Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuliana Lauro, Pasquale Renno

Sul principio di Huyghens in un plasma «freddo»

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **66** (1979), n.6, p. 533–539.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_6_533_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

Fisica matematica. — *Sul principio di Huyghens in un plasma «freddo»* (*). Nota di GIULIANA LAURO e PASQUALE RENNO, presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — We examine the generalized Huyghens principle for a cold plasma model. More exactly, we consider the threedimensional wave propagation of an electromagnetic field caused by an initial disturbance in a cold plasma wich fills all of space. The solution of the Cauchy problem allows us also to assert that initially sharp signals are blurred by the diffusion of waves.

1. Indichiamo con $\mathfrak{G}$ un gas ionizzato omogeneo che occupa l'intero spazio e con $[\mathbf{E}(x, t), \mathbf{H}(x, t)]$ un campo elettromagnetico definito in ogni punto dell'insieme $Q \equiv R^3 \times \{t : t \geq 0\}$.

L'analisi della propagazione ondosa tridimensionale che si determina in $\mathfrak{G}$ per effetto di prefissate condizioni iniziali, si riduce (N. 2) allo studio del seguente problema di Cauchy:

$$L[\mathbf{E}] \equiv \Delta \mathbf{E} - \mathbf{E}_{tt} - b\mathbf{E} + ab \int_0^t \exp[-a(t-\tau)] \, \mathbf{E}(x, \tau) \, d\tau = 0 \tag{1.1}$$

$$\mathbf{E}(x, 0) = \varphi(x) \quad , \quad \mathbf{E}_t(x, 0) = \psi(x) , \tag{1.2}$$

con a e b costanti positive e dove Δ indica l'operatore di Laplace in R^3.

Numerosi problemi relativi all'equazione (1.1) sono stati finora analizzati (1), ma soprattutto nell'ambito di schemi unidimensionali. Ovviamente, i risultati così trovati non consentono però la valutazione di quei fenomeni che sono tipici della propagazione tridimensionale; basti pensare, ad esempio, alle modifiche che subisce il classico principio di Huyghens nel caso del plasma in esame.

Com'è ben noto ([1], [2]), quando le onde elettromagnetiche si propagano nel vuoto ($a = 0$, $b = 0$), il suddetto principio di Huyghens in forma forte assicura la perfetta trasmissione del segnale. Inoltre, se il disturbo iniziale è «localizzato», il campo $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ risulta a supporto compatto. Nel caso in esame è invece presumibile un fenomeno di diffusione che si sovrappone alle onde sferiche nella propagazione del disturbo. Ci è sembrato perciò interessante – in seguito ad un suggerimento del prof. D. Graffi – affrontare in questa Nota la risoluzione del problema (1.1)–(1.2), al fine di stabilire anche una valuta-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.F.M. del C.N.R.
(**) Nella seduta del 14 giugno 1979.
(1) Cfr. ad esempio [4], [5], [6], [8] e le bibliografie ivi citate.

zione dei « termini di diffusione ». A tale scopo, indicando con $\Gamma(\boldsymbol{y}, \rho)$ $(\boldsymbol{y} \in R^3, 0 < \rho < \infty)$ la sfera di centro $\boldsymbol{y}$ e raggio ρ, dimostriamo (N. 3) il

TEOREMA 1.1 *Se i dati iniziali φ e ψ verificano le ipotesi*

$$(\varphi, \psi) \in C^3(R^3) \times C^2(R^3), \tag{1.i}$$

il problema (1.1)-(1.2) *ammette una ed una sola soluzione di classe* $C^2(Q)$, *data da*

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{x}, t) = t\mathbf{M}_\psi(\boldsymbol{x}, t) - \int_0^t f(r, t)\, r\mathbf{M}_\psi(\boldsymbol{x}, r)\, dr + \tag{1.3}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}\left[t\mathbf{M}_\varphi(\boldsymbol{x}, t) - \int_0^t f(r, t)\, r\mathbf{M}_\varphi(\boldsymbol{x}, r)\, dr\right],$$

dove $f(r, t)$ è una funzione che verrà definita al N. 3, *mentre $\mathbf{M}_\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ indica la media sferica di φ su $\partial\Gamma(\boldsymbol{x}, t)$.*

In base alla formula risolutiva (1.3), si osserva quindi che la trasmissione del segnale nel plasma in esame risulta dalla sovrapposizione del campo

$$\mathbf{E}_1 = t\mathbf{M}_\psi(\boldsymbol{x}, t) + \frac{\partial}{\partial t}[t\mathbf{M}_\varphi(\boldsymbol{x}, t)], \tag{1.4}$$

che si propaga per onde sferiche, e di un campo $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E} - \mathbf{E}_1$ che ne provoca la distorsione (cfr. [1], pp. 735-766). Quando il disturbo iniziale è « localizzato » nella sfera $\Gamma(\boldsymbol{x}_0, \rho)$ - per ogni fissato punto $\boldsymbol{x}$ - si ha ovviamente

$$\mathbf{E}_1(\boldsymbol{x}, t) \equiv 0 \qquad \forall t > t_* = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| + \rho,$$

mentre $\mathbf{E}_2(\boldsymbol{x}, t)$ è diverso da zero in ogni istante. Ciò dimostra, com'è noto, la presenza di un fenomeno di diffusione in $\mathfrak{G}$.

Osserviamo infine che la soluzione fondamentale dell'operatore L è una distribuzione che dipende dal nucleo f che interviene nella (1.3). Pertanto la determinazione esplicita di f (N. 3) consente di risolvere, mediante il principio di Duhamel, anche il problema di Cauchy per l'equazione non omogenea

$$L[\mathbf{E}] = \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_i(\boldsymbol{x}, t), \tag{1.5}$$

che descrive la propagazione del campo elettromagnetico generato nel plasma dalle correnti impresse $\mathbf{J}_i$.

Desideriamo ringraziare il prof. D. Graffi per tutti i consigli ricevuti.

2. Consideriamo un gas ionizzato $\mathfrak{G}$, omogeneo ed isotropo, che occupa l'intero spazio e nel quale si propaga un campo elettromagnetico indotto da prefissati disturbi iniziali.

Con riferimento al generico punto (P, t) dell'insieme Q, indichiamo con $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{J}$, rispettivamente, i vettori campo elettrico, campo magnetico e densità di corrente; siano poi μ ed ε, nell'ordine, la permeabilità magnetica e la costante dielettrica nel vuoto. Nell'ipotesi che su $\mathfrak{G}$ non agisca alcun campo impresso, le equazioni di Maxwell sono quindi:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} . \tag{2.1}$$

Le proprietà di $\mathfrak{G}$, com'è ben noto ([4]), possono rappresentarsi anche mediante relazioni di ereditarietà lineare. Più precisamente, per un plasma cosiddetto « freddo » ([3]), la relazione tra $\mathbf{E}$ e $\mathbf{J}$ è:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mathrm{N}e^2}{m} \int_0^t \exp\left[-\nu(t-\tau)\right] \mathbf{E}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau , \tag{2.2}$$

dove N, e, m sono rispettivamente il numero di elettroni per unità di volume, la carica e la massa dell'elettrone, mentre ν è una costante positiva che esprime la frequenza d'urto di un elettrone.

Rileviamo esplicitamente che il campo $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, inizialmente diverso da zero, per continuità deve risultare tale anche per $t < 0$. A rigore, pertanto, il limite inferiore dell'integrale che definisce $\mathbf{J}$ dovrebbe essere $-\infty$ (oppure $-t_0$ se le sorgenti del campo hanno agito nell'intervallo $[-t_0, 0]$). Noi riterremo però trascurabile il termine

$$\mathbf{J}^* = \frac{\mathrm{N}e^2}{m} \exp(-\nu t) \int_{-t_0}^{0} \exp(\nu\tau)\, \mathbf{E}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau ,$$

osservando che, per ogni $t > 0$, $\mathbf{J}^*$ risulta, a differenza di $\mathbf{J}$, infinitesimo di ordine infinitamente grande rispetto a ν^{-1} (2). D'altra parte, volendo evitare tale approssimazione, in base all'osservazione fatta alla fine del N. 1, basta considerare $\mathbf{J}^*$ come una corrente impressa e risolvere il problema di Cauchy per l'equazione non omogena (1.5).

Assumiamo inoltre che il plasma sia inizialmente neutro ($\operatorname{div} \mathbf{E}(\boldsymbol{x}, 0) = 0$), ammettendo che in $\mathfrak{G}$ siano presenti ioni positivi (di cui trascureremo, per la loro massa, il contributo a $\mathbf{J}$) con carica uguale e contraria a $\mathrm{N}e$. Tale ipotesi implica che il plasma è neutro in ogni altro istante $t > 0$. Infatti, quando si applica l'operatore divergenza ai due membri della $(2.1)_1$ e si tiene conto della (2.2), si ricava l'equazione

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{\mathrm{N}e^2}{m} \int_0^t \exp\left[-\nu(t-\tau)\right] \operatorname{div} \mathbf{E}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau = 0 \tag{2.3}$$

(2) Basti pensare, ad esempio, che nello strato D della ionosfera (altezza 50–85 km) ν è compreso tra $10^{7,3}$ e 10^6 sec^{-1}. Nello strato E, ad un'altezza di circa 100 km, è invece $\nu \simeq 9{,}2 \cdot 10^4$ sec^{-1}.

nell'incognita div $\mathbf{E}$. Basta ora osservare che la (2.3), con la condizione iniziale omogenea, ammette la sola soluzione nulla. Pertanto, quando eliminiamo $\mathbf{H}$ e $\mathbf{J}$ nelle (2.1)–(2.2), si perviene all'equazione (1.1) in cui si è posto $a = \nu$, $b = \mathrm{N}e^2/m\varepsilon$ [3]. Infine, indicando con $[\mathbf{E}_0(\boldsymbol{x}), \mathbf{H}_0(\boldsymbol{x})]$ la determinazione iniziale del campo $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ e ponendo

$$\mathbf{E}_0(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) \quad , \quad \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}) ,$$

si ricavano le (1.2).

3. Per risolvere il problema enunciato al N. 1, cominciamo con l'osservare che, in base al principio di sovrapposizione, è sufficiente calcolare la soluzione delle (1.1)–(1.2) nel caso $\varphi = 0$. Infatti, come è noto ([1]), la soluzione completa risulta poi dalla somma dell'espressione così trovata con quella che si ottiene da essa scambiando ψ con φ e derivando rispetto al tempo.

Indichiamo pertanto con $\mathbf{E}'$ la soluzione delle (1.1)–(1.2) quando $\varphi = 0$; la sua determinazione formale si può effettuare mediante l'applicazione della trasformazione multipla di Fourier rispetto a $\boldsymbol{x}$ e della trasformazione di Laplace rispetto a t. Si ricava in tal modo

$$\mathbf{E}'(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) - \int_0^t f(r, t)\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, r)\, \mathrm{d}r , \tag{3.1}$$

dove $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ rappresenta la soluzione del problema

$$\Delta \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{tt} = 0 \qquad \forall (\boldsymbol{x}, t) \in \mathrm{Q} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = 0 \quad , \quad \boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{x}, 0) = \psi(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^3 , \tag{3.3}$$

mentre la funzione $f(r, t)$ è così definita:

$$f(r, t) = (\omega/2)(t - r)^{-1} \mathrm{J}_1(\omega) \exp[-a(t - r)] - \\ - (br/2) \int_r^t (z^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{J}_1(\xi)\, \mathrm{J}_1(\eta) \exp[-a(t - z)]\, \mathrm{d}z , \tag{3.4}$$

con

$$\omega = [2\, br(t - r)]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \xi = [b(t - z)(z + r)]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \eta = [b(t - z)(z - r)]^{\frac{1}{2}} , \tag{3.5}$$

dove J_1 è la funzione di Bessel di prima specie.

(3) L'equazione (1.1) è stata scritta assumento $\mu\varepsilon = 1$. A tale caso ci si può sempre ridurre, com'è ovvio, ponendo $x_i' = (\mu\varepsilon)^{\frac{1}{2}} x_i$.

Per superare il carattere formale del procedimento seguito nella ricerca di $\mathbf{E}'$, dimostriamo il seguente:

TEOREMA 3.1 *Se* $\psi(\boldsymbol{x}) \in C^2(R^3)$, *la funzione* $\mathbf{E}'$ *definita dalla* (3.1) *costituisce l'unica soluzione di classe* $C^2(Q)$ *del problema* (1.1)–(1.2) (*con* $\varphi = 0$).

Dimostrazione. Il nucleo $f(r, t)$ dell'integrale a secondo membro della (3.1) è una funzione definita nell'insieme

$$\Omega \equiv \{(r, t) : 0 \leq r \leq t , 0 \leq t \leq T\} \qquad \text{(con } T > 0 \text{ arbitrario)}$$

ed è ivi di classe C^∞. La sua determinazione è stata effettuata in [8] a partire dalla relazione simbolica

$$(3.6) \qquad \int_r^\infty \exp(-st) f(r, t)\, dt = \exp(-rs) - \exp(-r\sigma) \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0),$$

con σ determinazione principale del radicale $[s^2 + bs/(s+a)]^{\frac{1}{2}}$. Tale funzione definisce inoltre una soluzione regolare in $\Omega - \partial\Omega$ dell'equazione (4)

$$(3.7) \qquad f_{rr} = f_{tt} + bf - ab \int_r^t \exp[-a(t-\tau)] f(r, \tau)\, d\tau + ab \exp[-a(t-r)]$$

e verifica le seguenti condizioni

$$(3.8) \qquad f(0, t) = 0 \quad , \quad f(t, t) = bt/2 ,$$

$$(3.9) \qquad (f_r + f_t)_{r=t} = b/2 \quad , \quad f_t(t, t) = -(ba/2)\, t - (b^2/8)\, t^2 .$$

Poniamo

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \int_0^t f(r, t)\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, r)\, dr$$

osservando che, in virtù dell'ipotesi fatta su ψ, risulta $\boldsymbol{v} \in C^2(R^3 \times [0, T)]$.

(4) Si osservi che l'equazione che si ricava dalla (1.1) nel caso unidimensionale ($\mathbf{E} = \mathbf{E}(r, t)$, $\Delta\mathbf{E} = \mathbf{E}_{rr}$, $L = L_1$) differisce dalla (3.7) a causa del termine $ab \exp[-a(t-r)]$ e del limite inferiore (r e non 0) dell'integrale. Ciò – come risulta anche dalla relazione simbolica (3.6) – deriva dal fatto che la soluzione fondamentale dell'operatore L_1 non è f ma la distribuzione $f^*(r, t) = \delta(t-r) - f(r, t)\, \eta(t-r)$, dove δ è la misura di Dirac ed η la funzione unitaria. Per ogni $t > r$ si ha

$$\int_0^t \exp[-a(t-\tau)] f^*(r, \tau)\, d\tau = \exp[-a(t-r)] - \int_r^t \exp[-a(t-\tau)] f(r, \tau)\, d\tau$$

mentre è, ovviamente, $f^* = -f$. Di conseguenza, in ogni punto di $\Omega - \partial\Omega$, l'equazione $L_1[f^*] = 0$ coincide con la (3.7). In proposito, ricordiamo poi che la non validità del principio di Huyghens in forma forte si rileva anche dalla presenza della funzione ordinaria $f(r, t)$ nell'espressione di f^*. (Cfr. [1], p. 743 e [2], p. 336).

Pertanto, tenendo presente le (3.2)–(3.3)–(3.8) ed integrando per parti, si ha

$$(3.10) \quad \Delta \boldsymbol{v} = f(t\,,t)\,\boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{x}\,,t) - f_r(t\,,t)\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}\,,t) + \int_0^t f_{rr}(r\,,t)\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}\,,r)\,\mathrm{d}r\,.$$

Calcoliamo ora $(\Delta - \mathrm{L})\,[\boldsymbol{v}]$ ricordando che $f(r\,,t)$ risolve la (3.7). Indicando con $*$ il prodotto di convoluzione rispetto a t, in base anche alla $(3.8)_2$, si ottiene:

$$(3.11) \quad \begin{aligned}(\Delta - \mathrm{L})\,[\boldsymbol{v}] &= \boldsymbol{v}_{tt} + b\boldsymbol{v} - ab\boldsymbol{v} * \exp(-at) = \\ &= f(t\,,t)\,\boldsymbol{u}_t(\boldsymbol{x}\,,t) + [f_t(t\,,t) + b/2]\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}\,,t) + \\ &+ \int_0^t f_{rr}(r\,,t)\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}\,,r)\,\mathrm{d}r - ab\,\boldsymbol{u} * \exp(-at)\,.\end{aligned}$$

Basta ora sottrarre membro a membro le (3.10)–(3.11) ed applicare la $(3.9)_1$ per avere

$$\mathrm{L}\,[\boldsymbol{v}] = -b\boldsymbol{u} + ab\boldsymbol{u} * \exp(-at) = \mathrm{L}\,[\boldsymbol{u}]\,.$$

Mediante le $(3.8)_2$–(3.3) è facile poi verificare che $\mathbf{E}'$ soddisfa anche le condizioni iniziali (1.2) (con $\boldsymbol{\varphi} = 0$).

L'unicità di tale soluzione segue da noti teoremi di D. Graffi e M. Fabrizio ([3], [4], [7]).

OSSERVAZIONE 3.1. Consideriamo ora il caso $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$. Con riferimento al punto $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^3$ ed alla funzione $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{C}^0(\mathrm{R}^3)$, indichiamo con $\mathbf{M}_w(\boldsymbol{x}\,,r)$ la media sferica di $\boldsymbol{w}$ valutata sulla superficie della sfera S che ha centro in $\boldsymbol{x}$ e raggio r:

$$(3.12) \quad \mathbf{M}_w(\boldsymbol{x}\,,r) = (4\,\pi\,r^2)^{-1} \int_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=r} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{dS}_y\,.$$

Com'è ben noto ([1]), risulta

$$(3.13) \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}\,,t) = t\mathbf{M}_\psi(\boldsymbol{x}\,,t)\,,$$

per cui, applicando il principio di sovrapposizione così com'è stato precisato all'inizio di questo numero, si verifica facilmente che la funzione definita dalla (1.3) è – nelle ipotesi (1.i) – l'unica soluzione regolare del problema posto.

Tale osservazione completa la dimostrazione del Teorema 1.1.

4. Mediante la formula risolutiva (1.3) è possibile stabilire la dipendenza che esiste tra le proprietà del campo $(\mathbf{E}\,,\mathbf{H})$ e quelle dei suoi valori iniziali (« focussing effect », propagazione delle eventuali discontinuità iniziali, etc.). Così ad esempio, quando i dati iniziali sono a supporto compatto, la (1.3) consente di affermare – anche in base alla regolarità del nucleo f in Ω – che

il campo (**E**, **H**) si mantiene limitato in ogni intervallo finito di tempo. Naturalmente, al crescere di t, si pone il problema del comportamento asintotico; un tale studio richiede però un'opportuna analisi delle proprietà di f. Di questa applicazione ci occuperemo in una Nota successiva.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. COURANT e D. HILBERT (1962) – *Methods of Mathematical Phisics*, Vol. II. New-York Interscience Publishers.

[2] Z. SZMYDT (1977) – *Fourier transformation and linear differential equations*, « D. Reidel Publ. Comp. », Warszwa.

[3] D. GRAFFI (1978) – *Corso C.I.S.M. Non linear problems in Mathematical Physics* – Udine 5-13 ottobre.

[4] D. GRAFFI (1936) – *Sopra alcuni fenomeni ereditari dell'elettrologia*, « Rend. Ist. Lombardo » (2), *69*.

[5] M. MARZIANI (1953) – *Sull'applicazione del calcolo simbolico alle equazioni di propagazione in tre dimensioni*, « Ann. Univ. di Ferrara », Sez. VII, Vol. II, N. 9, 111–116.

[6] D. GRAFFI, (1963) – *Sulla propagazione nei mezzi dispersivi*, « Ann. Mat. Pura e Appl. », Serie IV, *60*, 173–196.

[7] M. FABRIZIO (1969) – *Sui teoremi di unicità e di reciprocità nella teoria di un plasma « caldo »*, « Boll. U.M.I. » (4), N. 4–5, 542–553.

[8] G. LAURO e P. RENNO (1979) – *Comportamento asintotico del campo elettromagnetico nei gas ionizzati*, « Boll. U.M.I. » (5), *16–B*, 314–329.