
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

PAOLO BOCCOTTI

**L'indeterminazione della probabilità degli intervalli
tra gli zeri di funzioni aleatorie del tempo**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 66 (1979), n.5, p. 402–409.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_5_402_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Oceanografia. — *L'indeterminazione della probabilità degli intervalli tra gli zeri di funzioni aleatorie del tempo*^(*). Nota di PAOLO BOCCOTTI^(**), presentata^(***) dai Corrisp. B. DE FINETTI e E. MARCHI.

SUMMARY. — The indetermination concept for distributions of intervals between zeros of random functions is introduced.

1. Rice [1] nel 1945 diede un'impostazione differenziale al problema della distribuzione degli intervalli tra gli zeri di una funzione aleatoria del tempo $\zeta(t)$, dalla quale fu possibile ricavare una espressione per la serie $S(T)$

$$(1.1) \quad S(T) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(T)$$

delle funzioni densità di probabilità $p_i(T)$ degli intervalli T tra $i+2$ zeri successivi di ζ ⁽¹⁾. Recentemente chi scrive [2] è pervenuto ad una diversa espressione per la serie $S(T)$ partendo da una nuova impostazione differenziale.

In questa Nota si dimostra come le serie $S(T)$ siano in generale indeterminate e comprese tra due estremanti, rappresentate dalla soluzione di Rice e da quella ricavata in [2] (ciò che implica l'indeterminazione anche per le funzioni $p_i(T)$). In particolare il concetto di indeterminazione viene sviluppato per un processo aleatorio di tipo gaussiano.

2. La probabilità $p_i(T) dT$ dell'intervallo T tra $i+2$ zeri consecutivi della funzione aleatoria $\zeta(t)$ ⁽²⁾, è definita come probabilità che realizzandosi uno zero ad un istante t , l' $i+1$ esimo zero di ζ successivo a quello di t si verifichi nell'intorno infinitesimo dT dell'istante $t+T$.

La probabilità $\mathcal{P}(T) dT$ che realizzandosi uno zero di ζ ad un istante t se ne realizzi uno nell'intorno infinitesimo dT di $t+T$, risulta legata alle $p_i(T)$ dalla relazione

$$(2.1) \quad \mathcal{P}(T) dT = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(T) dT$$

ovvero per la simbologia (1.1) $\mathcal{P}(T)$ coincide con $S(T)$.

(*) Ricerca eseguita presso l'Istituto di Idraulica dell'Università di Genova.

(**) Dott. Ing. Paolo Boccotti, borsista C.N.R. presso l'Istituto di Idraulica dell'Università di Genova, via Montallegro 1 - 16145 Genova.

(***) Nella seduta del 12 maggio 1979.

(1) La prima formulazione in termini di serie di funzioni $p_i(T)$ è dovuta a McFadden [3].

(2) Si considerano funzioni $\zeta(t)$ continuamente derivabili in $(0, \infty)$.

La probabilità che ad un istante t si realizzi un valore di ζ identicamente uguale a zero è nulla e di conseguenza la $\mathcal{P}(T) dT$ risulta *a priori* indeterminata e deve essere ricavata mediante un'operazione di limite. Tale operazione si deve sviluppare su un dominio bidimensionale. Si può infatti tendere alla condizione di uno zero all'istante t sia imponendo che si realizzi un valore zero di ζ in un intorno infinitesimo $d\zeta$ di ζ , sia imponendo che per tale istante il valore di ζ risulti compreso in un intorno infinitesimo $d\zeta$ dello zero. Alla prima impostazione corrisponde la relazione differenziale stabilita in [1], alla seconda quella stabilita in [2].

Si adotta la simbologia della Nota [2] dove si scrive ζ_t anzichè $\zeta(t)$ e dove la sopralineatura delle variabili indica che se ne considera il valore zero ed il punto opposto ad un simbolo di funzione ne indica la derivata rispetto al tempo. Si considera la densità di probabilità congiunta delle variabili ζ_t , ζ_{t+T} , $\bar{\zeta}_t$, $\bar{\zeta}_{t+T}$: essa è espressa dal simbolo $p(\zeta_t, \zeta_{t+T}, \bar{\zeta}_t, \bar{\zeta}_{t+T})$ e con analoga simbologia vengono indicate le funzioni di probabilità congiunta di qualsiasi gruppo delle quattro predette variabili.

La relazione stabilita in [1] può essere generalizzata nella forma

$$(2.2) \quad \mathcal{P}(T) dT = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\bar{\zeta}_t, \bar{\zeta}_{t+T}, \zeta_{t+T}, \zeta_t) (|\dot{\zeta}_t| d\zeta_t) (|\dot{\zeta}_{t+T}| dT) d\zeta_{t+T} d\zeta_t / \int_{-\infty}^{+\infty} p(\bar{\zeta}_t, \bar{\zeta}_t) (|\dot{\zeta}_t|) d\zeta_t.$$

Gli infinitesimi relativi alle quattro variabili aleatorie vengono precisati, qui come in seguito, nell'ordine con cui esse compaiono nell'argomento della funzione. Se tali infinitesimi sono espressi dal prodotto di più termini questi vengono compresi in parentesi tonda.

La relazione stabilita da chi scrive in [2] risulta

$$(2.3) \quad \mathcal{P}(T) dT = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\bar{\zeta}_t, \bar{\zeta}_{t+T}, \zeta_{t+T}) d\zeta_t (|\dot{\zeta}_{t+T}| dT) d\zeta_{t+T} / p(\bar{\zeta}_t) d\zeta_t.$$

Una volta eliminati i termini infinitesimi uguali a secondo membro dividendo numeratore e denominatore per $d\zeta_t$ nella (2.2) e per $d\zeta_t$ nella (2.3), si ottengono altrettante forme esatte per la desiderata $\mathcal{P}(T) dT$.

Più generalmente si può tendere alla condizione di uno zero all'istante t imponendo che si realizzi un valore zero di ζ in un intorno infinitesimo $d\zeta$ di ζ ed insieme che ζ_t sia compresa in un intorno dello zero $d\zeta_t = A d\zeta$, con A arbitrario-positivo. Si ottiene una nuova relazione differenziale quando si osserva che, per soddisfare entrambe le condizioni, se $|\dot{\zeta}_t|$ è minore di A è sufficiente si realizzi un valore zero di ζ nell'intorno $d\zeta$, viceversa se $|\dot{\zeta}_t|$

è maggiore di A basta che ζ_t sia compreso nell'intorno $d\zeta_t$:

$$(2.4) \quad \mathcal{P}(T) dT = \left[\int_0^A \int_{-\infty}^{+\infty} p(\bar{\zeta}_t, \bar{\zeta}_{t+T}, \dot{\zeta}_{t+T}, \dot{\zeta}_t) (\dot{\zeta}_t dt) (|\dot{\zeta}_{t+T}| dT) d\dot{\zeta}_{t+T} d\dot{\zeta}_t + \right. \\ \left. + \int_A^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\bar{\zeta}_t, \bar{\zeta}_{t+T}, \dot{\zeta}_{t+T}, \dot{\zeta}_t) (Adt) (|\dot{\zeta}_{t+T}| dT) d\dot{\zeta}_{t+T} d\dot{\zeta}_t \right] / \\ / \left[\int_0^A p(\bar{\zeta}_t, \dot{\zeta}_t) (\dot{\zeta}_t dt) d\dot{\zeta}_t + \int_A^{+\infty} p(\bar{\zeta}_t, \dot{\zeta}_t) (Adt) d\dot{\zeta}_t \right].$$

Per semplicità l'espressione (2.4) viene scritta per le condizioni in cui la $\mathcal{P}(T)$ sia la stessa quando si consideri la realizzazione di uno zero di ζ in t con derivata $\dot{\zeta}$ positiva: (0_+), o quando tale realizzazione si accompagni ad un valore negativo della derivata: (0_-). Tale condizione di simmetria è soddisfatta, ad esempio, in un processo di tipo gaussiano per il quale la relazione differenziale (2.4) viene sviluppata nel paragrafo seguente.

Dividendo numeratore e denominatore a secondo membro della (2.4) per dt , si ottiene una relazione per la $\mathcal{P}(T) dT$ di portata più generale delle precedenti. In particolare quando il fattore A tende a zero tale relazione si riduce alla (2.3) e quando A tende ad infinito essa si riduce alla (2.2).

3. Le funzioni densità di probabilità che compaiono nelle relazioni (2.2), (2.3) e (2.4), per un processo di tipo gaussiano (si fa riferimento, per semplicità, a quello illustrato nella Nota [2]) risultano individuate dalla matrice di covarianza (3.1), di seguito riportata, e dai valori medi tutti uguali a zero delle quattro variabili considerate. Alcune delle predette funzioni vengono esplicitate in [1], le altre in [2]. La matrice di covarianza delle variabili nell'ordine $\zeta_t, \dot{\zeta}_t, \zeta_{t+T}, \dot{\zeta}_{t+T}$ risulta

$$(3.1) \quad \begin{bmatrix} m_0 & 0 & \psi'_I(T) & \psi_I(T) \\ 0 & m_2 & -\psi''_I(T) & -\psi'_I(T) \\ \psi'_I(T) & -\psi''_I(T) & m_2 & 0 \\ \psi_I(T) & -\psi'_I(T) & 0 & m_0 \end{bmatrix}.$$

La funzione $\psi_I(T)$ è definita dalla trasformazione della densità spettrale di energia $E(\sigma)$

$$(3.2) \quad \psi_I(T) = \int_0^{\infty} E(\sigma) \cos \sigma T d\sigma,$$

m_0 ed m_2 sono momenti di ordine zero e due della $E(\sigma)$ rispetto all'asse $\sigma = 0$.

Nella Nota [2] si opera l'integrazione della (2.3) pervenendo ad una espressione per $\mathcal{P}(T)$ ovvero, in forza dell'identità (2.1), per $S(T)$. Tale espressione viene quindi adimensionalizzata grazie all'introduzione della variabile

$$(3.3) \quad \tau = T/\langle T_0 \rangle \quad \text{con} \quad \langle T_0 \rangle = \pi (m_0/m_2)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

e alle definizioni: delle densità di probabilità $\tilde{p}_i(\tau)$ ottenibili dalle $p_i(T)$ per la dipendenza (3.3), della relativa serie $\tilde{S}(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{p}_i(\tau)$, della funzione $\psi(\tau) = \psi_1(T)/m_0$ e della corrispondente derivata $\psi'(\tau)$. Con la simbologia ψ_τ in luogo della $\psi(\tau)$ si ha la forma definitiva dello sviluppo [2]

$$(3.4) \quad \tilde{S}_1(\tau) = (1 - \psi_\tau^2 - \psi_\tau'^2/\pi^2)^{\frac{1}{2}} / (1 - \psi_\tau^2).$$

Tale serie è unica per una famiglia di funzioni densità spettrale di energia $E(\sigma)$ espresse nella forma implicita

$$(3.5) \quad E(\sigma) = m_0 (m_0/m_2)^{\frac{1}{2}} f(\tilde{\sigma}) \quad \text{per} \quad \tilde{\sigma} = \sigma (m_0/m_2)^{\frac{1}{2}}$$

in termini dei rispettivi momenti m_0 ed m_2 e generate da una funzione $f(\tilde{\sigma})$ definita positiva in $[0, \infty)$ ed avente i momenti di ordine zero e due, rispetto all'asse $\tilde{\sigma} = 0$, entrambi unitari. La $\psi(\tau)$ è infatti ottenibile dalla $f(\tilde{\sigma})$ mediante la relazione

$$(3.6) \quad \psi(\tau) = \int_0^\infty f(\tilde{\sigma}) \cos(\pi \tilde{\sigma} \tau) d\tilde{\sigma}.$$

Integrando la (2.2) si ha un'altra espressione per $S(T)$ dalla quale, per sostituzione della variabile T con la τ , si può ottenere ancora la serie $\tilde{S}(\tau)$ in termini della sola ψ_τ e delle relative derivate prima ψ_τ' e seconda ψ_τ'' ; risulta

$$(3.7) \quad \tilde{S}_2(\tau) = K(\tau) \{ [1 - R^2(\tau)]^{\frac{1}{2}} + R(\tau) \arcsin R(\tau) \}$$

avendo posto

$$K(\tau) = \tilde{S}_1^2(\tau) (1 - \psi_\tau^2)^{\frac{1}{2}}, \quad R(\tau) = [\psi_\tau'' (1 - \psi_\tau^2) + \psi_\tau \psi_\tau'^2] / [\pi^2 (1 - \psi_\tau^2) - \psi_\tau'^2].$$

Si effettuano infine le integrazioni indicate nella relazione (2.4), dopo avere espresso il fattore di proporzionalità A in termini del momento m_2 mediante la relazione

$$(3.8) \quad A = \xi m_2^{\frac{1}{2}}.$$

Per la definizione di A operata al paragrafo precedente ξ risulta un parametro adimensionale e arbitrario-positivo. Il risultato delle predette operazioni viene direttamente espresso in funzione della variabile τ , analogamente a

(3) $\langle T_0 \rangle$ è il valore medio di T rispetto a p_0 .

quanto già fatto nei due casi precedenti:

$$(3.9) \quad \tilde{S}_3(\tau) = \{K_\tau(1 - e^{-\mathcal{B}_\tau})(1 - R_\tau^2)^{\frac{1}{2}} + K_\tau R_\tau [\arcsin R_\tau + L(\mathcal{A}_\tau, 0, -R_\tau) + \\ - L(\mathcal{A}_\tau, 0, R_\tau)] + \xi(\frac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}} \tilde{S}_{1\tau}(1 - \operatorname{erf} \mathcal{B}_\tau^{\frac{1}{2}})\} / \mathcal{F}(\xi).$$

Nella (3.9) i simboli a carattere stampa con indice τ indicano altrettante funzioni della ψ_τ , ψ'_τ e ψ''_τ , delle quali $R_\tau \equiv R(\tau)$ e $K_\tau \equiv K(\tau)$ sono già state precisate per la (3.7), $\tilde{S}_{1\tau} \equiv \tilde{S}_1(\tau)$ è la serie (3.4) ed, inoltre, si definisce

$$G_\tau = [\tilde{S}_{1\tau}(1 - \psi_\tau^2)^{\frac{1}{2}}]^{-1};$$

i simboli corsivi con indice τ indicano funzioni delle ψ_τ , ψ'_τ , ψ''_τ e del parametro ξ : si è posto

$$\mathcal{A}_\tau = \xi G_\tau, \quad \mathcal{B}_\tau = \frac{1}{2} \mathcal{A}_\tau^2 / (1 - R_\tau^2);$$

con $\mathcal{F}(\xi)$ si indica la funzione del solo parametro ξ

$$\mathcal{F}(\xi) = [1 - \exp(-\frac{1}{2}\xi^2)] + (\frac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}} \xi [1 - \operatorname{erf}(\xi/2^{\frac{1}{2}})];$$

infine i simboli $\operatorname{erf}(x)$ e $L(h, k, \rho)$ rappresentano rispettivamente la funzione di errore e la cumulativa bivariata normale definite come

$$\operatorname{erf}(x) = (2/\pi) \int_0^x e^{-t^2} dt$$

e

$$L(h, k, \rho) = \frac{1}{2} (1 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} \int_h^\infty \int_k^\infty \exp[-(x^2 + y^2 - 2\rho xy)/2(1 - \rho^2)] dy dx.$$

In generale la funzione $\tilde{S}_3(\tau)$ dipende da ξ sempre più sensibilmente via via che τ si approssima a zero; per spettri stretti tale dipendenza è più sensibile in corrispondenza al valore massimo della funzione medesima. Si può concludere che l'operazione di limite generatrice della $S(T)$ produce risultati differenti a seconda della modalità con la quale si tende alla condizione di uno zero di ζ all'istante arbitrario t . La serie $S(T)$ e le densità di probabilità componenti $p_i(T)$ risultano pertanto indeterminate.

In particolare si osserva che per ξ tendente a zero la $\tilde{S}_3$ si riduce alla $\tilde{S}_1$ e, per ξ tendente ad infinito, alla $\tilde{S}_2$. Il limite l_3 della $\tilde{S}_3$ per τ tendente a zero, così come quello della $\tilde{S}_2$, vale generalmente zero, diversamente da quanto accade per la $\tilde{S}_1$. Per τ e ξ tendenti a zero in modo tale che

$$\xi = o[(1 - R_\tau^2)^{\frac{1}{2}}/G_\tau]$$

(vedi appendice) il limite l_3 risulta eguale a quello della $\tilde{S}_1$ che è sempre diverso da zero. Fissato ξ la serie $\tilde{S}_3$ è compresa tra la $\tilde{S}_1$ e la $\tilde{S}_2$ per ogni τ , ad

eccezione di brevi intervalli nell'intorno dei punti dove le curve rappresentative di queste ultime si intersecano; tali punti tendono a scomparire per spettri di larghezza via via crescente.

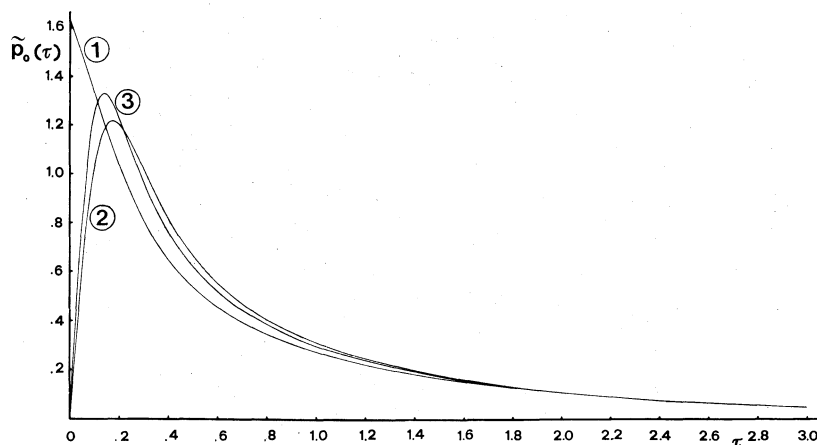


Fig. 1. - Alcune funzioni $\tilde{p}_0(\tau)$ ricavate da altrettante forme di $\tilde{S}_3(\tau)$ (① $\xi \rightarrow 0$, ② $\xi \rightarrow \infty$, ③ $\xi = 1$) relative ad $f(\bar{\sigma}) = \alpha_1 \bar{\sigma}^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta_1 \bar{\sigma}}$ ($\delta = 0.666$).

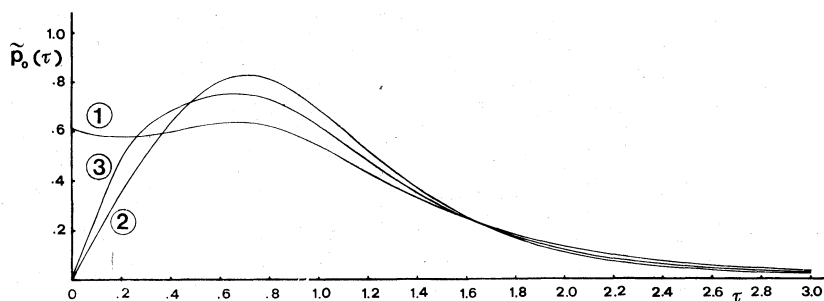


Fig. 2. - Alcune funzioni $\tilde{p}_0(\tau)$ ricavate da altrettante forme di $\tilde{S}_3(\tau)$ (① $\xi \rightarrow 0$, ② $\xi \rightarrow \infty$, ③ $\xi = 0.8$) relative ad $f(\bar{\sigma}) = \alpha_2 \bar{\sigma}^2 e^{-\beta_2 \bar{\sigma}}$ ($\delta = 0.250$).

Nelle figg. 1, 2 e 3 sono operati i confronti tra alcune funzioni densità di probabilità $\tilde{p}_0(\tau)$. In ogni figura sono riportate tre distribuzioni relative alla medesima famiglia di funzioni densità spettrale di energia ⁽⁴⁾ e indicizzate come ①, ②, ③ secondo l'espressione utilizzata per la serie $\tilde{S}(\tau)$. I criteri adottati per risalire dalle serie $\tilde{S}(\tau)$ alle funzioni $\tilde{p}_0(\tau)$ sono quelli illustrati

(4) I valori dei parametri α_i e β_i si ottengono imponendo la condizione che i momenti di ordine zero e due della $f(\bar{\sigma})$, rispetto all'asse $\bar{\sigma} = 0$, risultino unitari.

in [2] e basati sull'ipotesi di indipendenza stocastica degli intervalli tra due zeri consecutivi. Tutte e tre le serie $\tilde{S}(\tau)$ dimostrano la medesima tendenza ad ammettere la soluzione per $\tilde{p}_0(\tau)$ basata sulla predetta ipotesi di indipendenza stocastica; soltanto, le serie $\tilde{S}_2$ sono le prime a non ammetterla quando il valore del parametro di larghezza δ [2] dello spettro di energia tende a zero. Si determina così un dominio di δ , prossimo allo zero, entro il quale le serie $\tilde{S}(\tau)$ ammettono tale soluzione per valori del parametro ξ minori di un certo estremo superiore, che decresce con δ stesso. Una tale situazione è illustrata in fig. 3.

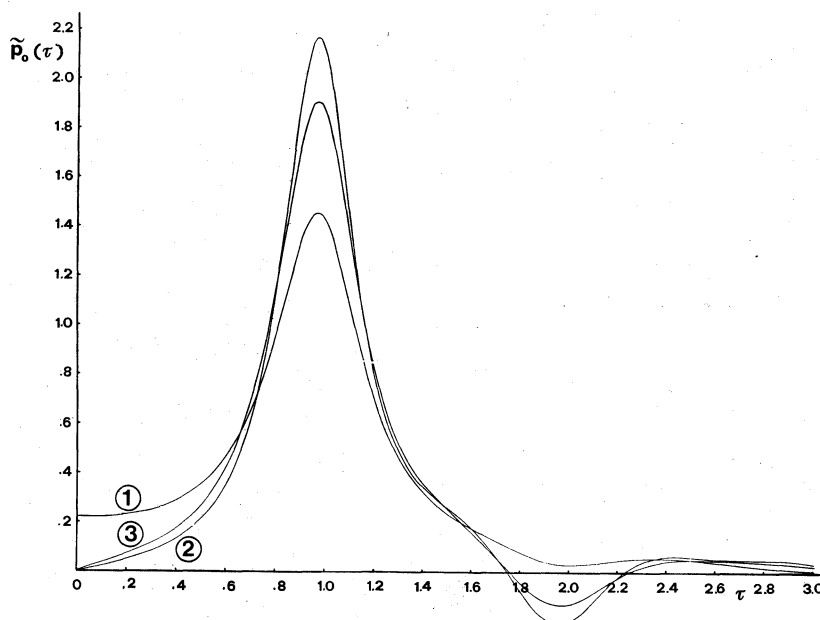


Fig. 3. - Alcune funzioni $\tilde{p}_0(\tau)$ ricavate da altrettante forme di $\tilde{S}_3(\tau)$ (① $\xi \rightarrow 0$, ② $\xi \rightarrow \infty$, ③ $\xi = 1$) relative ad $f(\bar{\sigma}) = \alpha_3 \bar{\sigma}^{20} e^{-\beta_3 \bar{\sigma}}$ ($\delta = 0.045$).

4. Il concetto di indeterminazione per le distribuzioni degli intervalli tra gli zeri di funzioni aleatorie introdotto in questa Nota, può trovare applicazione nei diversi campi della meccanica interessati a processi di tipo aleatorio; in elettronica, anche per i problemi connessi con la dissolvenza' dei segnali radio [4], in sismologia, nella fisica nucleare. In particolare nel campo idraulico marittimo dal quale chi scrive ha preso le mosse esso può contribuire all'evoluzione in atto, ad opera prevalente del Coastal Engineering Research Center (U.S. Army), riguardo all'analisi probabilistica dei rilievi delle onde generate dal vento sulla superficie del mare.

APPENDICE

Per semplicità l'analisi che segue viene limitata al caso di famiglie di spettri aventi momenti finiti fino al quarto ordine.

Quando τ tende a zero le funzioni K_τ, R_τ, G_τ assumono la forma indeterminata o/o. I rispettivi limiti l_K, l_R, l_G risultano

$$(A.1) \quad l_K = 0, \quad l_R = 1, \quad l_G = \infty,$$

e pertanto la serie $\tilde{S}_2(\tau)$ tende a zero.

Anche la $\tilde{S}_1(\tau)$ assume la forma indeterminata o/o il cui limite l_1 è stato valutato nella appendice B della Nota [2] e risulta

$$(A.2) \quad l_1 = \frac{1}{2} (\tilde{m}_4 - 1)^{\frac{1}{2}},$$

$\tilde{m}_4$ essendo il momento di ordine quattro della funzione $f(\bar{\sigma})$ generatrice della famiglia di spettri.

Si considera quindi il limite per τ tendente a zero della funzione $\tilde{S}_3(\tau)$ con ξ di ordine $(1 - R_\tau^2)^{\frac{1}{2}}/G_\tau$. Si pone

$$(A.3) \quad \xi^2 = 2\lambda (1 - R_\tau^2)/G_\tau^2 \quad \text{con } 0 < \lambda < \infty,$$

le funzioni $\mathcal{A}_\tau$ e $\mathcal{B}_\tau$ risultano, rispettivamente,

$$(A.4) \quad \mathcal{A}_\tau = [2\lambda (1 - R_\tau^2)]^{\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{B}_\tau = \lambda;$$

sostituendo nella (3.9) $\mathcal{B}_\tau$ con il parametro λ e ξ con la sua espressione (A.3) e considerato che per le (A.1), (A.4) il limite di $\mathcal{A}_\tau$ è zero si ottiene

$$(A.5) \quad l_3 = l_1 [(1 - e^{-\lambda}) (\pi\lambda)^{-\frac{1}{2}} - \text{erf } \lambda^{\frac{1}{2}} + 1].$$

Il limite l_3 passa dal valore l_1 ad $l_3 = 0$ per λ che varia da zero ad infinito.

È opportuno osservare, infine, come per famiglie di spettri non aventi momenti di ordine quattro la serie $\tilde{S}_2(\tau)$ tenda ad un valore limite diverso da zero, mentre la serie $\tilde{S}_1(\tau)$ tende ad infinito.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. O. RICE (1945) - « Bell Syst. Tech. J. », 24, p. 46.
- [2] P. BOCCOTTI (1978). Nota presentata all'Acc. Lincei nella seduta del 16 Dicembre.
- [3] J. A. MC FADDEN (1958) - « Trans. Inst. Rad. Engr. », IT-4, p. 14.
- [4] S. O. RICE (1958) - « Bell Syst. Tech. J. », 37, p. 581.