Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sergio Bressan

Una teoria sulla propagazione di onde di accelerazione termomeccaniche nei continui

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **67** (1979), n.3-4, p. 259–264.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_3-4_259_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

Fisica matematica. — *Una teoria sulla propagazione di onde di accelerazione termomeccaniche nei continui* (*). Nota (**) di SERGIO BRESSAN, presentata dal Socio G. GRIOLI.

SUMMARY. — Changes in Fourier's equation on heat propagation have been proposed by C. Cattaneo and G. Grioli. In this work we generalize these modifications and propose a theory on the propagation of thermomechanical waves, by means of which the paradox of the infinite propagation velocity is avoided. We consider only isentropic deformations of the continuum (as this seems to agree with experimental results) and use the theory of iterated discontinuities. The law of propagation of the thermomechanical waves is determined by the purely mechanical aspect of the problem considered here.

INTRODUZIONE

Per risolvere il cosiddetto paradosso di propagazione del calore con velocità infinita, Cattaneo ha proposto in [1] una leggera modifica dell'equazione di propagazione termica di Fourier (già considerata e scartata da Maxwell). Già in [1] e specialmente in [2], sulla base della teoria cinetica, si mostra che la suddetta modifica ha buoni fondamenti fisici. Cattaneo considera la propagazione termica a se, senza alcun corrispondente fenomeno meccanico. G. Grioli, in [3], ritenendo inscindibili i fenomeni termici e meccanici, aggiunge un termine meccanico all'equazione di Cattaneo arrivando ad un'equazione, E_z, di propagazione termica dipendente da un parametro z. Per $z \to 0$, E_z tende all'equazione classica di Fourier. Inoltre egli considera per tali materiali onde ordinarie di discontinuità. Tra l'altro, grazie al termine aggiunto, G. Grioli può anche calcolare un valore finito per la velocità V^* di propagazione dell'onda di discontinuità considerata nel problema di pura propagazione termica.

Consideriamo un corpo reale schematizzabile in un ordinario corpo termoelastico C e siano C_E e C_T i corpi iperelastici (e quindi puramente meccanici) ottenuti da C permettendogli solo trasformazioni isentropiche, e rispettivamente, isotermiche. Sono ritenuti abbastanza in accordo con l'esperienza (di onde in C) i risultati ottenuti applicando la teoria ordinaria delle discontinuità a C_E e non gli analoghi risultati relativi a C_T.

Nella trattazione di G. Grioli il caso $z = 0$ è volutamente scartato perché porta alla teoria abituale con gli inconvenienti in essa contenuti (velocità di propagazione termica infinita). Volendo istituire una teoria che, anche per

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica, per le applicazioni della Matematica alla Fisica e all'Ingegneria del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 10 ottobre 1979.

$z = 0$, non dia luogo a velocità infinita occorre ritenere che il vettore che caratterizza il flusso di calore sia esso stesso discontinuo attraverso il fronte d'onda.

Per quanto sopra, ho considerato onde isentropiche nel corpo $C^{(z)}$ considerato da Grioli e, anzi, in un tipo più generale $C^{(z,\xi)}$ di corpo che per $\xi = z$ si riduce a $C^{(z)}$ e per $\xi = 0$ si riduce a quello di Cattaneo eccetto che, per amor di generalità, ho tolto alcune ipotesi di isotropia.

Come in [4] si devono usare discontinuità iterate, ma, mentre in [4], ove si considera $C^{(z,\xi)}$ per $z = \xi = 0$, esse riguardano la temperatura, qui esse si usano per il flusso $\boldsymbol{q}$ di calore che compare insieme a $\dot{\boldsymbol{q}}$ nella equazione di propagazione termica.

Il risultato è che la nuova legge di propagazione termica non influisce su V^*; cioè per queste onde V^* ha gli stessi valori che per il corrispondente corpo iperelastico C_E.

L'onda termomeccanica d'accelerazione « adiabatica » qui considerata è non–ortodossa nel senso detto in [4] (N. 1) riguardo al caso (classico) ordinario (vedi: formula (7) per $z = \xi = 0$). Ciò nonostante essa appare di grande interesse per i motivi ivi addotti [1].

§ 1. – Premesse

Si consideri un continuo, di configurazione attuale C, sede di una perturbazione termomeccanica caratterizzata dai valori attuali dello stress, dalla temperatura assoluta T e dagli opportuni potenziali termodinamici. Detta E la densità di entropia e $\boldsymbol{q}$ il vettore flusso di calore, sussiste, in assenza di sorgenti (cosa che non ha interesse nel seguito) e nel caso di trasformazioni reversibili, la nota relazione puntuale:

$$\dot{E} + \frac{1}{T} \operatorname{div}_P \boldsymbol{q} = 0 \tag{1}$$

ove il punto denota derivazione materiale rispetto al tempo. La teoria classica associa alla (1) la nota relazione di Fourier:

$$\boldsymbol{q} + L \operatorname{grad}_P T = 0 \tag{2}$$

(1) Mi limito ad accennare i seguenti motivi messi in evidenza in [4] (N. 1) nel caso ordinario e validi nel presente:

a) Mediante onde di accelerazione termomeccaniche e « adiabatiche » si esplicita (e si generalizza) un noto procedimento usato da circa un secolo per determinare la velocità di propagazione di fenomeni ondosi in corpi termoelastici, basandosi sulla teoria delle onde di accelerazione propagantesi in corpi iperelastici (puramente meccanici);

b) Le uniche onde di accelerazione in corpi termoelastici che siano « ortodosse » sono ritenute in contrasto con l'esperienza, a differenza delle suddette onde « adiabatiche »;

c) Le onde d'urto termoelastiche e « adiabatiche », alle quali ci si riferisce in [4] (N. 1) sono ortodosse e hanno la stessa velocità di propagazione delle suddette onde di accelerazione.

ove L rappresenta un operatore lineare soddisfacente la: $L_{rs} z_r z_s \geq 0$ e si riduce ad un coefficiente nel caso isotropo.

G. Grioli in [3] si è basato, invece che sulla (2), sull'equazione più generale:

$$z\dot{\boldsymbol{q}} + (1 - z\dot{L}\, L^{-1})\, \boldsymbol{q} + L\, \mathrm{grad}_P\, T = 0 \tag{3}$$

ove z è un coefficiente positivo. Se z tende a zero la (3) tende alla classica (2). Inoltre le funzioni che compaiono in (1) e (3) dipendono dalla temperatura assoluta T e dal complesso delle variabili $a_1, \cdots, a_n$ che caratterizzano la deformazione del continuo. In tale teoria si fà l'ipotesi che $\boldsymbol{q}$ e T siano ovunque continue e che le loro derivate prime presentino una discontinuità di prima specie nell'attraversamento del fronte d'onda. Naturalmente si mantiene l'ipotesi di onde di accelerazione ammettendo quindi la continuità, attraverso il fronte d'onda, delle componenti di spostamento e delle loro derivate prime e ritenendo discontinue le derivate seconde.

§ 2. – UNA NUOVA TEORIA

Per quanto detto all'inizio ritengo la trasformazione isoentropica. Questa ipotesi comporta, di necessità, la discontinuità anche di $\boldsymbol{q}$ attraverso il fronte d'onda (2).

La presenza di $\boldsymbol{q}$ e $\dot{\boldsymbol{q}}$ nell'equazione costitutiva (vedi più avanti) comporta inevitabilmente l'uso (come avevo preannunciato) della teoria delle discontinuità iterate.

Per le ipotesi fatte si rivela più comodo esprimere il potenziale termodinamico, w, (e le altre funzioni di stato) scegliendo come variabili l'entropia E e i parametri caratteristici della deformazione a_s $(s = 1, \cdots, n)$. Si può scrivere:

$$T = \frac{\partial w\,(E\,, a_s)}{\partial E} \tag{4}$$

(2) Si supponga, ad esempio, che un fenomeno di tale tipo avvenga in un fluido perfetto. Al posto delle a_s si può così porre la densità ρ. Detti α e γ i parametri delle discontinuità delle derivate di T e ρ, si consideri l'entropia $E = E(\rho, T)$. Risultando $\dot{E} = \frac{\partial E}{\partial \rho}\dot{\rho} + \frac{\partial E}{\partial T}\dot{T}$, la costanza di E comporta la seguente condizione per la discontinuità:

$$0 = \frac{\partial E}{\partial \rho}\gamma + \frac{\partial E}{\partial T}\alpha . \tag{i}$$

Da (i) segue che la discontinuità della derivata di ρ comporta la condizione $\alpha \neq 0$. Supponendo $\boldsymbol{q}$ continuo, dalla (3) si ottiene:

$$-z\tau V^* + \alpha\left(L\boldsymbol{n} + zV^* \frac{\partial L}{\partial T} L^{-1}\boldsymbol{q}\right) + zV^* \frac{\partial L}{\partial \rho} L^{-1}\boldsymbol{q}\gamma = 0 . \tag{ii}$$

Dalla (ii) si vede che per z tendente a zero α può essere diverso da zero solo se V* tende all'infinito.

da cui risulta:

$$\mathrm{grad_P\,T} = \frac{\partial^2 w}{\partial \mathrm{E}^2}\,\mathrm{grad_P\,E} + \frac{\partial^2 w}{\partial \mathrm{E}\,\partial a_s}\,\mathrm{grad_P}\,a_s\,. \tag{5}$$

Le equazioni relative al contributo termico del fenomeno che considero sono allora: la (1) che in base a (4) diventa:

$$\frac{\partial w}{\partial \mathrm{E}}\,\dot{\mathrm{E}} + \mathrm{div_P}\,\boldsymbol{q} = 0 \tag{6}$$

e l'equazione un po' più generale della (3) che, in base a (4) e (5) scrivo:

$$z\dot{\boldsymbol{q}} + (1 - \xi\dot{\mathrm{L}}\,\mathrm{L}^{-1})\,\boldsymbol{q} + \mathrm{L}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \mathrm{E}^2}\,\mathrm{grad_P\,E} + \frac{\partial^2 w}{\partial \mathrm{E}\,\partial a_s}\,\mathrm{grad_P}\,a_s\right) = 0 \tag{7}$$

ove z e ξ sono due parametri che, in generale dipenderanno dallo stato fisico del corpo, cioè da E e $a_s\,(s = 1,\cdots,n)$.

Detti σ e $\boldsymbol{\tau}$ i parametri delle discontinuità di $\boldsymbol{q}$ e $\dot{\boldsymbol{q}}$, da (6) e (7) per la teoria delle discontinuità iterate, si ha:

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n} - \mathrm{Q}_{;\Gamma}\cdot\sigma^{;\Gamma} = 0 \tag{8}$$

$$z\,\frac{\delta_d\,\sigma}{\delta t} - z\mathrm{V}^*\,\boldsymbol{\tau} + (1 - \xi\dot{\mathrm{L}}\,\mathrm{L}^{-1})\,\sigma - \xi\mathrm{L}^{-1}\,\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial a_s}\,\boldsymbol{q}\,[\dot{a}_s] + \tag{9}$$

$$+\,\mathrm{L}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \mathrm{E}\,\partial a_s}\,[\mathrm{grad_P}\,a_s] = 0$$

ove: in (8) Q è il punto della superficie di discontinuità e il punto e virgola indica derivazione sulle superficie: in (9), al primo addendo, compare la derivata di spostamento $\frac{\delta_d\,\sigma}{\delta t}$ (3).

Moltiplicando la (8) per $z\mathrm{V}^*$ e la (9) scalarmente per $\boldsymbol{n}$ e confrontandole, si ottiene l'equazione:

$$z\left(\frac{\delta_d\,\sigma}{\delta t}\cdot\boldsymbol{n} - \mathrm{V}^*\,\mathrm{Q}_{;\Gamma}\cdot\sigma^{;\Gamma}\right) + (1 - \xi\dot{\mathrm{L}}\,\mathrm{L}^{-1})\,\sigma\cdot\boldsymbol{n} - \tag{10}$$

$$-\,\xi\mathrm{L}^{-1}\,\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial a_s}\,\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\,[\dot{a}_z] + \mathrm{L}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \mathrm{E}\,\partial a_s}\,[\mathrm{grad_P}\,a_s]\cdot\boldsymbol{n} = 0\,.$$

Alla (10) va associato il sistema di equazioni della discontinuità proveniente dalle equazioni della dinamica dei continui. Detto $\mathrm{K}^{rl}{}_{/l}$ il tensore di Piola–

(3) Indicando con V la velocità di avanzamento, è noto che è:

$$\frac{\delta_d\,\sigma}{\delta t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma_{,k}\,\mathrm{V}n^k.$$

Kirchoff, si può scrivere (in forma lagrangiana):

$$(11)\qquad \rho^* (\ddot{u}^r - F^{*r}) = - K^{rl}{}_{/l} = - \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^r{}_{,l}\, \partial x^s{}_{,m}} \frac{\partial x^s{}_{,m}}{\partial y^l} - $$

$$- \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^r{}_{,l}\, \partial y^l} - \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^r{}_{,l}\, \partial E} \frac{\partial E}{\partial y^l} \qquad (r = 1\,,2\,,3)$$

ove, al solito, le x^r e le y^l rappresentano la configurazione attuale e quella di riferimento rispettivamente. Dalla (11), detto λ il parametro della discontinuità delle derivate seconde dello spostamento, si ricava:

$$(12)\qquad - \rho^* V^* \lambda^r = \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^r{}_{,l}\, \partial x^s{}_{,m}} \left[\frac{\partial x^s{}_{,m}}{\partial y^l} \right] = \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^r{}_{,l}\, \partial x^s{}_{,m}} \lambda^s n_m n_l\,.$$

Le (12), costituendo un sistema omogeneo in λ^r, danno luogo alla nota equazione secolare:

$$(13)\qquad \left| \rho^* V^* \delta_{rs} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^r{}_{,l}\, \partial x^s{}_{,m}} n_m n_l \right| = 0$$

che determina i valori di V^* [4].

La (10) diventa così un'equazione differenziale nell'incognita componente di σ. Una volta risolta, le (8) e (9) sono certamente compatibili in quanto contengono anche il parametro τ.

Come si vede, i valori delle velocità di propagazione di queste onde termomeccaniche sono determinati dalle sole equazioni dinamiche e cioè, come si è detto all'inizio, sono i valori che competono al corrispondente corpo iperelastico C_E.

Ciò significa, ad esempio, che nei casi particolari dei fluidi perfetti o dei solidi iperelastici poco deformabili ed isotropi si ritrovano i classici risultati della teoria puramente meccanica sia per i valori delle velocità dell'onda che per il tipo di essa.

Ad esempio, per un fluido perfetto detta p la pressione e ρ la densità, vale la:

$$(14)\qquad p = \varphi (E\,, \rho)\,.$$

Detti β e γ i parametri delle discontinuità attraverso il fronte d'onda delle derivare di p e di ρ rispettivamente, dalla (14) si ha:

$$(15)\qquad \beta = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \gamma\,.$$

(4) Si noti che, ricordando l'ipotesi di isentropicità, si poteva prevedere l'indipendenza degli aspetti meccanico e termico del fenomeno.

Le equazioni dinamiche possono scriversi:

$$(16) \qquad \rho\,(\boldsymbol{\ddot{u}} - \mathbf{F}) = -\operatorname{grad}_P p\,; \qquad \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{\dot{u}} = 0\,.$$

Le (16) danno, com'è noto:

$$(17) \qquad \rho\lambda V^* = \beta \boldsymbol{n}\,; \qquad -\gamma V^* + \rho\lambda \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

da cui si ricava facilmente: $\gamma V^{*2} = \beta$.

Tenendo conto di (15) si può allora scrivere:

$$(18) \qquad \gamma \left(V^{*2} - \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) = 0$$

che dà: $V^{*2} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \rho}$. Naturalmente alla (18) va associata la (10) o, meglio, le (8) e (9) adattate al caso in esame.

OSSERVAZIONE. – Il caso $z = \xi = 0$ comporta, per la (9), la:

$$(19) \qquad \sigma + L \frac{\partial^2 w}{\partial E\, \partial a_s} [\operatorname{grad} a_s] = 0$$

che non necessariamente implica $\sigma = 0$. Si noti come la (19) leghi σ con le discontinuità di grad a_s e, in sostanza, non permetta di assegnare ad arbitrio le condizioni iniziali per il fenomeno considerato (vedi al riguardo l'introduzione).

BIBLIOGRAFIA

[1] C. CATTANEO (1958) – «Compt. Rend. Acad. Sci.», *247*.
[2] M. CARRASSI (1978) – «Nuovo Cimento», *46 B*.
[3] G. GRIOLI – *Sulla propagazione di onde termomeccaniche nei continui* (in corso di stampa su questi Rendiconti).
[4] A. BRESSAN (1979) – Presentato nel giugno e in corso di stampa nelle «Memorie dell'Acc. Naz. dei Lincei».