
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

LUIGI ASCIONE

Comportamento post-critico flessione-torsionale di travi elastiche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 67 (1979), n.1-2, p. 114-123.

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_1-2_114_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_67_1-2_114_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Comportamento post-critico flesso-torsionale di travi elastiche.* Nota (*) di LUIGI ASCIONE (**), presentata dal Corrisp. E. GIANGRECO.

SUMMARY. — In this work the flexural-torsional post-buckling behaviour of elastic beams is analyzed from a theoretical and experimental point of view. The theoretical analysis is developed by means of the classical perturbation method. The experimental analysis suggests instead a simple technique for the evaluation of the coefficient λ_2 , that characterizes the quadratic approximation of the equilibrium branched path. A comparison between theoretical and experimental results is also presented.

1. INTRODUZIONE

In questo lavoro vengono presentati alcuni risultati di una indagine teorico sperimentale sul comportamento post-critico flesso-torsionale di travi elastiche. In particolare vengono esaminati gli schemi di trave appoggiata e di trave a mensola, soggette a carichi sia trasversali che assiali. Se, infatti, per tali strutture è ben noto il valore del carico critico, non altrettanto ben noto è il comportamento post-critico per flesso-torsione, di cui esistono soltanto alcune indagini numeriche [1-2], che denunciano un comportamento post-critico di tipo stabile simile a quello presentato dalla trave di Eulero. L'analisi svolta utilizza una tecnica perturbativa alla Koiter, che permette di caratterizzare in maniera semplice e completa il comportamento post-critico di tali strutture. Viene inoltre presentato un metodo sperimentale per la determinazione del coefficiente λ_2 , cioè del coefficiente del termine quadratico dello sviluppo in serie della curva di equilibrio diramato. Il metodo esposto è quindi applicato ad alcuni modelli sperimentali ed i risultati ottenuti sono confrontati con i relativi risultati teorici.

2. IL MODELLO STUDIATO

Le ipotesi che caratterizzano il modello meccanico esaminato sono:

- i) Indeformabilità della sezione trasversale della trave.
- ii) Ortogonalità delle sezioni trasversali all'asse della trave dopo la deformazione.
- iii) Inestensibilità dell'asse della trave.

(*) Pervenuta all'Accademia il 2 agosto 1979.

(**) Dipartimento di Strutture. Univ. Calabria. Cosenza (Italia).

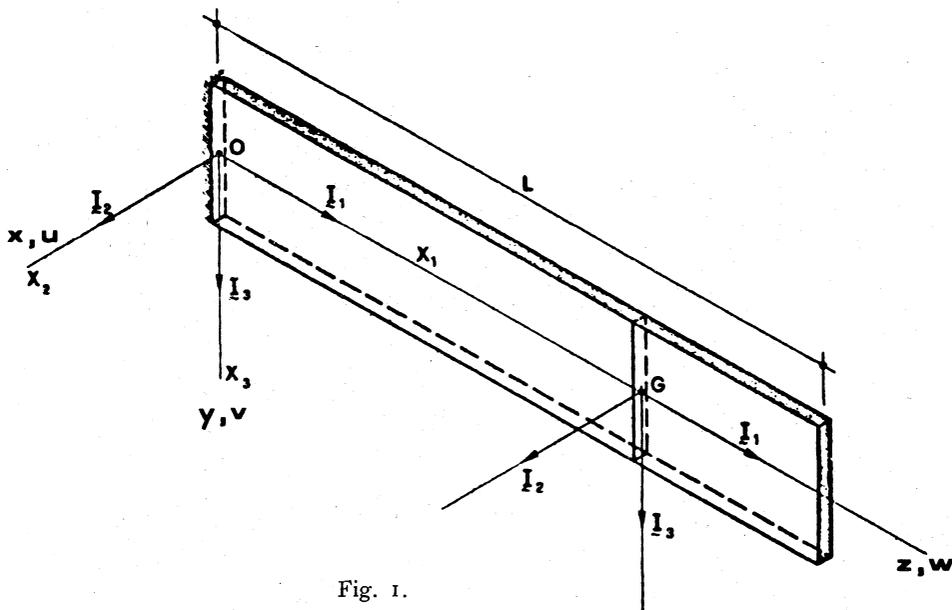
Tali ipotesi vengono normalmente accettate e conducono per esempio alla classica teoria dell'«elastica» sviluppata nel testo di Love [3]. Sulla base delle ipotesi *i*), *ii*), *iii*) e utilizzando i simboli indicati nella fig. 1 è possibile pervenire alla seguente espressione delle curvature della trave:

$$(2.1) \quad \tau = \alpha' + \left(u'' v' + \frac{u' v' v''}{I - v'^2} \right) \frac{I}{(I - u'^2 - v'^2)^{1/2}}$$

$$(2.2) \quad K_2 = -\frac{v'' \cos \alpha}{(I - v'^2)^{1/2}} + \left(u'' + \frac{u' v' v''}{I - v'^2} \right) \left(\frac{I - v'^2}{I - u'^2 - v'^2} \right)^{1/2} \sin \alpha$$

$$(2.3) \quad K_3 = \frac{v'' \sin \alpha}{(I - v'^2)^{1/2}} + \left(u'' + \frac{u' v' v''}{I - v'^2} \right) \left(\frac{I - v'^2}{I - u'^2 - v'^2} \right)^{1/2} \cos \alpha$$

dove $\alpha(z)$ è la rotazione torsionale della trave, τ rappresenta la curvatura torsionale e K_2 e K_3 rappresentano le curvature flessionali. Nel seguito col simbolo u si denoterà una terna di funzioni $(u(z), v(z), \alpha(z))$ che caratterizzano la deformata spaziale della trave. Una analisi più dettagliata della



cinematica flessio-torsionale delle travi di sezione compatta è contenuta in [4]. Si assume inoltre che:

iv) Esiste un'energia di deformazione della trave, quadratica nelle curvature:

$$(2.4) \quad V = \frac{1}{2} C \int_0^l \tau^2 dz + \frac{1}{2} B_2 \int_0^l K_2^2 dz + \frac{1}{2} B_3 \int_0^l K_3^2 dz$$

essendo C , B_2 e B_3 le rigidezze torsionale e flessionali della trave.

v) I carichi agenti sulla trave sono di tipo pesante e sono applicati nel piano (y, z) , rispetto al quale la sezione trasversale della trave è simmetrica.

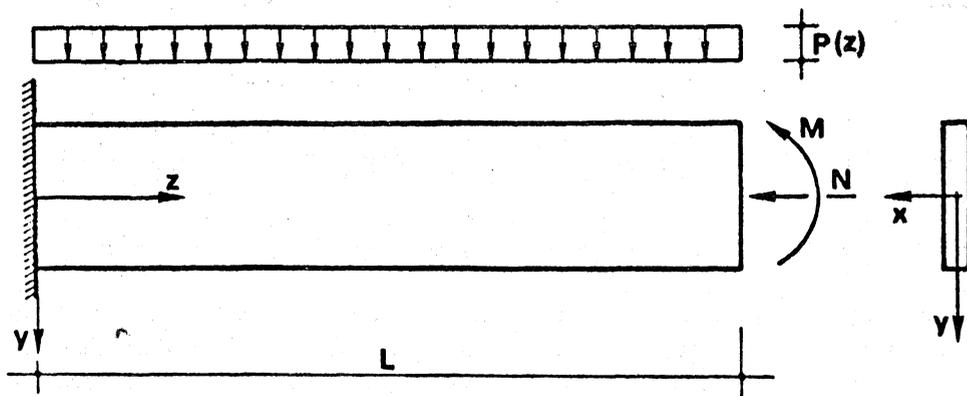


Fig. 2.

Le ipotesi iv) e v) assicurano l'esistenza di un funzionale energia potenziale totale della trave, che può essere espresso nella forma (fig. 2):

$$(2.5) \quad E = \frac{1}{2} C \int_0^l \tau^2 dz + \frac{1}{2} B_2 \int_0^l K_2^2 dz + \frac{1}{2} B_3 \int_0^l K_3^2 dz + \\ + N \int_0^l [(1 - u'^2 - v'^2)^{1/2} - 1] dz - M \left| -v' \cos \alpha + \right. \\ \left. + \sin \alpha \frac{u'}{(1 - v'^2)^{1/2}} \right|_0^l - \int_0^l p(z) v(z) dz - \int_0^l p(z) [\cos \alpha (1 - v'^2)^{1/2} - 1] y dz$$

essendo y la quota di applicazione del carico $p(z)$ nel piano (y, z) . Gli sviluppi analitici che conducono alla (2.5) sono illustrati in dettaglio in [4]. In particolare si osserva che l'ipotesi di sezione compatta induce a trascurare, come si è fatto, gli effetti di ingobbamento della sezione trasversale come anche gli effetti della torsione non lineare connessi con l'accorciamento delle fibre longitudinali della trave conseguenti alla torsione. Tuttavia tali effetti possono essere facilmente inclusi nel contesto del modello monodimensionale preso in esame, assumendo come legame tra momento torcente e curvatura torsionale una relazione del tipo:

$$(2.6) \quad M_1 = C\tau + C_1 \tau^3 - C_2 \tau''.$$

Tale approccio è seguito per esempio da Woolcock e Trahair in [2] e da Ascione e Olivito in [5].

3. COMPORAMENTO POST-CRITICO

Con riferimento alle condizioni di carico esaminate in fig. 2 si considerino le configurazioni di equilibrio della trave, definite dagli spostamenti $\mathbf{u}_0(\lambda)$ e corrispondenti a carichi che crescono proporzionalmente al parametro λ . Tenendo conto che x e y sono assi principali di inerzia della sezione trasversale, il ramo di equilibrio $\mathbf{u}_0(\lambda)$ è caratterizzato soltanto da spostamenti flessionali nel piano (y, z) , cioè $\mathbf{u}_0(\lambda) = (0, v_0(\lambda), 0)$. Si assume inoltre che, atteso il valore elevato della rigidezza flessionale B_2 nel piano (y, z) , tale ramo di equilibrio possa essere espresso come $\mathbf{u}_0(\lambda) = \lambda \mathbf{u}_0$. Incrementando il moltiplicatore dei carichi λ , la trave attinge lo stato critico dove si manifesta una biforcazione simmetrica del ramo di equilibrio fondamentale, caratterizzata da deformazioni flessio-torsionali. Il comportamento post-critico viene esaminato mediante il classico metodo perturbativo [6-7]. Caratterizzando a tal fine la curva di equilibrio diramato mediante le funzioni:

$$(3.1) \quad \mathbf{u}^* = \lambda \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}(\xi)$$

$$(3.2) \quad \lambda = \lambda(\xi)$$

con ξ parametro di spostamento generalizzato, per la simmetria della biforcazione il metodo perturbativo consente di scrivere:

$$(3.3) \quad \mathbf{u}^* = \lambda \mathbf{u}_0 + \xi \mathbf{u}_1 + \frac{\xi^2}{2} \mathbf{u}_2$$

$$(3.4) \quad \lambda = \lambda_c + \frac{\xi^2}{2} \lambda'' = \lambda_c (1 + \lambda_2 \xi^2)$$

dove λ_c e \mathbf{u}_1 sono rispettivamente il carico critico ed il corrispondente modo di instabilità, mentre \mathbf{u}_2 e λ'' caratterizzano la curva di equilibrio diramato. Indicando a questo punto con $E(\mathbf{u}, \lambda)$ l'incremento di energia potenziale totale corrispondente all'incremento di spostamento \mathbf{u} a partire dallo stato di equilibrio fondamentale:

$$(3.5) \quad E(\mathbf{u}, \lambda) = E(\mathbf{u}_0(\lambda) + \mathbf{u}, \lambda) - E(\mathbf{u}_0(\lambda), \lambda)$$

le quantità critiche λ_c e \mathbf{u}_1 , nonché le quantità del secondo ordine \mathbf{u}_2 e λ'' sono ottenibili mediante le classiche relazioni [6-7]:

i) Stato Critico

$$(3.6) \quad D^2 E(\mathbf{u}_0, \lambda_c; \mathbf{u}_1, \delta \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

ii) Stato Post-critico

$$(3.7) \quad D^2 E(\mathbf{u}_0, \lambda_c; \mathbf{u}_2, \delta \mathbf{u}) + D^3 E(\mathbf{u}_0, \lambda_c; \mathbf{u}_1^2, \delta \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

$$(3.8) \quad \lambda'' = - \frac{D^4 E(\mathbf{u}_0, \lambda_c; \mathbf{u}_1^4) - 3 D^2 E(\mathbf{u}_0, \lambda_c; \mathbf{u}_2^2)}{3 (\partial/\partial \lambda) D^2 E(\mathbf{u}_0, \lambda_c; \mathbf{u}_1^2)}$$

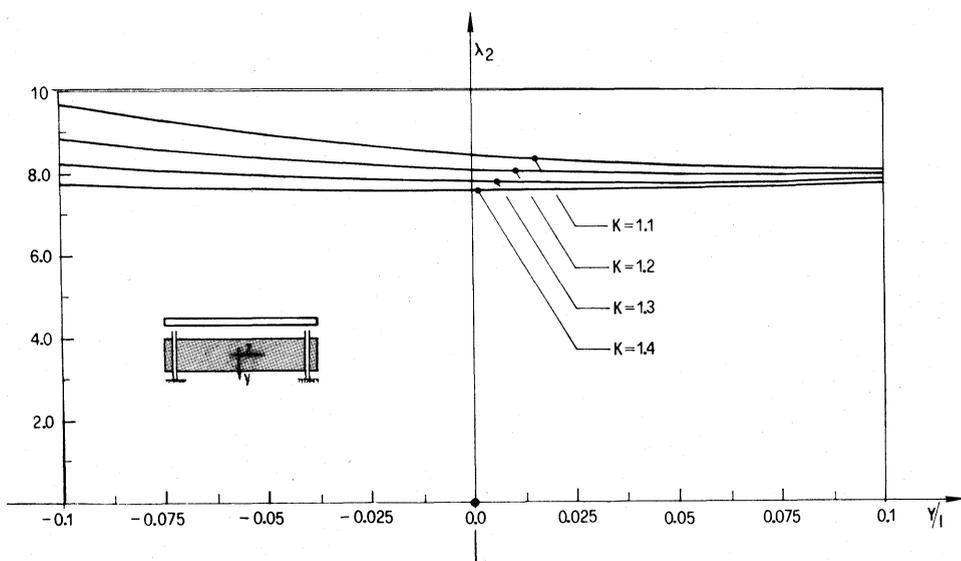


Fig. 3.

dove D^2 , D^3 e D^4 denotano rispettivamente le derivate deboli del funzionale $E(\mathbf{u}, \lambda)$ di ordine due, tre e quattro. Nell'ipotesi che la rigidità flessionale B_2 sia prevalente rispetto alle rigidità B_3 e C (come si deve d'altra parte ammettere se si suppone che l'instabilità flessione-torsionale si manifesti in campo elastico) è possibile dimostrare, sfruttando le (3.6) e (3.7), che il vettore critico \mathbf{u}_1 consta soltanto di uno spostamento trasversale u_c e di una

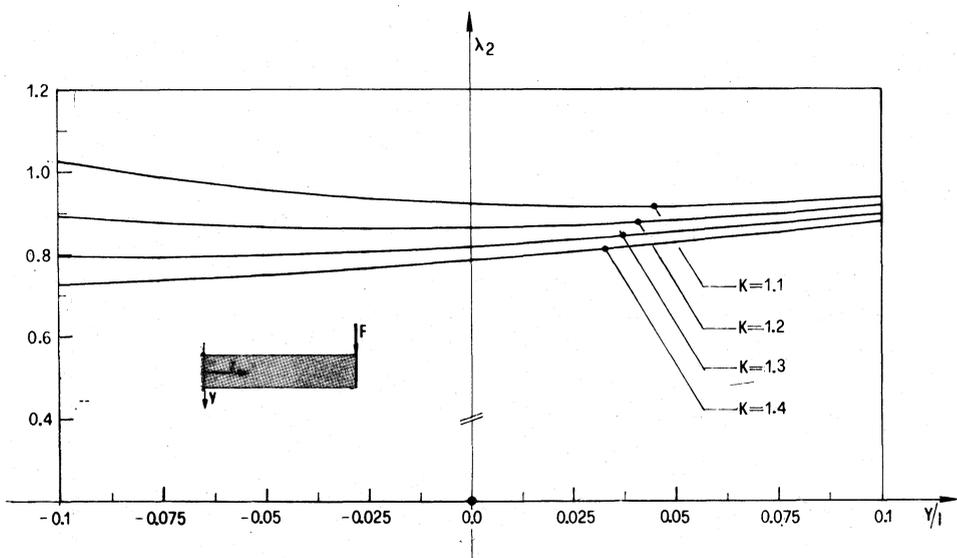


Fig. 4.

rotazione torsionale α_c , mentre il vettore del secondo ordine \mathbf{u}_2 consta soltanto di uno spostamento v nel piano (y, z) . Nei casi di trave semplicemente appoggiata e di trave a mensola, soggette a un carico distribuito $p(x)$ o ad un carico concentrato F , agente nella mezzeria della trave (schema appoggiato) o all'estremità libera (mensola), o ancora ad un carico assiale N eccentrico nel piano (y, z) , in [4] sono ricavate in dettaglio le espressioni delle funzioni u_c, α_c e v , nonché i valori del carico critico λ_c . Una volta che siano note tali quantità, a partire dalla (3.8) è possibile ricavare il valore del coefficiente λ'' o ciò che è lo stesso del coefficiente $\lambda_2 = \lambda''/2 \lambda_c$. Più precisamente, si ottiene per quest'ultimo un'espressione del tipo:

$$(3.9) \quad \lambda_2 = \frac{a_1 \lambda_c^2 K^2 + a_2 K^2 + a_3 (1/\lambda_c^2) + a_4}{a_5 \lambda_c^2 K^2 + a_6 K^2}$$

dove $K = \sqrt{C/B_3}$ e i coefficienti a_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) dipendono solo dalle condizioni di carico e di vincolo della trave. Sempre in [4], normalizzando l'autovettore critico \mathbf{u}_1 in modo che risulti $u_c(l/2) = l$ (trave appoggiata), ovvero $u_c(l) = l$ (trave a mensola) i coefficienti a_i sono tabellati per i vari casi e dal valore da essi presentato si può dedurre che il comportamento post-critico flessio-torsionale degli schemi esaminati è di tipo stabile e quasi neutro. In particolare le figg. 3-4 mostrano l'andamento di λ_2 in funzione del parametro adimensionale y/l (quota del carico rispetto all'asse della trave) per alcuni valori possibili di K ($1.1 \leq K \leq 1.4$) e per alcune condizioni di carico e di vincolo.

4. ANALISI SPERIMENTALE

Nel paragrafo precedente è stato esaminato il comportamento post-critico del modello perfetto. L'analisi sperimentale richiede invece lo studio del modello imperfetto. Rinviano ai lavori classici sull'argomento [6-7] per i dettagli analitici, si ricorderà che la curva di equilibrio di tale modello può essere approssimata, se l'imperfezione è piccola, nella forma:

$$(4.1) \quad \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} - 1 \right) \xi - \lambda_2 \xi^3 + \frac{\lambda}{\lambda_c} \varepsilon \beta = 0$$

dove il termine $\varepsilon \beta$ dipende appunto dall'imperfezione. In generale ε sarà somma di un termine ε_0 dovuto all'imperfezione intrinseca del modello e di un termine $\bar{\varepsilon}$ dovuto all'imperfezione aggiunta. Si può dimostrare [4] che sussiste la seguente relazione indipendente da ε_0 :

$$(4.2) \quad \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} - 1 \right) \bar{\xi} - \lambda_2 \bar{\xi}^3 + \frac{\lambda}{\lambda_c} \bar{\varepsilon} \beta = 0$$

nella quale $\bar{\xi}$ è la media aritmetica degli spostamenti adimensionali $\xi = u(l)/l$ presentati dal modello quando questo sia affetto dall'imperfezione $\bar{\varepsilon}$ e dall'imperfezione opposta $-\bar{\varepsilon}$. Con facili passaggi quindi dalla (4.2) si ottiene:

$$(4.3) \quad \frac{\lambda}{\lambda_c} \frac{\bar{\xi} + \bar{\varepsilon}\beta}{\bar{\xi}} = 1 + \lambda_2 \bar{\xi}^2$$

ovvero, ponendo:

$$(4.4) \quad x = \bar{\xi}^2, \quad y = \frac{\lambda}{\lambda_c} \frac{\bar{\xi} + \bar{\varepsilon}\beta}{\bar{\xi}}$$

$$(4.5) \quad y = 1 + \lambda_2 x.$$

La (4.5) è l'equazione di una retta con coefficiente angolare λ_2 , il che suggerisce la possibilità di valutare sperimentalmente tale coefficiente come pendenza di una retta, analogamente cioè a quanto avviene per la determinazione

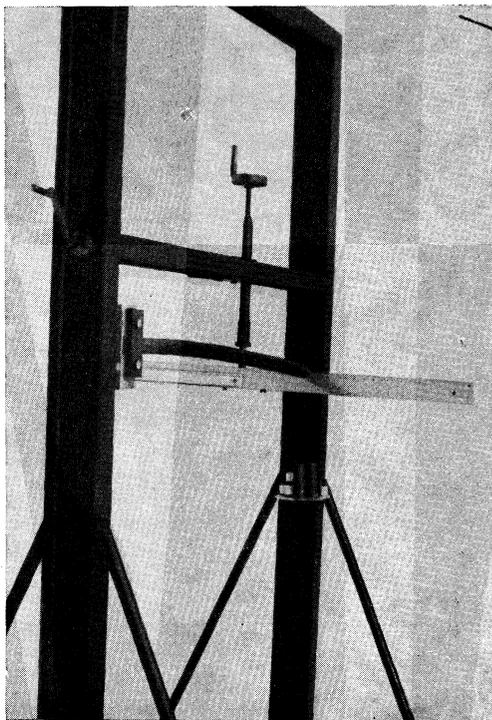


Fig. 5.

del carico critico con la tecnica di Squthwell [4-8]. Le figg. 5-6-7-8-9 mostrano l'apparecchiatura utilizzata ed alcuni risultati sperimentali, così ottenuti, per due modelli di mensola in acciaio armonico, caricati rispettivamente da una forza concentrata trasversale e da una forza assiale eccentrica. L'imperfezione consiste in tal caso in una piccola eccentricità laterale del carico (figg. 6-7). In particolare nelle figg. 6-7 le linee a tratto continuo sono le curve teoriche.

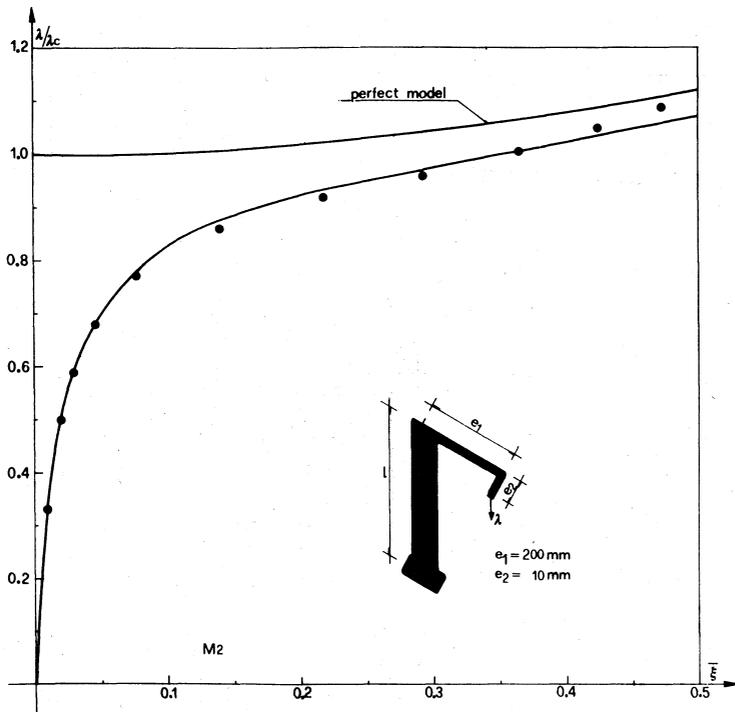


Fig. 6.

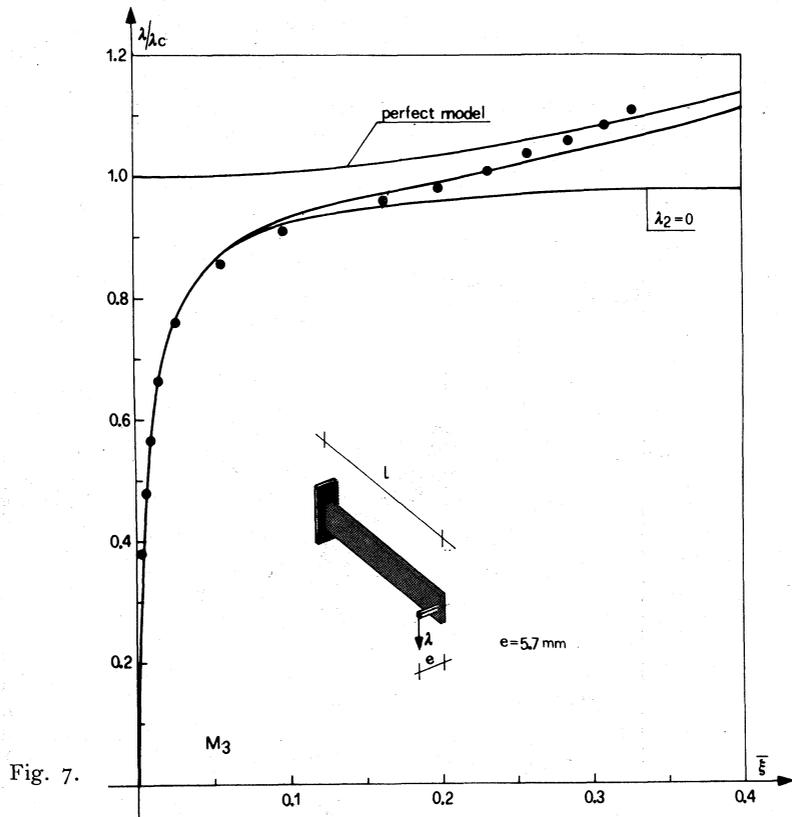


Fig. 7.

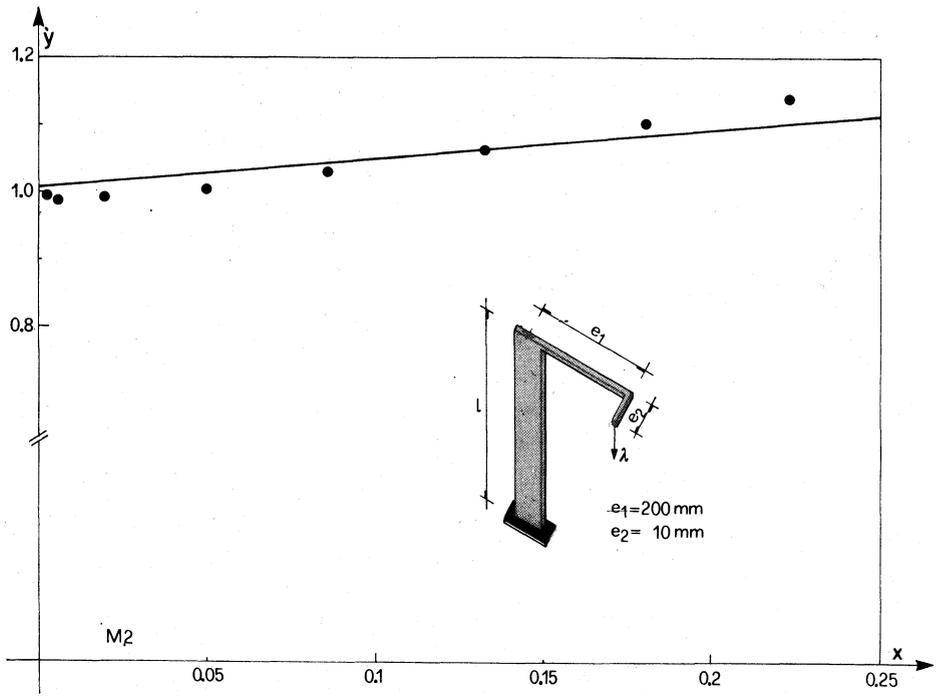


Fig. 8.

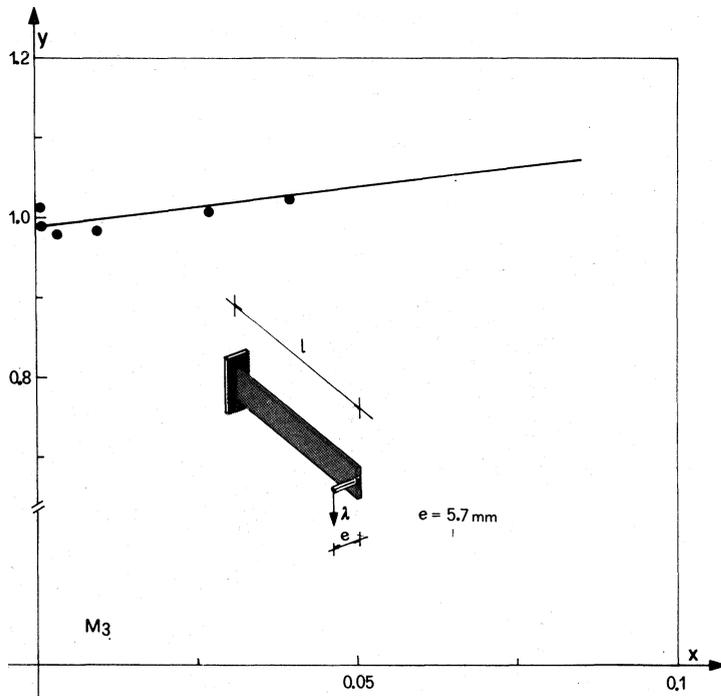


Fig. 9.

TABELLA I.

	l (mm)	d (mm)	t (mm)	E (Kg mm ⁻²)	ν	e_1 (mm)	e_2 (mm)	e (mm)	$\lambda_c^{(s)}$ (Kg)
M ₂	400	30	1	2.1×10^4	0.333	200	10	—	0.607
M ₃	500	30	1	2.1×10^4	0.333	—	—	5.7	1.049

TABELLA II.

	λ_2 (teorico)	λ_2 (sperim.)
M ₂	0.449	0.492
M ₃	0.853	0.771

Le caratteristiche dei modelli sono indicate in Tabella I: entrambi i modelli hanno sezione rettangolare di altezza d e spessore t e presentano una luce che viene denotata con l ; con E e ν si denotano invece il modulo di Young e il coefficiente di Poisson, mentre con $\lambda_c^{(s)}$ si denota il carico critico sperimentale, determinato col metodo di Southwell. Nella Tabella II infine si riportano i valori teorici del coefficiente λ_2 e quelli ottenuti per via sperimentale.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. ZAMOST and E. R. JOHNSTON Jr. (1971) - *Post Lateral Buckling Behaviour of Beams*. « J. Eng. Mec. Div. ASCE », 92, No. EM4, 1133-1143.
- [2] S. T. WOOLCOCK and N. S. TRAHAIR (1974) - *Post-Buckling Behaviour of Beams*. « J. Eng. Mec. Div. ASCE », 100, No. EM2, 151-171.
- [3] A. E. H. LOVE (1944) - *A Treatise On the Mathematical Theory of Elasticity*. 4th ed., Dover Publications, Inc., New York, N. Y.
- [4] L. ASCIONE and A. GRIMALDI (1979) - *Stability and Post-Buckling of Elastic Beams*. Part 1-2-3, Rep. No. 13-14-19, Dept. of Structures, Univ. of Calabria.
- [5] L. ASCIONE and R. S. OLIVITO (1979) - *Post-Buckling Behaviour of an Elastic Cantilever Beam Axially Loaded*. Rep. No. 20, Dept. of Structures, Univ. of Calabria.
- [6] W. T. KOITER (1967a-1970b) - *On the Stability of Elastic Equilibrium*. Thesis, Delft Univ. H. J. Paris, Amsterdam, English transl., (a) NASA TT-F10, 833; (b) AFFDLTR-70-25 (1945).
- [7] B. BUDIANSKY (1974) - *Buckling Behavior of Elastic Structures*. « Advan. Appl. Mech. », 14, 1-65.
- [8] R. V. SOUTHWELL (1932) - *On the Analysis of Experimental Observations in Problems of Elastic Stability*. « Proceeding of the Royal Society of London, England », 135.