Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alberto Bressan

Sulla funzione tempo minimo nei sistemi non lineari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **66** (1979), n.5, p. 383–388.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_5_383_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

Teoria dei controlli. — *Sulla funzione tempo minimo nei sistemi non lineari.* Nota di ALBERTO BRESSAN, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — Conditions for the continuity of the Minimal Time Function in the whole space are given; we prove also a theorem on local differentiability that generalizes some results previously obtained in the linear case.

1. INTRODUZIONE

Per studiare problemi di natura locale, sulla famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbf{R}^n$ introduciamo la seguente famiglia di pseudometriche: per ogni aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$, se $A_1, A_2 \subseteq \mathbf{R}^n$ poniamo:

$$h_\Omega(A_1, A_2) = \inf\{\lambda \geq 0 : A_1 \cap \Omega^c \subseteq (A_2 \cup \Omega^c) + B_\lambda, \quad A_2 \cup \Omega^c \subseteq (A_1 \cup \Omega^c) + B_\lambda\} \tag{1}$$

ove si intende: $\Omega^c =$ complementare di Ω,

$$B_\lambda = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq \lambda\}.$$

Chiaramente $h_\Omega(A_1, A_2) = 0$ sse $\bar{A}_1 \cap \Omega = \bar{A}_2 \cap \Omega$.

Sia $R: t \to R(t)$ un'applicazione di uno spazio topologico $\mathcal{T}$ in $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ Dato $x_0 \in \mathbf{R}^n$, se esiste un intorno Ω_0 di x_0 tale che R è continua rispetto alla pseudometrica h_{Ω_0}, la R si dirà H-localmente continua in x_0. Se ciò accade per ogni $x \in \mathbf{R}^n$, diremo che la R è H-localmente continua (ovunque). La R risulta in tal caso continua ponendo su $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ la topologia debole della h_Ω, al variare di Ω fra tutti gli aperti limitati di $\mathbf{R}^n$.

Premesso questo, consideriamo un sistema autonomo soddisfacente alle ipotesi seguenti:

$$\dot{x} \in \mathcal{U}(x) \qquad (\forall x \in \mathbf{R}^n), \tag{2}$$

la funzione $x \to \mathcal{U}(x)$ sia H-continua, a valori compatti e convessi, esistano inoltre due costanti λ_1, λ_2 tali che:

$$\|\mathcal{U}(x)\| \stackrel{\text{def.}}{=} \sup\{\|u\| : u \in \mathcal{U}(x)\} \leq \lambda_1 + \lambda_2 \|x\| \qquad (\forall x \in \mathbf{R}^n).$$

Detto $R_0 = R(0)$ l'insieme chiuso di partenza e $R(t)$ l'insieme raggiungibile all'istante $t \geq 0$: $R(t) = \{x(t) : \xi \to x(\xi)$ è assolutamente continua in $[0, t]$, $\dot{x}(\xi) \in \mathcal{U}(x(\xi))$ q.o.$\}$ sia $R_0 \subseteq R(t)$ per ogni $t \geq 0$.

(*) Nella seduta del 12 maggio 1979.

Con tali ipotesi $R(t)$ è chiuso per ogni $t \geq 0$, l'applicazione $t \to R(t)$ è H–localmente continua e crescente, nel senso che $0 \leq t_1 \leq t_2$ implica $R(t_1) \subseteq \subseteq R(t_2)$. Per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ definiamo $T(x) = \inf\{t \geq 0 ; x \in R(t)\}$. Per quanto assunto, la T risulta inferiormente semicontinua; se $T(x_0) = t_0$, $x_0 \in R(t_0)$.

2. Criteri di continuità

Proposizione 1. *Sia $t \to R(t)$ un'applicazione crescente di $\mathbf{R}^+$ in $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$, con ogni $R(t)$ chiuso. Sono equivalenti:*

a) T *è continua in tutto* $\mathbf{R}^n$

b) $\forall x \in \mathbf{R}^n, x \in FR(t) \Rightarrow T(x) = t$

c) $\forall t_1, t_2, 0 \leq t_1 < t_2 \Rightarrow R(t_1) \subseteq \mathring{R}(t_2)$

($FR(t)$ = frontiera di $R(t)$. $\mathring{R}(t)$ = interno di $R(t)$).

Dimostrazione. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Sia T continua, $x \in FR(t)$. $T(x) \leq t$ perchè $R(t)$ è chiuso.

Sia $(x_n)_{n \geq 1}$ una successione tendente a x, con $x_n \notin R(t)$ per ogni n. Allora $T(x_n) \geq t$ per ogni n e, per continuità, $T(x) \geq t$.

b) $\Rightarrow$ *c)* Sia $t_1 < t_2$ ma $R(t_1) \nsubseteq \mathring{R}(t_2)$. Esiste dunque un x_0 appartenente a $R(t_1)$ ma non a $\mathring{R}(t_2)$. Chiaramente $x \in FR(t_2)$ ma $T(x) \leq t_1 < t_2$ contraddicendo *b)*;

c) $\Rightarrow$ *a)* Sia $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $T(x_0) = t_0$, $\varepsilon > 0$. L'insieme $A = \mathring{R}(t_0 + \varepsilon) \cap \cap (R(t_0 - \varepsilon))^c$ è aperto e contiene x_0. Se $x \in A$, $t_0 - \varepsilon \leq T(x) \leq t_0 + \varepsilon$, quindi la T è continua in x_0.

Teorema 1. *Dato il sistema* (2), *se l'applicazione $x \to \mathcal{U}(x)$ è localmente H–lipschitziana, sono equivalenti:*

a) T *è continua in* R_0

b) $t > 0 \Rightarrow R_0 \subseteq \mathring{R}(t)$

c) T *è continua in tutto* $\mathbf{R}^n$.

Dimostrazione. *a)* $\Rightarrow$ *b)*, *c)* $\Rightarrow$ *a)* sono implicazioni ovvie;

b) $\Rightarrow$ *c)* Supponiamo *c)* falsa. Per la proposizione 1 esistono allora t_1, t_2 con $0 \leq t_1 < t_2$ tali che $R(t_1) \nsubseteq \mathring{R}(t_2)$. Sia quindi $\bar{y} \in FR(t_1) \cap FR(t_2)$ e sia $(y_n)_{n \geq 1}$ una successione di punti di $\mathbf{R}^n$ esterni a $R(t_2)$ tendenti a $\bar{y}$. Prendiamo una sfera compatta V di centro $\bar{y}$ e raggio ρ abbastanza grande per contenere tutte le traiettorie dell'insieme: $\{x(t) : 0 \leq t \leq t_1, x$ assolutamente continua, $\dot{x} \in \mathcal{U}(x)$ q.o., $\|x(t_1) - \bar{y}\| \leq 1\}$.

La condizione di Lipschitz comporta ora l'esistenza di una costante $k > 0$ tale che: $x, x' \in V \Rightarrow H(\mathcal{U}(x), \mathcal{U}(x')) \leq k\|x - x'\|$.

Dato che esiste una traiettoria ammissibile $t \to \bar{x}(t)$ tale che $\bar{x}(0) \in R$, $\bar{x}(t_1) = \bar{y}$, per ogni $n \geq 1$ esiste una soluzione x_n del sistema (2) per cui si abbia: $x_n(t_1) = y_n$, $\|x_n(0) - \bar{x}(0)\| \leq e^{kt_1} \cdot \|y_n - \bar{y}\|$. (Per il teorema di dipendenza continua dalle condizioni iniziali applicato alle equazioni differenziali multivoche). Chiaramente $x_n(0) \notin \mathrm{R}(t_2 - t_1)$, altrimenti y_n starebbe in $\mathrm{R}(t_2)$, ma se y_n tende a $\bar{y}$ anche $x_n(0)$ tende a $\bar{x}$, quindi $\bar{x}$ è un punto di $\mathrm{R}(0)$ non interno a $\mathrm{R}(t_2 - t_1)$, contro l'ipotesi *b*).

3. SISTEMI COMPLEMENTATI

Riferendoci al sistema (2), se A è un chiuso di $\mathbf{R}^n$, $t_1 \leq t_2$ diciamo $\mathrm{R}(t_2, \mathrm{A}, t_1)$ l'insieme dei punti raggiungibili all'istante t_2 partendo da qualche punto di A all'istante t_1. Continueremo a scrivere $\mathrm{R}(t)$ al posto di $\mathrm{R}(t, \mathrm{R}_0, 0)$. Chiaramente, se $t_1 \leq t_2$, $\mathrm{R}(t_1) \subseteq \{x \in \mathbf{R}^n : \mathrm{R}(t_2, \{x\}, t_1) \subseteq \mathrm{R}(t_2)\}$.

Vediamo in quale caso vale l'uguaglianza.

PROPOSIZIONE 2. *Dato il sistema* (2), *se la* T *è continua e l'applicazione* $x \to \mathcal{U}(x)$ *è* H*-lipschitziana, sono equivalenti*:

a) $\forall t_1, t_2, t_1 \leq t_2 \Rightarrow \mathrm{R}(t_1) = \{x \in \mathbf{R}^n : \mathrm{R}(t_2, \{x\}, t_1) \subseteq \mathrm{R}(t_2)\}$;

b) $\forall t_1, t_2, t_1 \leq t_2$, *da ogni punto di frontiera di* $\mathrm{R}(t_1)$ *parte una traiettoria che giunge ad un punto di frontiera di* $\mathrm{R}(t_2)$ *dopo un tempo* $t_2 - t_1$;

c) *Ogni traiettroria* $t \to x(t)$ *ottimale nell'intevallo* $[0, t_1]$ *si estende ad una traiettoria ottimale nell'intervallo* $[0, t_2]$, $(\forall t_1, t_2)$ (diciamo la $t \to x(t)$ ottimale quando è ammissibile e $\mathrm{T}(x(t)) = t$, $\forall t$).

Dimostrazione. *a*) $\Rightarrow$ *b*) Sia *b* falsa: esistano x_1, t_1, t_2 tali che $t_2 \geq t_1$, $x_1 \in \mathrm{FR}(t_1)$, $\mathrm{R}(t_2, \{x_1\}, t_1) \cap \mathrm{FR}(t_2) = \varnothing$. Poichè $\mathrm{R}(t_2, \{x_1\}, t_1)$ è chiuso e la $x \to \mathcal{U}(x)$ è lipschitziana, esiste un intorno V di x_1 tale che $\mathrm{R}(t_2, \mathrm{V}, t_1) \cap \cap \mathrm{FR}(t_2) = \varnothing$ quindi esiste un $x \in \mathrm{V} - \mathrm{R}(t_1)$ tale che $\mathrm{R}(t_2, \{x\}, t_1) \subseteq \mathrm{R}(t_2)$;

b) $\Rightarrow$ *c*) Sia $t \to x(t)$ una traiettoria ottimale nell'intervallo $[0, t_1]$. Se $x(t_1) \in \mathrm{FR}(t_1)$, per *b*) la x si estende ad una traiettoria $t \to \hat{x}(t)$ tale che $\hat{x}(t) \in \mathrm{FR}(t)$ $\forall t > t_1$. Per la continuità di T la $\hat{x}$ risulta ottimale. Se, per assurdo, $x(t_1) \notin \mathrm{FR}(t_1)$, sia V una sfera chiusa di centro $x(t_1)$ e raggio ρ, interna $\mathrm{R}(t_1)$, e sia $k > 1$ tale che $\|\mathcal{U}(x)\| \leq k$ per ogni $x \in \mathrm{V}$. L'ottimalità della x comporta ora che $x(t) \in \mathrm{FR}(t)$ por ogni $t < t_1$.

In particolare $x\left(t_1 - \dfrac{\rho}{3k}\right) \in \mathrm{FR}\left(t_1 - \dfrac{\rho}{3k}\right)$, ma non esiste nessuna estensione $\bar{x}$ definita in $[0, t_1 + 1]$ tale che $\bar{x}(t) = x(t)$ se $0 \leq t \leq t_1 - \dfrac{\rho}{3k}$ e $\bar{x}(t) \in \mathrm{FR}(t)$ per ogni $t \in [0, t_1 + 1]$, infatti

$$\left\|\bar{x}\left(t_1 - \frac{\rho}{3k}\right) - x(t_1)\right\| \leq \frac{\rho}{3} \quad , \quad \left\|\bar{x}\left(t_1 - \frac{\rho}{3k}\right) - \bar{x}\left(t_1 + \frac{\rho}{3k}\right)\right\| \leq \frac{2\rho}{3}$$

quindi $\bar{x}\left(t_1 + \dfrac{\rho}{3k}\right) \in \mathrm{V} \subseteq \mathring{\mathrm{R}}(t_1) \leq \mathring{\mathrm{R}}\left(t_1 + \dfrac{\rho}{3k}\right)$

c) $\Rightarrow$ *a*) Sia $x_0 \notin R(t_1)$, allora $t_0 = T(x_0) > t_1$. Prendiamo una traiettoria ottimale $t \to x(t)$ tale che $x(t_0) = x_0$ ed estendiamola all'intervallo $[0, t_2 + t_0 - t_1]$. $x(t_0 + t_2 - t_1) \notin R(t_2)$ perchè $T(x(t_0 + t_2 - t_1)) > t_2$ quindi $R(t_2, \{x\}, t_1) \nsubseteq R(t_2)$.

Si osservi che nel teorema precedente la condizione *a*) dice che il processo di controllo è « complementato », nel senso che, se consideriamo il sistema $\dot{x} \in -\mathcal{U}(x)$ e partiamo all'istante iniziale $t = 0$ dai punti della chiusura del complementare di $R(t_0)$, al generico istante t $(0 \leq t \leq t_0)$ arriveremo esattamente alla chiusura del complementare di $R(t_0 - t)$. Quindi conoscendo $R(t_0)$ è possibile determinare ogni $R(t)$, anche se $t < t_0$.

La *b*) comporta che, se $T(x_0) = t_0$, x_0 è un punto di frontiera per $R(t_0)$; inoltre, sempre da *b*), si deduce che l'applicazione $t \to FR(t)$ è H-localmente continua. Si noti infine che la *c*) asserisce, in sostanza, l'invertibilità del principio di Bellman: se una traiettoria $t \to x(t)$ è la restrizione di una traiettoria ottima ad un intervallo inziale, essa stessa è ottima, Viceversa, se vale *c*), quando una traiettoria è ottima in un intervallo $[0, t_0]$, essa è la restrizione a tale intervallo di una traiettoria ottima in tutti gli istanti positivi.

4. DIFFERENZIABILITÀ LOCALE

TEOREMA 3. *Sia* $\dot{x} \in \mathcal{U}(x)$ *un sistema autonomo soddisfacente alle ipotesi indicate al punto* (2). *Fissato l'insieme iniziale* R_0, *la funzione tempo minimo* T *sia continua. Sia* $t_0 > 0$, $x_0 \in FR(t_0)$ (quindi $T(x_0) = t_0$). *Valgono inoltre le seguenti condizioni*:

a) *Esiste l'iperpiano tangente a* $FR(t_0)$ *in* x_0, *e* y_0 *ne è il versore normale esterno.*

b) *La quantità* $\lambda = \sup\{y_0^\star u : u \in \mathcal{U}(x_0)\}$ *è strettamente positiva.*

c) $R(t) = \{x \in \mathbf{R}^n : R(t_0\{x\}, t) \subseteq R(t_0)\}$ *per ogni* $t : 0 \leq t \leq t_0$. *Allora la* T *è differenziabile in* x_0; *la sua derivata vale*: $DT(x_0) = \lambda^{-1} y_0$.

Dimostrazione. Con l'ipotesi a) richiediamo precisamente che, dato comunque $\varepsilon > 0$, esista un intorno sferico V di x_0 tale che, se $x \in V$ allora

$$\begin{aligned} &\frac{y_0^\star(x - x_0)}{\|x - x_0\|} > \varepsilon \Rightarrow x \notin R(t_0) \\ &\frac{y_0^\star(x - x_0)}{\|x - x_0\|} < -\varepsilon \Rightarrow x \in R(t_0). \end{aligned} \tag{4}$$

Cominciamo fissando un intorno V_0 di x_0 tale che, per k opportuno, risulti: $\|\mathcal{U}(x)\| \leq k$ per ogni $x \in V_0$. L'ipotesi di H-continuità per la funzione $x \to \mathcal{U}(x)$ implica che, dato comunque $\varepsilon > 0$, esiste un intorno V di x_0 tale che, per ogni $x \in V$ si abbia:

$$\mathcal{U}(x) \cap C_1 \neq \varnothing \quad \text{e} \quad \mathcal{U}(x) \subseteq C_2 \tag{5}$$

avendo posto:

$$C_1 = \{u \in \mathbf{R}^n \mid \lambda - \varepsilon \leq y_0^\star u \leq \lambda + \varepsilon , \|u - \pi_0(u)\| \leq k\}$$
$$C_2 = \{u \in \mathbf{R}^n \mid y_0^\star u \leq \lambda + \varepsilon , \|u - \pi_0(u)\| \leq k\}$$

($\pi_0(u)$ = proiezione di u sul sottospazio lineare generato da y_0).

Dato comunque $\varepsilon > 0$, se ρ è il raggio di un intorno sferico contenuto in V_0, di centro x_0 e soddisfacente contemporaneamente a (4) e (5), detto V l'intorno sferico di centro x_0 e raggio $\rho/2$, per ogni t fra t_0 e $t_0 + \frac{\rho}{2k}$ sussistono le relazioni seguenti:

$$\text{(6)} \qquad V \cap \{x : x - (t - t_0) C_1 \subseteq A_1\} \subseteq V \cap R(t) \subseteq (A_2 + (t - t_0) C_2) \cap V.$$

con

$$A_1 = \left\{x : \frac{y_0^\star (x - x_0)}{\|x - x_0\|} \leq -\varepsilon\right\} \qquad A_2 = \left\{x : \frac{y_0^\star (x - x_0)}{\|x - x_0\|} \leq \varepsilon\right\}$$

Esplicitando la (6) si trova:

$$\text{(7)} \qquad V \cap \left\{x : \frac{y_0^\star (x - x_1)}{\|x - x_1\|} \leq -\varepsilon\right\} \subseteq V \cap R(t) \subseteq$$
$$\subseteq V \cap \left\{x : \frac{y_0^\star (x - x_2)}{\|x - x_2\|} \leq \varepsilon\right\}$$

avendo posto:

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad , \quad x_1 = x_0 + (t - t_0)(\lambda - \varepsilon - k\gamma)\, y_0 ,$$
$$x_2 = x_0 + (t - t_0)(\lambda + \varepsilon + k\gamma)\, y_0 .$$

Per la T otteniamo le seguenti disuguaglianze: se $x = x_0 + \xi y_0$ e se

$$t_0 \leq T(x) \leq t_0 + \frac{\varepsilon}{2k},$$

allora

$$\text{(8)} \qquad \frac{\xi}{\lambda + \varepsilon + k\gamma} \leq T(x) - T(x_0) \leq \frac{\xi}{\lambda - \varepsilon - k\gamma} .$$

Per un generico $x \in V$, se $t_0 \leq T(x) \leq t_0 + \frac{\varepsilon}{2k}$ possiamo scrivere che

$$\text{(9)} \qquad \frac{\|\pi_0(x) - x_0\| - \gamma \cdot \|x - \pi_0(x)\|}{\lambda + \varepsilon + k\gamma} \leq T(x) - T(x_0) \leq$$
$$\leq \frac{\|\pi_0(x) - x_0\| + \gamma\, \|x - \pi_0(x)\|}{\lambda - \varepsilon - k\gamma} .$$

Dato che la T è continua, la condizione $|T(x) - t_0| \leq \frac{\rho}{2k}$ è soddisfatta in tutto un intorno di x_0. La relazione (9) comporta ora che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intorno V′ di x_0 tale che se $x \in V'$, $T(x) \geq t_0$, allora

$$\left| \frac{T(x) - T(x_0) - \lambda^{-1} y_0^{\star}(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \right| \leq \varepsilon . \tag{10}$$

Per la condizione c) è possibile provare la validità della (10) anche nel caso $T(x) < t_0$. A tal fine basta infatti applicare il ragionamento fin qui eseguito al sistema complementare $\dot{x} \in - \mathcal{U}(x)$ come indicato nell'osservazione che precede il precente teorema.

Si noti che, se la T è localmente lipschitziana in x_0, la condizione b) è automaticamente soddisfatta: se, per assurdo, $\lambda \leq 0$, la (8) porge $\frac{\|x - x_0\|}{\varepsilon + k\gamma} \leq$ $\leq T(x) - T(x_0)$. Quindi, dato $\varepsilon > 0$, si può trovare un $x = x_0 + \xi y_0$ con $\xi > 0$ abbastanza piccolo tale che $T(x) - T(x_0) \geq \|x - x_0\| \cdot \frac{1}{\varepsilon}$, contro l'ipotesi di lipschitzianità.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BACCIOTTI - *Sulla continuità della funzione tempo minimo*, in corso di stampa sul Bollettino U. M. I.

[2] A. BRESSAN (1978) - *Processi di controllo. Proprietà della funzione tempo minimo*, tesi di laurea in matematica univ. di Padova..

[3] O. HAJEK (1971) - *Geometric theory of time optimal control*, « SIAM J. Control », *9*, 3.

[4] O. HAJEK (1977) - *On differentiability of the minimal time function*, « Funkcialaj Ekvacioj », *20*.

[5] E. B. LEE and L. MARKUS (1967) - *Foundations of optimal control theory*, Wiley.

[6] A. F. FILIPPOV (1967) - *Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side*, « SIAM J. Control », *5*.