Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo Maroscia

Alcune osservazioni sulle varietà intersezioni complete

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **66** (1979), n.5, p. 365–371.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_5_365_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1979.

Geometria. — *Alcune osservazioni sulle varietà intersezioni complete* (*). Nota di PAOLO MAROSCIA (**), presentata (***) dal Socio G. ZAPPA.

SUMMARY. — We prove some results on the subvarieties of codimension one of an affine (resp. projective) variety which are set-theoretic complete intersections on it, with special regard to the case of a curve.

In questa Nota, ci proponiamo di esporre alcuni risultati sulle sottovarietà di codimensione 1 di una varietà affine o proiettiva V, che sono intersezioni complete in senso insiemistico (di V con un'ipersuperficie dello spazio ambiente).

Il risultato principale è dato dal Teor. 2.1, il quale, tra l'altro, estende alla chiusura algebrica di Q, la validità di una « congettura di Gallarati » (cfr. [16]), riguardante le superfici cubiche di $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ tali che ogni curva su di esse è intersezione completa insiemistica. Segnaliamo inoltre il Teor. 1.2, da cui segue in particolare che « l'insieme delle sottovarietà di codimensione 1 di una varietà normale, che *non* sono intersezioni complete in senso insiemistico (risp. in senso algebrico), è vuoto oppure infinito », e infine, la Prop. 2.3 relativa ai punti intersezioni complete insiemistiche su una curva affine, definita sopra un campo algebricamente chiuso arbitrario. A partire dalla Prop. 2.3, siamo poi in grado di riottenere, in modo semplice e diretto, un noto risultato di Cunnea (cfr. [6]) secondo cui « una curva affine non singolare è razionale se, e soltanto se, il suo anello delle coordinate è fattoriale ».

Ci limiteremo a considerare varietà algebriche immerse in spazi affini o proiettivi, definiti sopra un campo K algebricamente chiuso. Inoltre, se $\mathscr{C}$ è una curva affine o proiettiva, denoteremo con $W(\mathscr{C})$ (risp. con $S(\mathscr{C})$) il sottoinsieme di $\mathscr{C}$ costituito dai punti intersezioni complete in senso insiemistico (risp. in senso algebrico).

Infine ringraziamo A. V. Geramita per le utili discussioni con lui avute durante la preparazione del presente lavoro.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del GNSAGA del CNR.
(**) Istituto Matematico « G. Castelnuovo », Città Universitaria, 00100 Roma.
(***) Nella seduta del 12 maggio 1979.

1. Alcuni risultati generali.

Cominciamo col provare un lemma relativo ai dominî di Krull [(1)], già ottenuto implicitamente in [15] nel caso noetheriano:

Lemma 1.1. *Sia* R *un dominio di Krull arbitrario, e sia* a *un ideale di* R *tale che*:

(i) $r(a) = r((x))$, *con* $x \in \mathrm{R}$;

(ii) *posto*: $r(a) = p_0 \cap p_1 \cap \cdots \cap p_h$, *con* $p_i \in \mathrm{X}^{(1)}(\mathrm{R})$ *per* $i = 0, \cdots, h$, *si abbia*: $p_0 = r((y))$, *con* $y \in \mathrm{R}$.

Allora esiste un elemento $z \in \mathrm{R}$ *tale che* $p_1 \cap \cdots \cap p_h = r((z))$.

Dimostrazione. Basta far vedere che esiste un elemento $z \in \mathrm{R}$ tale che gli unici ideali primi di altezza 1 che lo contengono sono proprio $p_1, \cdots, p_h$. Ebbene, se $v_{p_0}(x) = m$ e $v_{p_0}(y) = n$ (con $m, n \geq 1$), l'elemento $z = x^n/y^m$ (il quale, a priori, è un elemento del campo dei quozienti di R) gode delle seguenti proprietà, con riferimento alle valutazioni discrete associate agli ideali primi p di $\mathrm{X}^{(1)}(\mathrm{R})$:

$$\begin{cases} v_p(z) = 0, & \text{se } p = p_0 \quad \text{oppure } p \neq p_1, \cdots, p_h \\ v_p(z) > 0, & \text{se } p = p_j, \quad \text{con } j = 1, \cdots, h; \end{cases}$$

e ciò basta per concludere.

Teorema 1.2. *Sia* R *un dominio di Krull. Allora*:

(1) *L'insieme degli ideali primi di altezza* 1 *di* R, *che non sono radicali di ideali principali, è vuoto oppure infinito.*

(2) *L'insieme degli ideali primi di altezza* 1 *di* R, *che non sono principali, è vuoto oppure infinito.*

Dimostrazione. (1) Supponiamo per assurdo che esista soltanto un numero finito di ideali primi siffatti, diciamo $p_1, \cdots, p_r$, e fissiamo un elemento $x \in p_1$ tale che $x \notin p_2 \cup \cdots \cup p_r$. Allora, denotati con $p'_1 = p_1, p'_2, \cdots, p'_s$ gli ideali primi di altezza 1 che contengono x, si ha che $p'_2, \cdots, p'_s$ sono radicali di ideali principali, sicché tale risulta anche p'_1, in virtù del lemma: ciò è una contraddizione.

(2) Se per assurdo esistesse soltanto un numero finito di ideali primi siffatti, diciamo $p_1, \cdots, p_r$, allora, in virtù del punto (1), R è un dominio prefattoriale (cfr. [1]), dunque è semifattoriale (cfr. [7] oppure [17]). Ne segue che, posto $\mathrm{T} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{R}_{p_i}$, si ha: $\mathrm{T} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{R}$, dove S è una parte moltiplicativa

(1) Se R è un dominio di Krull, denotiamo con $\mathrm{X}^{(1)}(\mathrm{R})$ l'insieme degli ideali primi di altezza 1 di R.

generata dai generatori degli ideali primi di $X^{(1)}(R) - \{p_1, \cdots, p_r\}$; d'altra parte, è subito visto che T è un dominio a ideali principali, sicché applicando un noto teorema di Nagata (cfr. ad esempio [7, Theor. 7.1]), R risulta un dominio fattoriale, contro le ipotesi.

Il teorema è così completamente dimostrato (2).

COROLLARIO 1.3. *Se* V *è una varietà irriducibile normale di* $\mathbf{A}^n_K$ *(risp. proiettivamente normale di* $\mathbf{P}^n_K$*), valgono le seguenti proprietà:*

(a) *Sia* W *una sottovarietà pura di codimensione* 1 *di* V *tale che:*

i) W *è un'intersezione completa insiemistica su* V;

ii) *se* $W = W_0 \cup W_1 \cup \cdots \cup W_h$ *è la decomposizione di* W *nelle sue componenti irriducibili,* W_0 *è un'intersezione completa insiemistica su* V.

Allora anche la sottovarietà residua $W_1 \cup \cdots \cup W_h$ *è un'intersezione completa in senso insiemistico su* V.

(b) *L'insieme delle sottovarietà irriducibili di codimensione* 1 *di* V, *che non sono intersezioni complete in senso insiemistico (risp. in senso algebrico) è vuoto oppure è infinito.*

OSSERVAZIONE 1.4. Conviene sottolineare, con riferimento al Coroll. 1.3. (a), che dalla dimostrazione del Lemma 1.1 è possibile ottenere un risultato geometrico alquanto più preciso, ossia l'ordine di una ipersuperficie che incontra la varietà V lungo la « sottovarietà residua » $W_1 \cup \cdots \cup W_h$ di W. Così ad esempio, si verifica subito che:

(1) La cubica sghemba di $\mathbf{P}^3_K$ è intersezione completa, in senso insiemistico, di un cono quadrico (3) con un'opportuna superficie cubica.

(2) Se C è una cubica non singolare di $\mathbf{P}^2_K$ (con K di caratteristica $\neq 2, 3$), dato un punto di flesso $P \in C$ e considerata una retta per P tangente altrove a C, diciamo in Q, esiste una conica (non singolare) che incontra C soltanto in Q (4).

Notiamo poi che, se C è una cubica non singolare di $\mathbf{P}^2_K$ (con K di caratteristica $\neq 2, 3$), è subito visto che il sottoinsieme W (C) di C possiede almeno una infinità numerabile di punti. Infatti, se P è un punto di flesso su C, consideriamo una retta per P tangente altrove a C, diciamo in P_1, e successivamente una retta per P_1 tangente altrove a C, diciamo in P_2, e così via. Si ottiene in tal modo una successione di punti appartenenti a W (C), in virtù del Coroll. 1.3 (a), e per di più senza ripetizioni, come si verifica facilmente, da cui la tesi.

(2) Segnaliamo che l'enunciato (2) si trova dimostrato (per altra via) anche in [5].
(3) Che è proiettivamente normale, se K ha caratt. $\neq 2$ (cfr. [11, p. 147]).
(4) Si ottengono in tal modo tutti i cosiddetti punti *sestatici* (cfr. [19]).

Ebbene, vale un risultato alquanto semplice (cfr. ad es. [8, p. 128]) che completa le considerazioni sopra sviluppate:

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia* C *una cubica non singolare di* $\mathbf{P}^2_{\mathrm{K}}$ (*con* K *di caratteristica* $\neq 2, 3$) *e assumiamo come identità del gruppo* C $(\oplus)$ *un punto di flesso, diciamo* o. *Allora si ha*:

(a) *Siano* $\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_{3n}$ *con* $n \geq 1$, *punti di* C, *non necessariamente distinti. Le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti*:

i) $\mathrm{P}_1 \oplus \mathrm{P}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{P}_{3n} = 0$;

ii) *esiste una curva* B *di ordine* n *in* $\mathbf{P}^2_{\mathrm{K}}$ *tale che* $\mathrm{B.C} = \sum_{i=1}^{3n} \mathrm{P}_i$.

(b) *Il sottoinsieme* W (C) [5] *coincide con il sottogruppo di* C $(\oplus)$ *costituito dai punti di ordine finito.*

Dalla Prop. 1.5 discende subito il risultato seguente:

COROLLARIO 1.6. *Sia* C *una cubica non singolare di* $\mathbf{P}^2_{\mathrm{K}}$, *con* $\mathrm{K} = \overline{\mathbf{F}}_p$, *con* $p \neq 2, 3$ (*essendo* p *un numero primo e* $\mathbf{F}_p$ *il campo con* p *elementi*). *Allora si ha*: W (C) = C.

2. IL CASO DELLE CURVE.

Stabiliamo innanzitutto il risultato principale contenuto in questo paragrafo:

TEOREMA 2.1. *Sia* C *una curva irriducibile non singolare di* $\mathbf{P}^n_{\mathrm{K}}$, *essendo* K *un campo* (*algebricamente chiuso*) *di caratteristica zero arbitrario, oppure un campo di caratteristica* $p > 0$, *purché* $\mathrm{K} \neq \overline{\mathbf{F}}_p$, *e* $n \geq 2$.

Allora, se W (C) = C, *la curva* C *risulta razionale.*

Dimostrazione. Infatti, supponiamo per assurdo che C abbia genere > 0, e fissiamo un punto P_0 su C come punto base per l'immersione $\mathrm{C} \hookrightarrow \mathrm{J}(\mathrm{C})$, essendo J (C) la jacobiana di C. Allora, in virtù dell'ipotesi fatta su W (C), per ogni punto $\mathrm{P} \in \mathrm{C}$ si ha una relazione della forma: $m\mathrm{P} \sim m\mathrm{P}_0$, dove m è un intero ≥ 1 che dipende da P e il simbolo $\sim$ denota la relazione di equivalenza lineare tra divisori. Ne segue che ogni punto di J (C) ha ordine finito (poiché J (C) è generato da C, come gruppo abeliano), ma ciò è assurdo giacché, per le ipotesi fatte su K, J (C) possiede certamente punti di ordine infinito (cfr. [1, p. 1137]).

OSSERVAZIONE 2.2. Se C è una cubica non singolare di $\mathbf{P}^2_{\mathrm{K}}$, essendo K la chiusura algebrica di Q, si ha, in virtù del Teor. 2.1: $\mathrm{W}(\mathrm{C}) \subsetneq \mathrm{C}$. Ne segue (cfr. [16]) che la congettura di Gallarati, secondo cui « esistono soltanto tre

(5) Si noti che, essendo $0 \in \mathrm{W}(\mathrm{C})$, W (C) è un sottogruppo di C $(\oplus)$ (cfr. 1.3 (a)).

superfici cubiche (ben determinate) di $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$ tali che ogni curva tracciata su di esse è intersezione completa insiemistica », congettura dimostrata da Stagnaro per un qualsiasi campo K di caratteristica zero, non numerabile, è vera anche per $K = \overline{Q}$. Inoltre, il Teor. 2.1 risponde in modo esauriente ad un problema posto da Stagnaro (cfr. [15, p. 171, nota (4)]). Notiamo infine che, poggiando sul Teor. 2.1, è possibile estendere alcune caratterizzazioni delle curve proiettive razionali in termini di aperti affini, dimostrate, nel caso complesso, in [4, Prop. 3.3].

Sia ora C_0 una curva irriducibile di $\mathbf{A}^n_K$ (6), con $n \geq 2$, e siano $P_1, \cdots, P_h$ i punti all'infinito di C_0; sia inoltre C la chiusura proiettiva di C_0, sicché in particolare: $W(C) \cap C_0 \subseteq W(C_0)$.

PROPOSIZIONE 2.3. *Ferme restando le notazioni sopra introdotte, si ha*:

(i) *se* $P \in W(C_0)$, *esiste qualche intero* $r \geq 1$ *tale che* $rP \sim \sum_{i=1}^{h} m_i P_i$, *con* $m_i \in \mathbf{Z}$, *per* $i = 1, \cdots, h$;

(ii) *se* C *ha genere* > 0, *allora* $W(C_0)$ (*e quindi anche* $W(C)$) *è un insieme al più numerabile.*

Dimostrazione. La (i) è pressoché immediata. Per provare (ii), distinguiamo due casi:

(a) C_0 è *non singolare*, e inoltre anche la sua chiusura proiettiva C è non singolare (ciò che non è restrittivo per i nostri scopi).

Supponiamo innanziatutto che $W(C_0) \neq \varnothing$ e osserviamo che, stante la (i), resta definita una corrispondenza, diciamo ψ, da $W(C_0)$ nel gruppo abeliano libero $G = \mathbf{Z}P_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}P_h$. Inoltre, sempre in virtù di (i), è possibile associare ad ogni punto P di $W(C_0)$ un intero $w(P)$, che chiameremo *valenza* di P, definito come il più piccolo intero $r \geq 1$ per cui si ha una relazione della forma $rP \sim \sum_{i=1}^{h} m_i P_i$, con $m_i \in \mathbf{Z}$, sicché denotato con $W_r(C_0)$ il sottoinsieme di $W(C_0)$ costituito dai punti di valenza r, per ottenere la tesi, basta provare che per ogni intero $r \geq 1$, $W_r(C_0)$ è un insieme al più numerabile.

Consideriamo ora in $W_r(C_0)$ (supposto non vuoto) la relazione di equivalenza così definita: $P \,\varepsilon\, Q \Longleftrightarrow rP \sim rQ$: è subito visto che ogni classe di equivalenza in $W_r(C_0)$ è costituita al più da un numero finito di punti, giacché ogni punto $Q \,\varepsilon\, P$ $(Q \neq P)$ individua un punto di ordine finito sulla jacobiana $J(C)$. D'altra parte, l'insieme quoziente $W_r(C_0)/\varepsilon$ è al più numerabile, poiché la corrispondenza $\tilde{\psi}_r : W_r(C_0)/\varepsilon \dashrightarrow G$, ottenuta a partire dalla restrizione, ψ_r, di ψ a $W_r(C_0)$, muta classi distinte in sottoinsiemi disgiunti di G; ne segue che $W_r(C_0)$ è al più numerabile, ossia la tesi.

(6) D'ora in poi, K è un campo algebricamente chiuso qualsiasi.

(b) C_0 è *singolare*. In tal caso, stante il punto (a), la tesi si ottiene subito considerando un aperto affine principale, diciamo $(C_0)_f$, dove f è un'arbitraria ipersuperficie di $\mathbf{A}^n$ passante per tutti i punti singolari di C_0.

COROLLARIO 2.4. *Ferme restando le notazioni sopra introdotte, si ha*:

(j) *se* $P \in S(C_0)$, *allora* $P \sim \sum_{i=1}^{h} n_i P_i$, *con* $n_i \in \mathbf{Z}$ $(i = 1, \cdots, h)$;

(jj) *se* C *ha genere* > 0, *allora* $S(C_0)$ *è un insieme al più numerabile.*

OSSERVAZIONE 2.5. Si noti che l'enunciato 2.3 (ii) non si inverte: basta considerare ad es. la cubica piana C_0 di eq. $Y^2 = X^3$ e tener presente (cfr. [15, p. 171]) che $W(C_0) = \{(0, 0)\}$; il medesimo esempio mostra altresì che neppure l'enunciato 2.3 (i) si inverte, in generale. Segnaliamo infine che il Coroll. 2.4 (jj) estende in parte un risultato stabilito in [18, Prop. 1].

Dalla Prop. 2.3 discende inoltre il risultato seguente:

COROLLARIO 2.6. *Sia* C_0 *una curva affine non singolare tale che*:

(i) *la chiusura proiettiva* C *di* C_0 *è non singolare*;

(ii) $W(C_0) = C_0$;

(iii) *esiste un intero* $N > 0$ *tale che per ogni punto* $P \in C_0$ *si ha*: $w(P) \leq N$.

Allora C_0 *è razionale.*

Dimostrazione. Infatti, se per assurdo C_0 non fosse razionale, fissato un punto all'infinito, diciamo P_1, come punto base per l'immersione $C \hookrightarrow J(C)$, denotiamo con J_∞ il sottogruppo di $J(C)$ generato dai divisori $P_i - P_1$, con $i = 1, \cdots, h$. Allora, in virtù della Prop. 2.3 (i), ogni punto $P \in C_0$ è tale che $w(P) P \in J_\infty$; ne segue, stante la (iii), che ogni punto di C ha ordine infinito, oppure un ordine finito necessariamente limitato. Ma ciò contraddice il fatto ben noto (cfr. [12]) che $J(C)$ possiede punti di ordine finito arbitrariamente elevato, donde la conclusione [7].

COROLLARIO 2.7. *Le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti, per una curva irriducibile* C_0 *di* $\mathbf{A}^n_K$:

(1) $S(C_0) = C_0$;

(2) C_0 *è una curva razionale non singolare.*

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2) discende direttamente dal Coroll. 2.6.

(2) $\Rightarrow$ (1) si ottiene subito osservando che, nelle nostre ipotesi, la curva C_0 è isomorfa ad un aperto affine di $\mathbf{A}^1_K$, donde la conclusione, giacché la (1) è invariante per isomorfismi tra curve affini.

(7) Il corollario ora dimostrato inverte un risultato di Stagnaro (cfr. [15, p. 172, Corollario 2]).

OSSERVAZIONE 2.8. Il Coroll. 2.7 è stato dimostrato per la prima volta in [6], utilizzando metodi di teoria delle valutazioni (si noti che la (1) equivale alla condizione che l'anello delle coordinate di C_0 è fattoriale). Inoltre il Coroll. 2.7 non si estende alle superfici affini (con riferimento alle curve su di esse), com'è subito visto considerando la sfera complessa di raggio unitario (cfr. [7, Prop. 11.8 (c)]). Notiamo infine che, mentre per una curva proiettiva C le condizioni: $W(C) = C$ e $S(C) = C$ chiaramente non sono equivalenti, le analoghe condizioni relative alle curve tracciate su una superficie non singolare di $\mathbf{P}^n_K$, che sia intersezione completa in $\mathbf{P}^n_K$, sono tra loro equivalenti, per un campo K algebricamente chiuso arbitrario (cfr. [13] e [3]).

BIBLIOGRAFIA

[1] S. ABHYANKAR (1967) – *Non prefactorial local rings*, «Amer. J. Math.», *89*, 1137–1146.

[2] M. F. ATIYAH and I. G. MACDONALD (1969) – *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass.

[3] L. BADESCU (1978) – *A remark on the Grothendieck-Lefschetz theorem about the Picard group*, «Nagoya Math. J.», *71*, 169–179.

[4] M. BELTRAMETTI and F. ODETTI (1977) – *On the projectively almost-factorial varieties*, «Ann. Mat. Pura Appl.», *113*, 255–263.

[5] A. BOUVIER (1977) – *Sur les idéaux premiers de hauteur 1 d'un anneau de Krull*, «C.R. Acad. Sc. Paris», *284*, A 727–A 729.

[6] W. M. CUNNEA (1964) – *Unique factorization in algebraic function fields*, «Ill. J. Math.», *8*, 425–438.

[7] R. FOSSUM (1973) – *The divisor class group of a Krull domain*, Springer-Verlag, Berlin.

[8] W. FULTON (1969) – *Algebraic Curves*, Benjamin, New York.

[9] D. GALLARATI (1960) – *Ricerche sul contatto di superficie algebriche lungo curve*, «Acad. royale de Belgique», Classe des Sciences, Mémoires, Tome XXXII.

[10] D. GALLARATI (1976) – *Problemi di completa interferenza in geometria algebrica*, «Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari», *46*, 242–270.

[11] R. HARTSHORNE (1977) – *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin.

[12] D. MUMFORD (1974) – *Abelian Varieties*, Oxford University Press.

[13] L. ROBBIANO (1973) – *A problem of complete intersections*, «Nagoya Math. J.», *52*, 129–132.

[14] P. SAMUEL (1964) – *Lectures on unique factorization domains*, «Tata Institute for Fundamental Research», *30*, Bombay.

[15] E. STAGNARO (1974) – *Su alcune generalizzazioni della nozione di dominio fattoriale*, «Ann. Univ. Ferrara», *19*, 157–179.

[16] E. STAGNARO (1978) – *Fattorialità e semifattorialità sulle ipersuperficie cubiche proiettive*, Actas del V Congreso de la Agrupación de Matemáticos de expresión latina, Madrid.

[17] U. STORCH (1967) – *Fastfaktorielle Ringe*, «Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster», Heft *36*.

[18] E. VALENTI (1967) – *Sui punti principali delle curve piane affini*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», *42*, 8–11.

[19] R. J. WALKER (1950) – *Algebraic Curves*, Princeton University Press.