Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Lacava

Sulla struttura delle Ł-algebre

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.5, p. 275–281.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_5_275_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 27 novembre 1979

Presiede il Presidente della Classe ANTONIO CARRELLI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Algebra. — *Sulla struttura delle Ł–algebre* (*). Nota di FRANCESCO LACAVA, presentata (**) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — In this paper some algebraic properties of Ł–algebras are studied.

Premettiamo, per comodità del lettore, alcune definizioni e i risultati essenziali per il seguito. Per i particolari rinviamo a [1], [3], [5].

Diciamo Ł–algebra una struttura $\mathscr{A} = \langle A, +, ' ; 0, 1 \rangle$ tale che:

1) $\langle A, +, 0 \rangle$ sia un monoide abeliano;

2) $x + 1 = 1$;

3) $(x')' = x$;

4) $0' = 1$ per ogni $x, y \in A$;

5) $x + x' = 1$;

6) $(x' + y)' + y = (x + y')' + x$.

Un elemento x si dice *idempotente* se $2x = x$. Un elemento x si dice *archimedeo* se esiste un intero positivo n tale che nx è idempotente; x si dirà invece *iperarchimedeo* se esiste un intero positivo n tale che $nx = 1$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche del C.N.R.

(**) Nella seduta del 27 novembre 1979.

$\mathscr{A}$ si dice *archimedea* se ogni suo elemento è archimedeo;

$\mathscr{A}$ si dice *iperarchimedea* se ogni suo elemento diverso da zero è iperarchimedeo.

Si definiscono inoltre le seguenti operazioni:

i) $x \vee y = (x' + y)' + y$;

ii) $x \wedge y = (x' \vee y')'$;

iii) $x \cdot y = (x' + y')'$;

e la seguente relazione d'ordine parziale:

iv) $x \leq y$ se e solo se $x' + y = 1$.

Una Ł–algebra totalmente ordinata si chiama Ł–catena.

Valgono allora i seguenti risultati:

PROPOSIZIONE 1. – $\langle A, \vee, \wedge ; 0, 1\rangle$ *risulta un reticolo distributivo dotato di massimo e di minimo e l'ordine parziale ad esso associato conincide con* $\leq$ *definito in iv).*

PROPOSIZIONE 2. – *Ogni Ł–algebra iperarchimedea è una Ł–catena* [1].

PROPOSIZIONE 3. – *Ogni Ł–catena archimedea è isomorfa ad una sotto–Ł–algebra di* $\langle \mathbf{R}_1, \oplus, ' ; 0, 1\rangle$ *ove* $\mathbf{R}_1 = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, $x \oplus y = \min(x + y, 1)$ *e* $x' = 1 - x$ [5].

PROPOSIZIONE 4. – *Ogni Ł–algebra è isomorfa ad un prodotto sottodiretto di Ł–catene* [1].

Indichiamo con:

$B_A = \{x \in A$: x è idempotente$\}$;

$H_A = \{x \in A$: x è archimedeo$\}$;

$J_A = \{x \in A$: x è iperarchimedeo$\}$.

Indicheremo inoltre con $B'_A = \{x \in A : x' \in B_A\}$; analogamente H_A e J'_A.

Ovviamente si ha $H_A \supseteq B_A \cup J_A$ e $B_A \cap J_A = \{1\}$. Inoltre $B'_A = B_A$ [1], $J'_A \neq J_A$ e in generale $H_A \neq H'_A$.

Ricordiamo [4] che si dice Ł–ideale un sottoinsieme I di A tale che:

1) se $x, y \in I$ allora $x + y \in I$;

2) se $x \in A$ e $y \in I$ con $x \leq y$ allora $x \in I$.

Un Ł–ideale si dice proprio se $I \neq A$.

Diciamo Ł–filtro un sottoinsieme F di A tale che:

1) se $x, y \in F$ allora $x \cdot y \in F$;

2) se $x \in A$ e $y \in F$ con $x \geq y$ allora $x \in F$.

PROPOSIZIONE 5. – 1) *Se* I *è un Ł–ideale* $I' = \{x \in A : x' \in I\}$ *è un Ł–filtro. Analogamente se* F *è un Ł–filtro* F′ *è un Ł–ideale*;

2) *è* I *un Ł–ideale proprio se e solo se* $I \cap J_A = \varnothing$; *analogamente* F *è un Ł–filtro proprio se e solo se* $F \cap J'_A = \varnothing$;

3) I *è un Ł–ideale massimale se e solo se* I′ *è un Ł–filtro massimale.*

Dalle definizioni precedenti segue anche:

PROPOSIZIONE 6. – 1) J_A *è chiuso rispetto alla somma*;

2) J'_A *è chiuso rispetto al prodotto*;

3) $H_A = H'_A$ *se e solo se* $\mathscr{A}$ *è archimedea.*

PROPOSIZIONE 7. – *Sia* $\mathscr{A}$ *una Ł–algebra e* $\mathscr{I}_A$ *la famiglia di tutti gli Ł–ideali massimali di* A. *Allora* $\cap \mathscr{I}_A = \{x \in J'_A - J_A : nx \in J'_A$ *per ogni* n *intero positivo*$\}$.

Dimostrazione. – Sia $x \in J'_A - J_A$ tale che per ogni n intero positivo $nx \in J'_A$.

Supponiamo per assurdo che esista un Ł–ideale massimale tale che $x \notin I$. Allora $\langle I , x\rangle = A$. Esistono quindi $a_1, \cdots, a_n \in I$ tali che $\langle a_1 \cdots, a_n , x\rangle = A$ cioè esistono $m_1, \cdots, m_n, s$ interi positivi tali che $m_1 a_1 + \cdots + m_n a_n + sx = 1$. Ma $sx \in J'_A$ cioè $(sx)' \in J_A$ e poiché $(sx)' \leq m_1 a_1 + \cdots + m_n a_n$ si ha $m_1 a_1 + \cdots + m_n a_n \in J_A$ cioè I non è massimale.

Viceversa se $x \in \cap \mathscr{I}_A$ chiaramente $x \notin J_A$. Supponiamo inoltre che esista un n tale che $nx \notin J'_A$ cioè $(nx)' \notin J_A$. Sia $I = \langle (nx)' \rangle$ e sia K un Ł–ideale massimale estendente I. Ma allora $nx \in K$ e quindi $K = A$.

COROLLARIO 1. – $\cap \mathscr{I}_A$ *è il massimo Ł–ideale contenuto in* J'_A.

Dimostrazione. – Immediata dalla proposizione precedente.

COROLLARIO 2. – *Se* $\mathscr{A}$ *è semisemplice allora ogni sua sotto Ł–algebra è semisemplice.*

DEFINIZIONE. – Un elemento xA si dice *n–divisore dell'unità* se sodisfa l'equazione $(n - 1)x = x'$.

PROPOSIZIONE 8. – *Sia* $b \in J_A \cap J'_A$ *e* $a \in \cap \mathscr{I}_A$. *Allora*:

1) $(b + a)' \in J_A \cap J'_A$;

2) *se* n *è il minimo intero tale che* $nb' = 1$ *e se* $n(b + a)' = 1$ *allora* $H_A \cap H'_A$ *non è una sotto Ł–algebra di* $\mathscr{A}$;

3) *se* $\mathscr{A}$ *è una Ł–algebra con n–divisori dell'unità per qualche* n *e* $H_A \cap H'_A$ *è una sotto Ł–algebra di* $\mathscr{A}$ *allora* $\mathscr{A}$ *è semisemplice*;

4) *se* $\mathscr{A}$ *è una Ł–catena con n–divisori dell'unità per qualche* n, *allora* $H_A \cap H'_A$ *è una sotto Ł–algebra se e solo se* $\mathscr{A}$ *è archimedea.*

Dimostrazione. – 1) Posto $c = ((b+a)' + b)'$ si ha $c \leq a$ quindi $c \in \cap \mathscr{I}_A$ e $b' = (b+a)' + c$. Allora $nb' = n(b+a)' + nc = 1$ cioè $(nc)' \leq \leq n(b+a)'$; ma per la Proposizione 7 esiste m tale che $m(nc)' = 1$ e quindi $mn(b+a)' = 1$.

2) Infatti $(b+a)' \in H_A \cap H_A'$ e $n(b+a)' + na = n(b'+a')' + nb' = 1$ cio è $(n(b+a)')' \leq na$ e poiché $(n(b+a)')' \neq 0$ si ha $(n(b+a)')' \notin H_A \cap H_A'$.

3) Basta osservare che se b è un divisore dell'unità allora soddisfa alle ipotesi di 2).

4) Vedi [1].

DEFINIZIONE. – Sia $\mathscr{A}$ una Ł–algebra. Un elemento $x \neq 0$ di A si dice un *Ł–atomo* se per ogni $y \in A$ con $0 < y \leq x$ esiste un intero positivo n tale che $ny \geq x$.

LEMMA 1. – *x è un Ł–atomo se e solo se nx è un Ł–atomo per ogni $n \geq 1$.*

Dimostrazione. – Sia $0 < y \leq nx$. Allora $x \wedge y \leq x$ quindi esiste m tale che $m(x \wedge y) \geq x$. Poiché $x \wedge y \leq y$ si ha $nx \leq nm(x \wedge y) \leq nmy$ cioè nx è un Ł–atomo.

Se $x \in A$, indichiamo con I_x l'Ł–ideale generato da x.

PROPOSIZIONE 9. – *x è un Ł–atomo se e solo se I_x è un Ł–ideale minimale.*

Dimostrazione. – Sia x un Ł–atomo e sia J un Ł–ideale tale che $0 \neq J \subseteq I_x$.

Sia $y \neq 0$ $y \in J$ allora $y \leq nx$ per qualche n e poiché nx è un Ł–atomo esiste m tale che $my \geq nx \geq x$ e quindi $x \in J$ cioè $J = I_x$.

Sia ora I_x minimale e sia $0 < y \leq x$. Allora $I_y = I_x$ per la minimalità di I_x e quindi $x \in I_y$ cioè $x \leq ny$ per qualche n.

COROLLARIO 3. – *Se x e y sono due Ł–atomi allora $I_x = I_y$ oppure $I_x \cap I_y = \{0\}$.*

DEFINIZIONE. – Una Ł–catena si dice *Ł–atomica* se ha almeno un Ł–atomo.

TEOREMA 1. – *Ogni Ł–algebra è isomorfa ad un prodotto sottodiretto di Ł–catene Ł–atomiche.*

Dimostrazione. – Infatti ogni Ł–algebra sottodirettamente irriducibile deve essere una Ł–catena (Proposizione 4) e Ł–atomica per la Proposizione 9. L'asserto segue immediatamente da un teorema di Birkhoff (vedi [3]).

DEFINIZIONE. – Un elemento a si dice *Ł–coatomo* se a' è un Ł–atomo.

PROPOSIZIONE 10. – *Sia a un Ł–coatomo e I un Ł–ideale proprio. Se $a \in I$ allora $a \in B_A$.*

Dimostrazione. – Poniamo $x = a'$. Allora x è un Ł-atomo. Si ha $((2x)' + x)' \leq x$. Se $((2x)' + x)' = 0$ allora $(2x)' + x = 1$ cioè $2x \leq x$ quindi $x \in B_A$ cioè $a \in B_A$. Supponiamo $((2x)' + x)' > 0$. Allora esiste un intero positivo n tale che $n((2x)' + x) \geq x$ cioè $x' + n((2x)' + x)' = 1$. D'altra parte $x' + ((2x)' + x)' = x' + ((2x')' + x')' = (2x' + x)' + 2x' = 2x'$. Quindi $x' + n((2x)' + x)' = (n+1)x' = 1$ cioè $(n+1)a = 1$ e quindi I non è proprio contro l'ipotesi.

PROPOSIZIONE 11. – *Sia a un Ł-coatomo e* I *un Ł-ideale proprio. Se $a \in$ I allora* I *è massimale.*

Dimostrazione. – Sia J un Ł-ideale proprio contenente I e sia $x \in$ J. Allora $x \vee a \in$ J e $x \vee a \geq a$. Quindi $(x \vee a)' \geq a'$ e poiché a' è un Ł-atomo esiste un intero positivo n tale che $n(x \vee a)' \geq a'$. D'altra parte $a' \in B_A$ quindi $n(x \vee a)' \leq na' = a'$ cioè $n(x \vee a)' = a'$. Ma poiché $x \vee a$ è un Ł-coatomo anche $(x \vee a)' \in B_A$ e quindi $(x \vee a)' = a'$ cioè $x \leq a$ onde $x \in$ I.

COROLLARIO 4. – *Sia a un Ł-atomo e* F *un Ł-filtro proprio. Allora se $a \in$ F si ha che $a \in B_A$ e* F *è massimale.*

COROLLARIO 5. – *Se a è un Ł-coatomo e $a \in$ I, con* I *Ł-ideale proprio, allora a è il massimo di* I.

COROLLARIO 6. – *Se a è il massimo di* I *allora $a \in B_A$. Se inoltre* I *è massimale e per ogni $y \geq a$ si ha $y' \notin$ I, allora a è un Ł-coatomo.*

Dimostrazione. – La prima affermazione è ovvia. Sia $0 < x \leq a'$ allora $x' \geq a$ quindi $x \notin$ I. Poiché I è massimale $\langle \mathrm{I}, x \rangle = \mathrm{A}$ cioè esistono elementi $a_1, \cdots, a_m \in$ I e un intero n tale che $a_1 + \cdots + a_m + nx = 1$. Poiché a è il massimo di I si ha $a + nx = 1$ cioè $a' \leq nx$ cioè a è un Ł-coatomo.

PROPOSIZIONE 12. – *Sia x un Ł-atomo tale che per ogni $n > 0$ $nx \notin B_A$. Allora $x \in \cap \mathscr{I}_A$.*

Dimostrazione. – Supponiamo per assurdo che esista un Ł-ideale massimale I tale che $x \notin$ I. Allora $\langle \mathrm{I}, x \rangle = \mathrm{A}$ cioè esiste un intero positivo n e un elemento $a \in$ I tali che $a + nx = 1$. Quindi $(nx)' \leq a$ onde $(nx)' \in$ I. Ma $(nx)'$ è un Ł-coatomo quindi $(nx)' \in B_A$ cioè $nx \in B_A$ contro l'ipotesi.

Indichiamo con $At(\mathrm{A})$ l'insieme degli Ł-atomi di A.

PROPOSIZIONE 13. – 1) *Se $x \in At(\mathrm{A}) \cap B_A$ allora $x \in At(B_A)$;*

2) *se $x \in At(B_A)$ allora $x \in At(\mathrm{A})$ se e solo se $\mathrm{I}_x \subseteq \mathrm{H}_A$.*

Dimostrazione. – Immediata dalle definizioni.

COROLLARIO 7. – *Se* B *è priva di atomi allora $\cap \mathscr{I}_A \supseteq At(\mathrm{A})$.*

PROPOSIZIONE 14. – *Sia* $\mathcal{A}$ *una Ł–algebra e* $a, b \in A$ *con* $a < b$. *Indichiamo con* $A_{a,b} = \{x \in A : a \leq x \leq b\}$. *Definiamo*:

$$x \oplus y = a + [(x'+a)\cdot(y'+a)]' \wedge (b'+a)'$$

$$x^{\urcorner} = a + (b'+x)'.$$

Allora $\mathcal{A}_{a,b} \equiv \langle A_{a,b}, \oplus, {}^{\urcorner}; a, b\rangle$ *è una Ł–algebra.*

Dimostrazione. – Verifichiamo sole le proprietà 5) e 6) della definizione di Ł–algebra poiché le altre sono immediate.

$$\begin{aligned}
x \oplus x^{\urcorner} &= a + [(x'+a)' + ((a + (b'+x)')' + a)'] \wedge (b'+a)' = \\
&= a + [(x'+a)' + (b'+x)'] \wedge (b'+a)' = \\
&= a + [((x'+a)' + (b'+x)' + b' + a)' + b' + a]' = \\
&= a + (b'+a)' = b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x^{\urcorner} \oplus y)^{\urcorner} \oplus y = a &+ (((a + (b'+ a + (((a + (b'+x)')' + a)' + (y'+a)') \wedge \\
&\wedge (b'+a)')')' + a)' + (y'+a)') \wedge (b'+a)' = \\
= a &+ (((a + (b'+ a + ((b'+x)' + (y'+a)') \wedge \\
&\wedge (b'+a)')')' + a)' + (y'+a)') \wedge (b'+a)' = \\
= a &+ (((a + (b'+ a + (((b'+x)' + (y'+a)' + b' + a)' + \\
&+ b' + a)')')' + a)' + (y'+a)') \wedge (b'+a)' = \\
= a &+ (((a + (b'+ a + ((x'+y)' + b' + a)')')' + a)' + \\
&+ (y'+a)') \wedge (b'+a)' = \\
= a &+ (((a + (x'+ y + ((b'+a)' + x' + y)')')' + \\
&+ a)' + (y'+a)') \wedge (b'+a)' = \\
= a &+ ((x'+ y + ((b'+a)' + x' + y)')' + \\
&+ (y'+a)') \wedge (b'+a)' = \\
= a &+ (((b'+ a + (b'+ a + (x'+y)')')' + b' + \\
&+ a + (y'+a)')' + b' + a)' = \\
= a &+ ((b'+ a + (x'+y)' + (y'+a)')' + b' + a)' = \\
= a &+ ((b'+ y\,(x'+y)')' + b' + a)' = \\
= a &+ ((y + (x'+y)')' + a)' = y + (x'+y)' = x \vee y
\end{aligned}$$

e quindi per simmetria $(x^{\urcorner} \oplus y)^{\urcorner} \oplus y = (x \oplus y^{\urcorner})^{\urcorner} \oplus x$.

Notiamo inoltre che da ciò risulta che l'ordine in $A_{a,b}$ è l'ordine indotto da A.

COROLLARIO 8. – *Se a è un Ł-atomo $\mathscr{A}_{0,a}$ è una Ł-catena archimedea.*

Dimostrazione. – Infatti, poiché a è un Ł-atomo, $\mathscr{A}_{0,a}$ è iperarchimedea e quindi (v. Proposizione 2) è linearmente ordinata.

COROLLARIO 9. – *Ogni Ł-ideale minimale è linearmente ordinato.*

PROPOSIZIONE 15. – *Sia $\mathscr{A}$ una Ł-algebra completa. Allora:*

1) $a + \bigvee b_i = \bigvee (a + b_i)$;

2) $\bigvee_{n=1}^{\infty} na \in B_A$.

Dimostrazione. – 1) Immediata (vedi [2], [4]); 2) Posto $c = \bigvee_{n=1}^{\infty} na$ si ha:

$$c + c = c + \bigvee_{n=1}^{\infty} na = \bigvee_{n=1}^{\infty} (na + c) = \bigvee_{n=1}^{\infty} \left(na + \bigvee_{m=1}^{\infty} ma \right) =$$

$$= \bigvee_{n=1}^{\infty} \left(\bigvee_{m=1}^{\infty} (n + m)\, a \right) \leq c\,.$$

TEOREMA 2. – *$\mathscr{A}$ si puo estendere ad una Ł-algebra completa se e solo se $\mathscr{A}$ è semisemplice.*

Dimostrazione. – Se $\mathscr{A}$ è semisemplice allora (vedi [1], [5]) può essere immersa in un prodotto diretto di $\mathbf{R}_1$. Viceversa sia $0 \neq c \in \cap \mathscr{I}_A$. Supponiamo esista $t = \bigvee_{n=1}^{\infty} nc$. Allora $(t' + c)' \leq t$ e $(t' + c)' \geq nc$ per ogni n Infatti

$$(t' + c)' + (nc)' = (t' + c)' + c + ((n + 1)\, c)' =$$

$$= (t + c')' + t + ((n + 1)\, c)' = 1\,.$$

Allora

$$(t' + c)' = t \qquad \text{cioè} \quad t' + (t' + c)' = 1\,;$$

ma $t' + (t' + c)' = c' + (t + c')' = c' = 1$ cioè $c = 0$ contro l'ipotesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. C. CHANG (1958) - *Algebraic analysis of many valued logic*, « Trans. Ann. Math. Soc. », *88*, 467–490.

[2] L. FUCHS (1963) - *Partially ordered algebraic systems*, Londra.

[3] G. GRÄTZER (1968) - *Universal algebra*, Amsterdam.

[4] F. LACAVA (1979) - *Alcune proprietà delle Ł-algebre e delle Ł-algebre esistenzialmente chiuse*, « B.U.M.I. » (5) *16*-A, 360–366.

[5] P. MANGANI (1973) - *Su certe algebre connesse con logiche a più valori*, « B.U.M.I. » (4) *8*, 68–78.