Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo Blondeaux, Giovanni Seminara

Transizione incipiente al fondo di un'onda di gravità

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.6, p. 408–417.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_6_408_0>

Meccanica dei fluidi. — *Transizione incipiente al fondo di un'onda di gravità.* Nota di PAOLO BLONDEAUX e GIOVANNI SEMINARA, presentata (*) dal Corrisp. E. MARCHI.

SUMMARY. — The momentary instability of the viscous layer at the bottom of a progressive gravity wave is investigated by means of a slowly varying approach valid for large Reynolds numbers. The flow is found to be momentarily unstable starting from values of the Reynolds number around 85.

1. INTRODUZIONE

Lo studio sperimentale della transizione nello strato limite non stazionario al fondo di un'onda di gravità progressiva, su acque basse, è stato affrontato, fra gli altri, da Vincent [1], Collins [2] e, più recentemente, da Becchi e Scarsi [3] con l'uso di tecniche diverse. Un ulteriore contributo sperimentale, rilevante per il problema in esame è quello di Li [4] che si riferisce alla transizione in uno strato di Stokes. I risultati indicano che, nel caso di fondo liscio, il moto nello strato viscoso risulta instabile quando il numero di Reynolds R_δ, formato con lo spessore caratteristico dello strato δ e con l'ampiezza U_0 della velocità del moto a potenziale al fondo, assume valori compresi fra 110 e 160 circa. I risultati di Li conducono a valori critici di R_δ superiori, intorno a 560.

Lo studio teorico del problema in esame è riconducibile, in condizioni opportune che verranno precisate nel seguito, a quelle della transizione in una strato di Stokes. Questo ha le caratteristiche di un moto puramente oscillante nel tempo. L'analisi per modi normali della stabilità di tali moti può essere affrontata usando un approccio del tipo Floquet, riducendosi così ad un problema agli autovalori posto da un sistema di infinite equazioni differenziali ordinarie accoppiate. Un approccio di questo tipo è stato usato da Seminara ed Hall [5] per lo studio della stabilità lineare di uno strato di Stokes centrifugo e da Hall [6] per la studio della stabilità di uno strato di Stokes piano.

In [6] si dimostra che, contrariamente al caso centrifugo, lo strato di Stokes piano, per valori del numero di Reynolds non superi a 300, risulta stabile nel senso che disturbi infinitesimi rappresentabili per modi normali subiscono, durante un ciclo, un decadimento netto. Nella stessa memoria si esaminano inoltre precedenti risultati di V. Kerczek e Davis [7] sulla stabilità del moto fra due pareti parallele una delle quali oscillante nel tempo. La presenza di una seconda parete si dimostra snaturare il problema agli

(*) Nella seduta del 15 dicembre 1979.

autovalori la cui soluzione non tende a quella relativa allo strato di Stokes quando la distanza fra le pareti tende ad infinito. Un'interessante caratteristica che emerge in [6] è l'esistenza di uno spettro continuo di autovalori che, in un ristretto campo di variazione dei parametri del problema, è il solo esistente, lo spettro discreto scomparendo all'annullarsi della velocità di propagazione del disturbo.

Il metodo analitico proposto in [5] si rileva meno efficiente nel caso piano e comporta uno sforzo numerico proibitivo per valori di R_δ superiori a poche centinaia.

Per conciliare i risultati sperimentali citati (che predicono instabilità) con quelli teorici ottenuti in [6] (che, per gli stessi valori di R_δ predicono un decadimento netto della perturbazione) appare utile esaminare se durante il ciclo il moto diventa 'momentaneamente' instabile. In altre parole sembra opportuno studiare il problema alla luce di un criterio di instabilità simile a quello introdotto da Shen [8] e discusso da Seminara e Hall [9]. Tale criterio di 'stabilità momentanea' risulta qui significativo se il moto base è lentamente variabile rispetto alla perturbazione. Posto dunque che i disturbi evolvano nella scala temporale convettiva δ/U_0, il moto base ha una dipendenza 'lenta' dal tempo se è verificata la condizione

$$\frac{U_0}{\omega\delta} = \frac{U_0}{\sqrt{2\nu\omega}} = R_\delta \gg 1 . \tag{1}$$

La validità della (1) ci consente di adottare un approccio del tipo WKB per lo studio dell'evoluzione delle perturbazioni. Tale procedimento si riduce, al minimo ordine di approssimazione, all'approccio quasi-stazionario adottato anche in [7].

Il metodo di soluzione proposto nella presente nota non richiede però l'introduzione di una seconda parete a distanza da quella oscillante.

I risultati presenti rivelano che il moto è 'momentaneamente' instabile durante parte del ciclo a partire da valori di R_δ intorno a 85 e che l'autovalore più instabile, corrispondente allo spettro discreto, confluisce nello spettro continuo durante parte del ciclo per R_δ relativamente piccoli. Tali risultati sono oggetto di confronto con quelli ottenuti attraverso l'analisi quasi-stazionaria in [7] e si rivelano solo in parziale accordo. Ciò è presumibilmente legato alla presenza della seconda parete che introduce anche nell'ambito dell'analisi quasi stazionaria difficoltà analoghe a quelle evidenziate in [6].

2. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Consideriamo un'onda di gravità progressiva bidimensionale di ampiezza a^* e numero d'onda k^* (gli asterischi denotano quantità dimensionali), evolvente su profondità d costante in un fluido di densità ρ e viscosità ν.

Definiamo un sistema cartesiano non inerziale (x^*, y^*) con l'asse x^* coincidente col fondo e l'asse y^* ad esso perpendicolare ed oscillante con velocità

$U_0 \cos \omega t^*$. Con ω si è indicata la pulsazione dell'onda, con t^* la variabile temporale e con U_0 l'ampiezza della velocità di oscillazione al fondo nell'ipotesi di irrotazionalità dell'onda.

Posta 'piccola' l'ampiezza dell'onda ($a^* k^* \ll 1$), al minimo ordine di approssimazione si ha:

$$U_0 = \frac{\omega a^*}{\sinh k^* d} . \tag{2}$$

Introduciamo le seguenti variabili adimensionali

$$\tau = \omega t^* \qquad (U^*, V^*) = U_0 (U , V) \qquad (x^*, y^*) = \delta^* (x , y) \qquad a = a^* k^* \tag{3}$$

con U^* componente della velocità nella direzione x^* e $\delta^* = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ spessore caratteristico dello strato viscoso adiacente al fondo. L'adozione di tale scala geometrica corrisponde alla finalità di investigare le caratteristiche di stabilità di tale strato.

Non è difficile mostrare che, per valori di R_δ sufficientemente grandi (ma tali da assicurare la stabilità del moto), il campo di velocità nello strato viscoso assume la forma

$$\begin{aligned} U &= \tfrac{1}{2} e^{-(1+i)y+i\tau} + \tfrac{1}{2} e^{-(1-i)y-i\tau} + O(R_\delta^{-1}) \\ V &\sim O(R_\delta^{-1}) . \end{aligned} \tag{4}$$

Dunque, al minimo ordine di approssimazione in R_δ^{-1} e con riferimento al sistema non inerziale adottato, il campo di moto entro lo strato viscoso si riduce ad uno strato di Stokes originato da una piastra piana oscillante in modo armonico con velocità di ampiezza U_0. Ci proponiamo di analizzare le proprietà di stabilità di tale moto.

Consideriamo un moto perturbato della forma $(U + u , v , 0)$, esaminiamo cioè solo disturbi bidimensionali. Ciò risulta significativo ricordando la estensione del teorema di Squire a moti paralleli non stazionari (Conrad e Criminale [10]). Assumendo le perturbazioni infinitesime, il problema differenziale che governa il loro comportamento è descritto dall'equazione linearizzata della vorticità. In termini della funzione di corrente del disturbo si trova:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2}{R_\delta}\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{R_\delta} \nabla^4 \psi \\ &\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \qquad \text{per} \quad y = 0 , \\ &\frac{\partial \psi}{\partial y} , \frac{\partial \psi}{\partial x} \to 0 \qquad \text{per} \quad y \to \infty , \end{aligned} \tag{5$_{a,b,c}$}$$

dove

(6)
$$R_\delta = U_0 \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} .$$

Le condizioni $(5)_{b,c}$ impongono rispettivamente la condizione di aderenza alla parete e l'annullarsi della perturbazione per $y \to \infty$.

Vedremo che per qualunque valore di R_δ esistono soluzioni dell'equazione $(5)_a$ anche se la condizione $(5)_c$ impone soltanto che la soluzione sia limitata per $y \to \infty$. Tali soluzioni sono associate all'esistenza di uno spettro continuo di autovalori.

Si consideri ora la soluzione asintotica della (5) per $R_\delta \to \infty$ e si assuma

(7)
$$\psi = \left\{ \sum_{n=0} \psi_n (y , \tau) R_\delta^{-n} \right\} \exp \left\{ i\alpha \left(x - \frac{\int c(\tau)\, d\tau}{R_\delta^{-1}} \right) \right\}$$

ove α è la lunghezza d'onda del disturbo riferita allo spessore caratteristico dello strato di Stokes e $c(\tau)$ è una funzione complessa ' lentamente variabile ' la cui parte reale determina la velocità di propagazione della perturbazione mentre la parte immaginaria ne controlla l'amplificazione.

Sostituendo la (7) nella (5) e arrestandosi la minimo ordine di approssimazione in R_δ^{-n} si trova in problema differenziale per ψ_0 della forma:

$(8)_{a,b,c}$
$$\begin{aligned} &(U - 2c)\, N\psi_0 - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \psi_0 = \frac{1}{i\alpha R_\delta} N^2 \psi_0 , \\ &\psi_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial y} = 0 \qquad \text{per} \quad y = 0 , \\ &\psi_0 , \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \to \infty \qquad \text{per} \quad y \to \infty , \end{aligned}$$

con

(9)
$$N \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 .$$

Si noti che il termine viscoso compare nella $(8)_a$, anche se formalmente esso dovrebbe apparire solo all'ordine di approssimazione successivo. Ciò risulta necessario al fine di evitare singolarità dell'operatore di Rayleigh (vedi Bouthier [11]). Si perviene così alla ricerca della autorelazione

(10)
$$f(\alpha , c , R_\delta) = 0$$

più instabile associata alle $(8)_{a,b,c}$ ad ogni istante temporale.

La soluzione della (8) è determinata a meno di una funzione moltiplicativa A (τ) definita dalla condizione di risolubilità del problema differenziale non omogeneo ottenuto per la ψ_1 all'ordine di approssimazione successivo. L'effetto di tale funzione ampiezza sulla soluzione corrisponde ad una correzione di ordine (R_δ^{-1}) al coefficiente di amplificazione $c(\tau)$ e nel seguito verrà trascurata.

3. Soluzione

Il problema (8) può essere risolto ad ogni istante in termini del seguente sviluppo in serie

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} a_{nm}(\tau)\, e^{(-\alpha - n(1+i)+2mi)y} + b_{nm}(\tau)\, e^{(-\sigma - n(1+i)+2mi)y} \tag{11}$$

dove i coefficienti a_{nm} sono esprimibili in termini di a_{00} attraverso le relazioni ricorrenti

$$a_{nm} = - \tag{12}$$

$$- \frac{i\alpha R_\delta}{\{(-\alpha - n(1+i)+2mi)^2 - \alpha^2\}^2 + 2\, i\alpha R_\delta\, c\, \{(-\alpha - n(1+i)+2mi)^2 - \alpha^2\}} \times$$

$$\times \left[\frac{\mu}{2}\, e^{i\tau} \{(-\alpha - (n-1)(1+i) + 2\, mi)^2 - \alpha^2 - 2\, i\}\, a_{n-1,m} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{2}\, e^{-i\tau} \{(-\alpha - (n-1)(1+i) + 2\,(m-1)\, i)^2 - \alpha^2 + 2\, i\}\, a_{n-1,m-1} \right]$$

e

$$\sigma = \sqrt{\alpha^2 - 2\, i\alpha R_\delta\, c} \tag{13}$$

$$\mu = \begin{cases} 0 & m = n \\ 1 & 0 \le m \le n-1 \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} 0 & m = 0 \\ 1 & 1 \le m \le n\,. \end{cases}$$

I coefficienti $b_{nm}(\tau)$ sono espressi in termini di b_{00} attraverso relazioni analoghe alla (12) con $(\sigma\,, b_{nm})$ in luogo di $(\alpha\,, a_{nm})$.

La soluzione (11) tende a zero per $y \to \infty$ a meno che c_r non risulti nullo, e $c_i < -(\alpha/2\, R_\delta)$. Imponendo la condizione di aderenza alla parete si ottiene il seguente sistema algebrico lineare omogeneo

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{a_{nm}}{a_{00}}\right\}a_{00}+\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{b_{nm}}{b_{00}}\right\}b_{00}=0 \tag{14}$$

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(\alpha-(i+1)\,n+2\,mi)\frac{a_{nm}}{a_{00}}\right\}a_{00}+$$
$$+\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(\sigma-(1+i)\,n+2\,mi)\frac{b_{nm}}{b_{00}}\right\}b_{00}=0$$

la soluzione del quale richiede uno sforzo numerico relativamente modesto anche ad alti numeri di Reynolds quando le serie (11) necessitano di un numero di termini relativamente elevato per una accurata rappresentazione di ψ_0. L'autorelazione (10) è determinata infatti imponendo che il determinante della matrice 2×2 associato al sistema (14) sia nullo.

L'equazione $(8)_a$ ammette soluzioni che non decadono all'infinito. Considerazioni simili a quelle discusse in [6] (pag. 161) applicate al problema (8), implicano infatti che se c_r si annulla e $c_i < -(\alpha/2\,R_\delta)$ la soluzione assume la forma

$$\psi_0 = a_{00}\,e^{-\alpha y}+b_{00}\cos\sqrt{\alpha^2+2\,\alpha R_\delta\,c_i}+c_{00}\sin\sqrt{\alpha^2+2\,\alpha R_\delta\,c_i}+ \tag{15}$$
$$+\text{ termini esponenziali decrescenti}$$

dove i coefficienti dei termini esponenziali possono essere espressi in termini di (a_{00}, b_{00}, c_{00}). Imponendo la condizione di aderenza alla parete si ottiene un sistema algebrico di due equazioni nelle tre incognite (a_{00}, b_{00}, c_{00}) che permette di esprimere due delle tre in funzione della restante. Quest'ultima rimane ovviamente indeterminata nell'ambito della teoria lineare. La soluzione (15) è associata con uno spettro continuo di autovalori ad ogni istante nel tempo. È possibile allora che lo spettro discreto scompaia durante parte del ciclo, confluendo nello spettro continuo. Questa caratteristica non emerge dall'analisi di Hall [6], conseguenza ovvia della differente struttura della presente soluzione rispetto a quella di Hall che è del tipo Floquet.

Al fine di avere un controllo sui risultati il problema differenziale (8) è stato risolto anche attraverso un metodo numerico simile a quello proposto in [5]. I risultati ottenuti attraverso i due approcci sono in ottimo accordo e vengono discussi nel paragrafo seguente.

4. RISULTATI E DISCUSSIONE

La serie (11) è stata troncata per $n = N$. Esperimenti numerici hanno mostrato che il valore di N richiesto per una accurata rappresentazione di ψ_0 pur aumentando al crescere di R_δ, si mantiene contenuto anche per alti valori di R_δ.

La fig. 1 chiarisce questa affermazione.

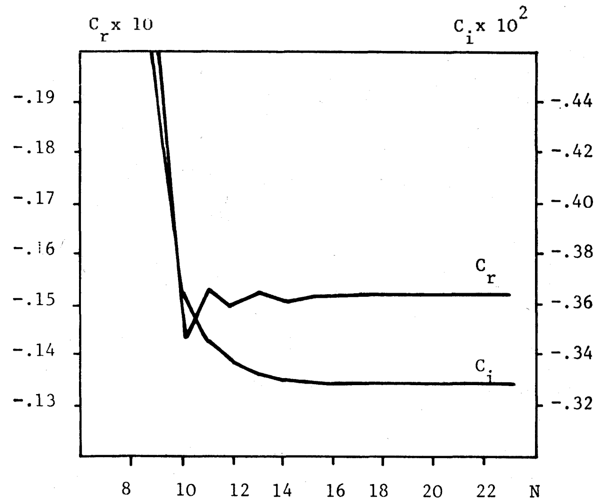

Fig. 1. – Influenza di N sui valori di c_r e di c_i per $\tau = 0$, $R_\delta = 250$, $\alpha = 0{,}5$.

Il procedimento numerico ha confermato i risultati precedenti fino alla 4ª cifra significativa.

Si noti poi che il sistema (8) verifica le seguenti relazioni

$$\tau' = \tau + \pi \qquad c_r(\tau') = -c_r(\tau) \qquad c_i(\tau') = c(\tau) . \tag{16}$$

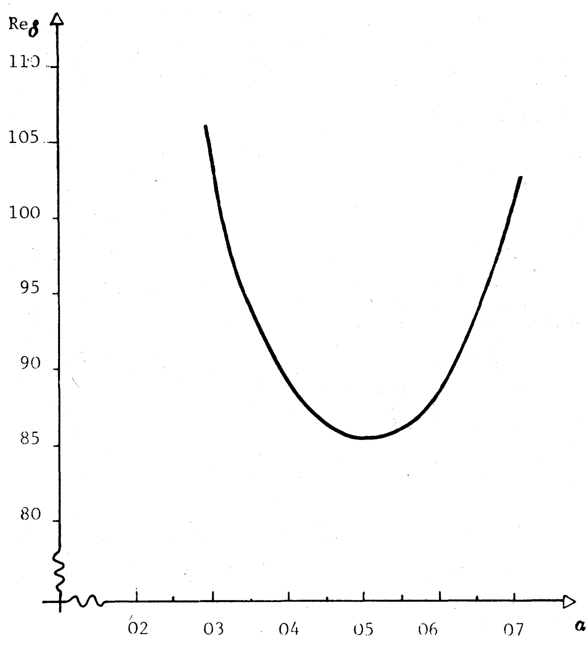

Fig. 2. – Curva di stabilità marginale momentanea.

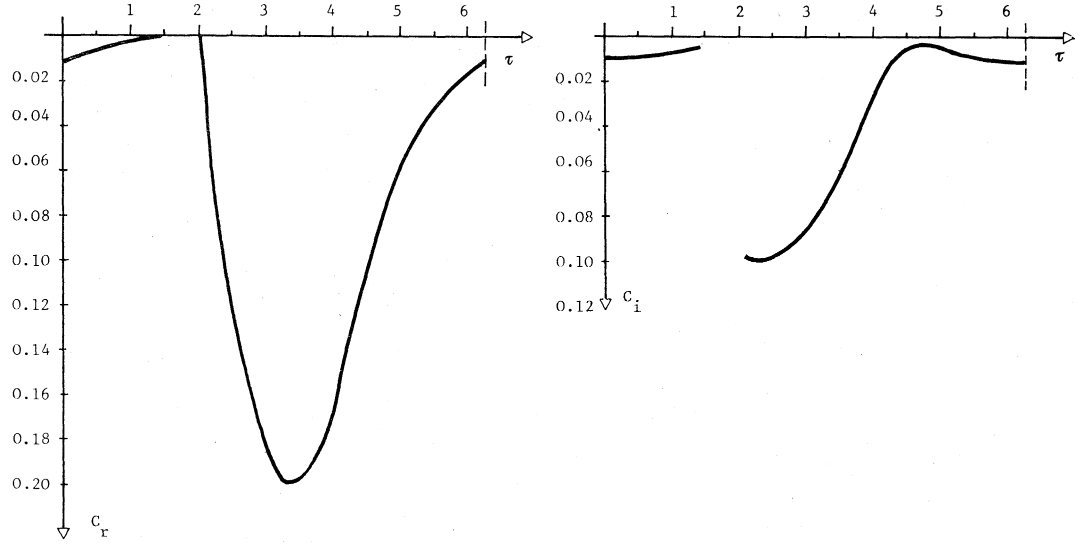

Fig. 3. – Andamento di $c_r(\tau)$ e $c_i(\tau)$ in un periodo, per $\alpha = 0{,}5$, $R_\delta = 80$.

Dunque ad ogni autovalore del problema (8) ne corrisponde un altro che rappresenta un disturbo propagantesi nella direzione opposta con sfasamento temporale π.

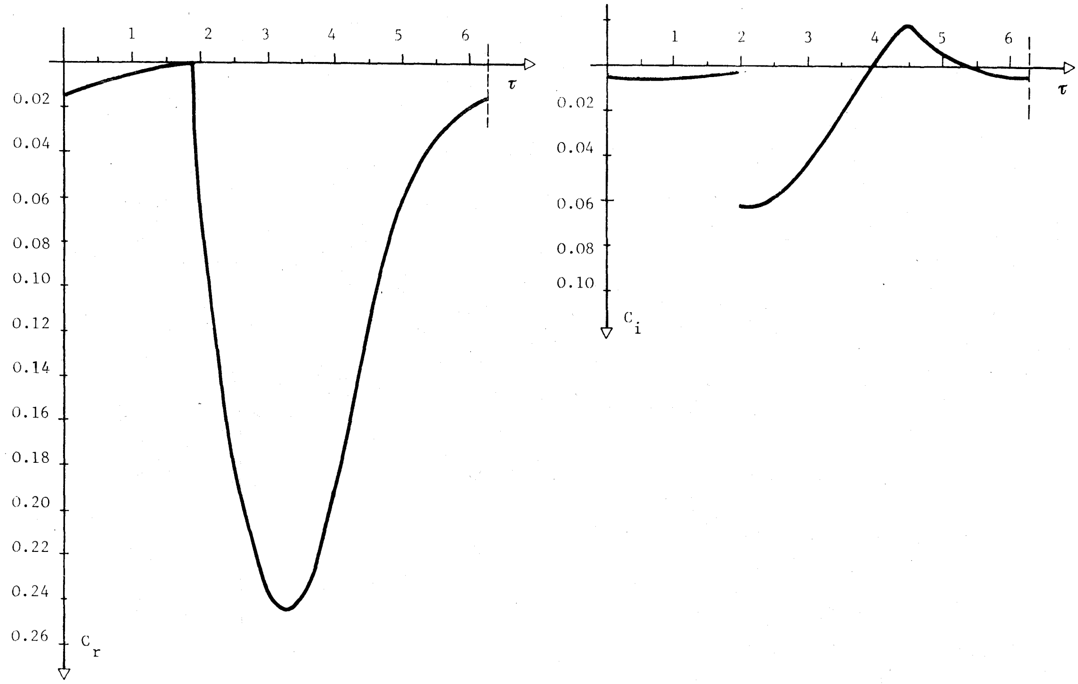

Fig. 4. – Andamento di $c_r(\tau)$ e $c_i(\tau)$ in un periodo, per $\alpha = 0{,}5$, $R_\delta = 250$.

I risultati mostrano che il moto esaminato è ' momentaneamente ' instabile, cioè i disturbi si amplificano, durante parte del ciclo, a partire da valori di R_δ di circa 85. La fig. 2 fornisce la curva di stabilità marginale costruita utilizzando il criterio di *stabilità momentanea*. Il disturbo più instabile è caratterizzato da lunghezze d'onda α pari a circa 0,5 e coefficienti di amplificazione positivi, intorno a $\tau = 3/2\,\pi$.

Per valori di R_δ relativamente bassi l'autovalore più instabile corrispondente allo spettro discreto scompare durante la parte del ciclo in cui c_r si annulla. Lo spettro discreto confluisce qui nello spettro continuo (fig. 3). Al crescere di R_δ tale fenomeno scompare (fig. 4).

Il valore critico di R_δ si rivela in buon accordo con i risultati sperimentali. È presumibile infatti che le tecniche sperimentali adottate (di visualizzazione ed anemometriche) non siano in grado di evidenziare la presenza di perturbazioni se non quando il livello di amplificazione da esse raggiunto risulta relativamente elevato, cioè quando R_δ sia apprezzabilmente maggiore del valor critico.

Di interesse è poi la conferma teorica della circostanza, rilevata da Becchi e Scarsi [3], secondo cui, per valori di R_δ nel campo qui esaminato, il moto risulta disturbato solo durante una parte del ciclo, localizzata in un intorno temporale dell'istante corrispondente alla presenza del cavo dell'onda nella sezione considerata.

Va tuttavia osservato che il confronto con i risultati sperimentali esistenti risulta solo qualitativamente significativo per le difficoltà associate a misure in vicinanza di pareti e su scale geometriche che (in acqua e per onde di lunghezza non proibitive rispetto alla loro riproducibilità in laboratorio) sono non molto maggiori dei più piccoli sensori tecnicamente disponibili.

Di particolare interesse appare poi il confronto fra i risultati presenti e quelli ottenuti in [7]. Si ha un ottimo accordo per quanto riguarda i valori critici di R_δ ed α (86 e 0,5 rispettivamente) ottenuti attraverso la teoria quasi-stazionaria adottando un criterio di stabilità momentanea (teoria indicata con A in [7]). Se si adotta però il criterio di periodicità quale condizione di stabilità marginale il valore critico di R_δ, che si aggira intorno a 182 secondo i risultati in [7] (teoria indicata con B), risulta di gran lunga maggiore (intorno a 1000) secondo l'analisi presente. Non è arduo concludere che la presenza di una seconda parete posta a distanza 8δ dalla parete oscillante, forzando i disturbi ad annullarsi in modo non asintotico da una parte elimina la possibilità che emerga la esistenza di uno spettro continuo di autovalori, dall'altra altera la struttura della soluzione in quelle porzioni del ciclo in cui il decadimento delle perturbazioni all'infinito risulta particolarmente lento.

Il confronto dei risultati presenti con quelli ottenuti in [6] non è immediato. Tuttavia entrambi forniscono un decadimento netto delle perturbazioni nel ciclo per valori di R_δ inferiori a 300.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. E. VINCENT (1957) - « Proc. Conf. Coast. Eng. », *6*, University of Florida.
[2] J. I. COLLINS (1963) - « J. Geophys. Res. », *18*, 6007.
[3] I. BECCHI e G. SCARSI (1976) - « La Ricerca Scientifica », C.N.R.
[4] H. LI (1954) - « Beach Erosion Bd. », U. S. Army Corps Eng., Washington, Tech.
[5] G. SEMINARA and P. HALL (1976) - « Proc. Roy. Soc. », *350*, 299.
[6] P. HALL (1978) - « Proc. Roy. Soc. », A, *359*, 151.
[7] C. KERCZEK and S. H. DAVIS (1974) - « J. Fluid Mech. », *62*, 753.
[8] S. F. SHEN (1961) - « J. Aero Sci. », *28*, 397.
[9] G. SEMINARA and P. HALL (1975) - « Proc. Roy. Soc. », A, *346*, 279.
[10] P. W. CONRAD and W. O. CRIMINALE (1965) - « Z. Angew. Math. Phys. », *16*, 233.
[11] M. BOUTHIER (1973) - « I. Mécanique », *12*, 75.