazione di quei valori di V per i quali esistono valori non tutti nulli dei parametri α e γ che le soddisfano. Il confronto di (4.7), (4.8) mostra che tali valori sono tutti e solo quelli che soddisfano all'equazione di quarto grado

$$\begin{aligned} M(V) = (V^2 - V_0^2) \left[z \left(cV^2 - \frac{\partial L}{L \, \partial T} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} V \right) - L \right] - \\ - zV \left(TV \frac{\partial f}{\partial T} + \frac{\partial L}{L \, \partial \rho} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \right) \frac{\partial f}{\partial T} = 0 . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Per z positivo la (4.9) ammette in generale due e soltanto due radici reali positive. Per convincersene è utile una breve discussione. A tal fine si ponga

$$\left\{ \begin{aligned} A(V) &= V^2 - \frac{\partial L}{cL \, \partial T} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} V - \frac{L}{cz}, \\ B(V) &= \frac{\partial f}{\partial T} TV + \frac{\partial L}{L \, \partial \rho} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}, \end{aligned} \right. \tag{4.10}$$

di modo che la (4.9) diviene

$$M(V) = z (V^2 - V_0^2) \, cA(V) - zV \frac{\partial f}{\partial T} B(V) = 0 . \tag{4.11}$$

Poiché si deve ragionevolmente presumere che sia $\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{\partial p}{\partial T} > 0$, ne segue che ogniqualvolta sia $\frac{\partial L}{L\,\partial \rho}\, \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} \geq 0$ risulta $B(V) > 0$ e si deduce

$$M(V_0) < 0\,, \tag{4.12}$$

qualunque sia z positivo.

Supposto, invece, $\frac{\partial L}{L\,\partial \rho}\, \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} < 0$, si consideri l'equazione $A(V) = 0$ la quale coincide con quella corrispondente ai continui rigidi (I, 3.8) e ammette due radici reali di cui una soltanto positiva. Denotando con $V'(z)$ tale radice, risulta

$$A(V) \leq 0 \qquad \text{se è} \quad 0 \leq V \leq V', \tag{4.13}$$

valendo il segno di uguaglianza solo per $V = V'$. È utile osservare che la somma di tali radici al tendere di z a zero si mantiene finita, mentre il loro prodotto diverge. Ne segue che ambedue le radici divergono al tendere di z a zero e si ha $\lim_{z\to 0} V'(z) = \infty$.

Sempre nell'ipotesi $\frac{\partial L}{L\,\partial \rho}\, \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} < 0$, esiste inoltre un valore, V'', di V, espresso da

$$V'' = -\frac{\partial L}{L\,\partial \rho}\,\frac{1}{T\,\partial f/\partial T}\,\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} > 0 \tag{4.14}$$

per cui risulta

$$B(V) \geq 0\,, \tag{4.15}$$

per ogni $V \geq V''$.

Dalle considerazioni fatte si deduce che ogniqualvolta è $V'' \leq V_0$ sussiste la (4.12), qualunque sia $z > 0$. Se invece è $V'' > V_0$, in base a quanto si è osservato sul comportamento di $V'(z)$, basta supporre z sufficientemente piccolo perché risulti $V'(z) \geq V''$. In tal caso, in base a (4.13), risulta $A(V'') \leq 0$, $B(V'') = 0$ e da (4.10) segue

$$M(V'') \leq 0\,. \tag{4.16}$$

Da (4.9) si deduce, inoltre,

$$M(0) = LV_0^2 > 0 \quad , \quad \lim_{V\to\infty} M(V) = \infty\,. \tag{4.17}$$

Si conclude che ogniqualvolta è $\frac{\partial L}{L\,\partial \rho}\, \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} \geq 0$, come pure ogniqualvolta essendo $\frac{\partial L}{L\,\partial \rho}\, \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} < 0$ risulta $V_0 \geq V''$, l'equazione (4.9) ammette due radici reali positive, in generale, una maggiore e l'altra minore di V_0, qualunque sia $z > 0$. Se invece simultaneamente risulta $\frac{\partial L}{L\,\partial\rho}\,\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} < 0$ e $V_0 < V''$, l'equazione (4.9) ammette ancora due radici reali positive, almeno quando z (positivo) è sufficientemente piccolo. Tali due radici sono, generalmente, una maggiore e l'altra minore di V''.

È facile riconoscere che condizione sufficiente perché ciò accada è che z renda soddisfatta la limitazione

$$\text{(4.18)} \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial T}{cL\,\partial T}\,\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\right)^2 + \frac{4L}{zc}} \geq -\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}}{L}\left(2\,\frac{\partial L}{T\,\partial\rho}\,\frac{1}{\partial f/\partial T} + \frac{\partial L}{c\,\partial T}\right),$$

la quale è sempre verificata se il suo secondo membro è non positivo.

* * *

Le altre due radici della (4.9) se reali sono negative. Da (4.9) segue, infatti,

$$\text{(4.19)} \qquad \frac{d^2 M}{dV^2} = 12\,zcV^2 - 6\,\frac{\partial L}{L\,\partial T}\,\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\,V + 2\left[L + 2\,czV_0^2 + z\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^2 T\right]$$

da cui si deduce

$$\text{(4.20)} \qquad \left(\frac{d^2 M}{dV^2}\right)_{V=0} < 0 \quad , \quad \left(\frac{d^2 M}{dV^2}\right)_{V=\infty} = \infty\,.$$

Ne segue che la curva la cui equazione è rappresentata dai primi due membri della (4.9) ha due flessi di cui uno soltanto con ascissa positiva e, pertanto, se la (4.9) ha quattro radici reali due di esse sono necessariamente negative.

5. – SOLIDI IPERELASTICI

Si consideri oltre alla configurazione attuale, C, una configurazione di riferimento, C^0, denotando con x_r, y_r le coordinate rispetto a un medesimo riferimento trirettangolo levogiro di punti corrispondenti di C e C^0. Denotando con la virgola la derivazione rispetto alle y_s, le varie funzioni termodinamiche risulteranno funzioni della temperatura T in C, di quella T^0 in C^0 e – tenuto conto del principio di indifferenza materiale – delle $x_{r,s}$.

Supposto che il continuo sia un solido, converrà riferirsi allo stress (non simmetrico) di Piola Kirchoff le cui componenti risultano espresse dalle derivate dell'energia libera rispetto alle $x_{r,s}$, nel caso che ora si considera di un solido iperelastico. Volendo dare forma lagrangiana alle equazioni, particolarmente conveniente nel caso dei solidi, converrà tener conto delle relazioni

$$\text{(5.1)} \qquad \operatorname{div}_P \boldsymbol{q} = q_{i,m} \frac{A_{im}}{D} \quad , \quad T_{/i} = T_{;m} \frac{A_{im}}{D} ,$$

ove D è lo jacobiano delle x_r rispetto alle y_s e A_{im} il complemento algebrico in esso di $x_{i,m}$. Tenendo conto delle (5.1) è possibile porre in forma lagrangiana il problema della propagazione di onde termomeccaniche, sulla base delle equazioni generali stabilite in [13]. Rinuncio per brevità a rendere esplicito quanto detto ma mi limito a considerare con qualche dettaglio il caso dei corpi iperelastici poco deformabili e isotropi. In tal caso, com'è ben noto, le varie operazioni analitiche vanno eseguite identificando C con C^0 e, nell'ipotesi che C^0 sia uno stato di equilibrio naturale, l'energia libera ha l'espressione

$$\text{(5.2)} \qquad I = \tfrac{1}{2} (\bar{\lambda} + 2\,\bar{\mu})\, I_1^2 - 2\,\bar{\mu}\, I_2 + a I_1 + b ,$$

ove I_1 e I_2 sono gli invarianti lineare e quadratico costruiti con le caratteristiche linearizzate della deformazione, $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$ i coefficienti di Lamé, *a* e *b* dei coefficienti dipendenti, insieme a $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$, dalla temperatura T in C e da quella T^0 in C^0 ma non dalla deformazione. L'operatore L diviene ora un coefficiente dipendente da T, T^0 e linearmente da I_1. I vari coefficienti soddisfano alle note relazioni

$$\text{(5.3)} \qquad 3\bar{\lambda} + 2\,\bar{\mu} > 0 \quad , \quad \bar{\mu} > 0 ,$$

$$a_{T=T^0} = b_{T=T^0} = 0 \quad , \quad b'' - = \frac{c}{T} < 0 ,$$

ove l'apice denota derivazione rispetto a T.

Con dei semplici sviluppi, dalle equazioni (I, 3.4), (I, 3.7) si deduce

$$\text{(5.4)} \qquad \begin{cases} (c - a''\, I_1\, T)\, V\alpha - a'\, TV\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n} = 0 , \\ zV\boldsymbol{\tau} - \left(z\, \dfrac{\partial L}{L\, \partial T}\, V\boldsymbol{q} + L\boldsymbol{n} \right) \alpha - z\, \dfrac{\partial L}{L\, \partial I_1}\, V\boldsymbol{q}\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{n} = 0 , \\ (\bar{\lambda} + \bar{\mu})\, \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{n} n_r + (\bar{\mu} - \rho V^2)\, \lambda_r + m_r\, \alpha = 0 , \end{cases}$$

ove si sono indicate con u_r le componenti di spostamento e si è posto

$$\text{(5.5)} \qquad m_r = (\bar{\lambda}'\, u_{,ii} + a')\, n_r + \bar{\mu}'\, (u_{r,s} + u_{s,r})\, n_s .$$

Dalle (5.4) segue

$$\text{(5.6)} \qquad \begin{cases} zV\, \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n} - \left(z\, \dfrac{\partial L}{L\, \partial T}\, V\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} + L \right) \alpha - z\, \dfrac{\partial L}{L\, \partial I_1}\, V\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\, \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{n} = 0 , \\ \rho\, (V_0^2 - V^2)\, \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{n} + m\alpha = 0 , \end{cases}$$

avendo posto

$$V_0 = \sqrt{\frac{\bar\lambda + 2\,\bar\mu}{\rho}} \quad , \quad m = m_r\, n_r \,. \tag{5.7}$$

Sulla base delle (5.4), (5.6) si riconosce che non sono possibili in generale onde per le quali risulti soddisfatta anche una sola delle relazioni $\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{n} = 0$, $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ e che trasportino calore (cioè, con $\alpha \neq 0$). Se mai, possono esistere onde trasversali ($\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{n} = 0$) con $\alpha = 0$, $\tau = 0$.

In generale, il sistema delle equazioni (5.4,1), (5.6) porta all'equazione risolvente

$$\rho\,(V_0^2 - V^2)\left[zV^2\,(a''\,I_1\,T - c) + \frac{z\,\partial L}{L\,\partial T}\,V\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} + L\right] - \tag{5.8}$$

$$- mzV\left(a'\,TV + \frac{\partial L}{L\,\partial I_1}\,\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\right) = 0 \,.$$

Si supponga che la piccolezza della deformazione consenta di trascurare i termini nelle $u_{r,s}$ quando essi vanno sommati con termini da essi indipendenti oppure che $\bar\lambda$ e $\bar\mu$ dipendano debolmente da T in modo da ritenere trascurabili i prodotti $\bar\lambda'\,u_{r,s}$, $\bar\mu'\,u_{r,s}$. In tali casi m si identifica con a' [vedi (5.5), (5.7)] e la (5.8) diviene

$$\rho\,(V_0^2 - V^2)\left[zV^2\,(a''\,I_1\,T - c) + \frac{z\,\partial L}{L\,\partial T}\,V\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} + L\right] - \tag{5.9}$$

$$- a'\,zV\left(a'\,TV + \frac{\partial L}{L\,\partial I_1}\,q\cdot n\right) = 0 \,.$$

Per la (5.9) può farsi una discussione analoga a quella fatta per la (4.9), mediante la quale si dimostra che essa ammette in generale due radici reali positive alle quali corrispondono onde né trasversali né longitudinali a causa dell'interazione termica.

Nel caso che non sia legittimo semplificare la (5.8) nella (5.9), è ragionevole presumere che per motivi di continuità si presentino circostanze analoghe, data la piccolezza delle deformazioni. Si può osservare, tra l'altro, che già nel caso che i coefficienti di Lamé non dipendano da T e L non dipende da I_1 la (5.8), si riduce alla (5.9).

OSSERVAZIONE. La (5.8) mostra che l'interazione tra propagazione meccanica e propagazione termica è dovuta alla presenza delle derivate rispetto alla temperatura dei coefficienti a, $\bar\lambda$ e $\bar\mu$ e alla dipendenza di L dalla deformazione. Nel caso che a, $\bar\lambda$ e $\bar\mu$ non dipendano da T e L non dipenda da I_1 manca l'interazione e la (5.8) diviene

$$(V_0^2 - V^2)\left[L + \frac{z\,\partial L}{L\,\partial T}\,V\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} - zcV^2\right] = 0 \,, \tag{5.10}$$

la quale ammette la radice $V = V_0$ e una seconda radice coincidente con quella che si avrebbe se il corpo fosse rigido [vedi (I, 3.8)].

Esaminando le conseguenze delle (5.4) si riconosce che la prima delle due radici corrisponde a onde acustiche longitudinali senza trasporto di calore ($\alpha = 0 , \tau = 0$), l'altra a un'onda di puro calore senza trasmissione acustica (silenziosa, $\lambda = 0$). In assenza di interazione, naturalmente, il problema ammette anche la classica soluzione delle onde acustiche trasversali.

BIBLIOGRAFIA (aggiuntiva)

[13] G. GRIOLI. Nota I dallo stesso titolo della presente, in corso di stampa su questi Rendiconti.