ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ANGELO ALVINO, GUIDO TROMBETTI

Equazioni ellittiche con termini di ordine inferiore e riordinamenti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **66** (1979), n.3, p. 194–200.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_3_194_0>

Equazioni a derivate parziali. — *Equazioni ellittiche con termini di ordine inferiore e riordinamenti* (*). Nota di Angelo Alvino e Guido Trombetti, presentata (**) dal Socio C. Miranda.

Summary. — We give a pointwise bound for the rearrangement of a solution of the Dirichlet problem for second order elliptic equations with lower order terms by means of the solution of a "symmetrized" problem.

In un recente lavoro (cfr. [2]) G. Talenti ha dimostrato che, data un'equazione della forma

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\, u_{x_j}) + c(x)\, u = f(x)$$

dove i coefficienti $a_{ij}(x)$ e $c(x)$ sono funzioni misurabili definite in un aperto Ω di R^n soddisfacenti le seguenti ipotesi

$$(1) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \geq |\xi|^2 \quad , \quad c(x) \geq 0$$

e detta $u(x)$ la soluzione debole del problema di Dirichlet in Ω con dato omogeneo, riesce

$$(2) \qquad u^{\#}(x) \leq v(x)$$

dove con $u^{\#}(x)$ si intende il riordinamento sferico [1] di $u(x)$ e $v(x)$ è la soluzione del problema di Dirichlet relativo all'equazione

$$-\Delta v = f^{\#}$$

ed al dominio $\Omega^{\#}$, essendo $\Omega^{\#}$ la sfera di R^n la cui misura è mis Ω e con centro nell'origine.

La diseguaglianza (2) viene tra l'altro utilizzata in [2] per fornire delle formule di maggiorazione con le relative migliori costanti. L'operatore diffe-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del GNAFA.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1979.

(1) Data una funzione misurabile $u(x)$ si chiama *funzione distribuzione* di $u(x)$ la funzione

$$\mu(t) = \text{mis}\,\{x \in \Omega : |u(x)| > t\};$$

si definisce *riordinamento descrescente* di $u(x)$ la funzione

$$u^*(s) = \inf\,\{t \geq 0 : \mu(t) < s\};$$

si dice poi *riordinamento sferico* di $u(x)$ la funzione $u^{\#}(x) = u^*(C_n |x|^n)$ dove C_n è la misura della sfera di R^n di raggio unitario.

Per le principali proprietà dei riordinamenti cfr. [1], [2].

renziale e il dominio che realizzano tali migliori costanti sono l'operatore di Laplace e una sfera.

Scopo di questa nota è di dimostrare un risultato analogo per il problema di Dirichlet con dato omogeneo relativo ad equazioni del tipo

$$(3) \qquad -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\, u_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(b_i(x)\, u) + c(x)\, u = f(x)$$

$$(3)^* \qquad -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\, u_{x_j}) - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u = f(x)$$

nelle ipotesi (1) e

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} |b_i(x)|^2 \leq \mathrm{B}^2.$$

Più precisamente si ha

TEOREMA 1. *Nelle ipotesi* (1) *e* (4), *se* Ω *è un aperto di* R^n *di misura finita e se* $f(x) \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ *con* $p \geq 2n/(n+2)$ *se* $n > 2$, $p > 1$ *se* $n = 2$, *detta* $u(x)$ *la soluzione debole* [(2)] *del problema di Dirichlet con dato omogeneo relativa all'equazione* (3) *si ha*

$$(5) \qquad u^{\#}(x) \leq \bar{v}(x)$$

dove $\bar{v}(x)$ *è la soluzione del problema*

$$(6) \qquad \begin{cases} -\Delta\bar{v} - \mathrm{B}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}\left(\frac{x_i}{|x|}\,\bar{v}\right) = f^{\#}(x) & \text{in } \Omega^{\#} \\ \bar{v}(x) = 0 & \text{su } \partial\Omega^{\#}. \end{cases}$$

Posto

$$\Phi(t) = \int_{|u|>t} \left[\sum_{i,j} a_{ij}(x)\, u_{x_i} u_{x_j} - \sum_i b_i(x)\, u u_{x_i}\right] \mathrm{d}x\,,$$

procedendo come nella dimostrazione della (48) di [2] riesce

$$(7) \qquad -\Phi'(t) \leq \int_0^{\mu(t)} f^*(s)\, \mathrm{d}s$$

dove $\mu(t)$ è la funzione distribuzione di $u(x)$ e $f^*(s)$ è il riordinamento di $f(x)$.

(2) Al solito per soluzione debole si intende una funzione di $\mathrm{H}_0^{1,2}(\Omega)$ tale che

$$\sum_{i,j} \int_\Omega [a_{ij}(x)\, u_{x_i} \varphi_{x_j} - b_i(x)\, u\varphi_{x_i} + cu\varphi]\, \mathrm{d}x = \int_\Omega f\varphi\, \mathrm{d}x \qquad \forall\varphi \in \mathrm{H}_0^{1,2}(\Omega)\,.$$

Essendo (cfr. (44) di [2]):

$$\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{|u|>t}|\mathrm{D}u|\,\mathrm{d}x\right)^2\leq[-\mu'(t)]\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{|u|>t}\sum_{i,j}a_{ij}(x)\,u_{x_i}u_{x_j}\,\mathrm{d}x\right),$$

dalla (7) si ottiene

$$\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{|u|>t}|\mathrm{D}u|\,\mathrm{d}x\right)^2\leq[-\mu'(t)]\left(\int_0^{\mu(t)}f^*(s)\,\mathrm{d}s-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{|u|>t}\sum_i b_i(x)\,uu_{x_i}\,\mathrm{d}x\right).$$

D'altra parte

$$\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{|u|>t}\sum_i b_i(x)\,uu_{x_i}\,\mathrm{d}x\right)=\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{t<|u|\leq t+h}\sum_i b_i(x)\,uu_{x_i}\,\mathrm{d}x\right)\leq$$

$$\leq\mathrm{B}\lim_{h\to 0}\left[(t+h)\frac{1}{h}\int\limits_{t<|u|\leq t+h}|\mathrm{D}u|\,\mathrm{d}x\right]=-\mathrm{B}t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{|u|>t}|\mathrm{D}u|\,\mathrm{d}x$$

e quindi

$$\frac{\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{|u|>t}|\mathrm{D}u|\,\mathrm{d}x\right)^2}{[-\mu'(t)]}-\mathrm{B}t\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{|u|>t}|\mathrm{D}u|\,\mathrm{d}x\right)-\int_0^{\mu(t)}f^*(s)\,\mathrm{d}s\leq 0. \tag{8}$$

Essendo per la diseguaglianza isoperimetrica di De Giorgi [4]

$$n\mathrm{C}_n^{1/n}\,\mu(t)^{1-1/n}\leq\mathrm{P}\{x:|u(x)|>t\},$$

dove P è il perimetro nel senso di De Giorgi, e dalla formula di Fleming e Rishel [3]

$$\int\limits_{|u|>t}|\mathrm{D}u|\,\mathrm{d}x=\int_t^{+\infty}\mathrm{P}\{x:|u(x)|>\xi\}\,\mathrm{d}\xi$$

si ricava:

$$0\leq n\mathrm{C}_n^{1/n}\,\mu(t)^{1-1/n}\leq-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{|u|>t}|\mathrm{D}u|\,\mathrm{d}x;$$

da qui e dalla (8) segue anche

$$\frac{(n\mathrm{C}_n^{1/n}\,\mu(t)^{1-1/n})^2}{[-\mu'(t)]}-\mathrm{B}t\,(n\mathrm{C}_n^{1/n}\,\mu(t)^{1-1/n})-\int_0^{\mu(t)}f^*(s)\,\mathrm{d}s\leq 0$$

e quindi

$$1 \leq \frac{B}{nC_n^{1/n}} \frac{t}{\mu(t)^{1-1/n}} [-\mu'(t)] + \frac{1}{n^2 C_n^{2/n}} \frac{[-\mu'(t)]}{\mu(t)^{2-2/n}} \int_0^{\mu(t)} f^*(s)\, ds ;$$

integrando tra o e t e tenendo conto che $u^*(\mu(s)) \geq s$ si ricava:

$$t \leq \frac{B}{nC_n^{1/n}} \int_{\mu(t)}^{\mathrm{mis}\,\Omega} u^*(r)\, r^{-1+1/n}\, dr + \frac{1}{n^2 C_n^{2/n}} \int_{\mu(t)}^{\mathrm{mis}\,\Omega} r^{-2+2/n}\, dr \int_0^r f^*(s')\, ds' ;$$

in definitiva si ha

$$u^*(s) = v_0^*(s) \leq \frac{B}{nC_n^{1/n}} \int_s^{\mathrm{mis}\,\Omega} u^*(r)\, r^{-1+1/n}\, dr + \tag{9}$$

$$+ \frac{1}{n^2 C_n^{2/n}} \int_s^{\mathrm{mis}\,\Omega} r^{-2+2/n}\, dr \int_0^r f^*(s')\, ds' = v_1^*(s) .$$

Costruiamo adesso la successione $\{v_k(x)\}$ ponendo

$$v_k(x) = \frac{B}{nC_n^{1/n}} \int_{C_n|x|^n}^{\mathrm{mis}\,\Omega} v_{k-1}^*(r)\, r^{-1+1/n}\, dr + \frac{1}{n^2 C_n^{2/n}} \int_{C_n|x|^n}^{\mathrm{mis}\,\Omega} r^{-2+2/n}\, dr \int_0^r f^*(s')\, ds' ; \tag{10}$$

si ha facilmente dalla (9) e dalla (10)

$$v_k(x) \leq v_{k+1}(x) \qquad \text{in} \quad \Omega^{\#}.$$

Faremo vedere che la successione $\{v_k(x)\}$ converge in L^2 ad una funzione $\bar{v}(x)$; passando allora al limite nella (10) si ha

$$\bar{v}(x) = \frac{B}{nC_n^{1/n}} \int_{C_n|x|^n}^{\mathrm{mis}\,\Omega} \bar{v}^*(r)\, r^{-1+1/n}\, dr + \frac{1}{n^2 C_n^{2/n}} \int_{C_n|x|^n}^{\mathrm{mis}\,\Omega} r^{-2+2/n}\, dr \int_0^r f^*(s)\, ds .$$

È facile controllare che $\bar{v}(x)$ è soluzione del problema (6) ed inoltre sussiste la (5) per la crescenza della successione $\{v_k(x)\}$.

Per dimostrare che la successione $\{v_k(x)\}$ converge in L^2 osserviamo che dalla (10) segue:

$$|Dv_{k+1}| = -\frac{d}{d\rho} v_{k+1}(\rho) = Bv_k(\rho) + \frac{1}{nC_n\, \rho^{n-1}} \int_0^{C_n \rho^n} f^*(s)\, ds \tag{11}$$

dove si è posto

$$v_k(\rho) = v_k(x) \qquad \text{se} \quad \rho = |x| .$$

Dalla (11) segue

$$\int_0^\infty \rho^{-r}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(v_{k+1}-v_k)\right|^2 \mathrm{d}\rho = \mathrm{B}^2\int_0^\infty \rho^{-r}\left|\int_\rho^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_k-v_{k-1})\,\mathrm{d}t\right|^2 \mathrm{d}\rho\,.$$

Applicando al secondo membro di quest'ultima la diseguaglianza di Hardy [3] (cfr. teor. 330 di [1]) si ottiene:

$$\int_0^\infty \rho^{-r}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(v_{k+1}-v_k)\right|^2 \mathrm{d}\rho \leq \mathrm{B}^2\left(\frac{2}{|r-1|}\right)^2\int_0^\infty \rho^{-r}\left|\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(v_k-v_{k-1})\right|^2 \mathrm{d}\rho \leq$$

$$\leq \mathrm{B}^2\left(\frac{2}{|r-1|}\right)^2\left(\frac{\operatorname{mis}\Omega}{\mathrm{C}_n}\right)^{2/n}\int_0^\infty \rho^{-r}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(v_k-v_{k-1})\right|^2 \mathrm{d}\rho\,.$$

Iterando il procedimento si ha

$$\left(\int_0^\infty \rho^{-r}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(v_{k+1}-v_k)\right|^2 \mathrm{d}\rho\right)^{\frac12} \leq$$

$$\leq \left[\frac{2\,\mathrm{B}}{|r-1|}\left(\frac{\operatorname{mis}\Omega}{\mathrm{C}_n}\right)^{1/n}\right]^{k-1}\left(\int_0^\infty \rho^{-r}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(v_1-v_0)\right|^2 \mathrm{d}\rho\right)^{\frac12}.$$

Scegliamo $r<1$ in modo tale che $\{2\,\mathrm{B}\,(\operatorname{mis}\Omega/\mathrm{C}_n)^{1/n}\}/|r-1|<1$; allora la successione $\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}v_k\right\}$ converge nello spazio per cui è finita la norma

$$\left[\int_0^\infty \rho^{-r}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}v_k\right|^2 \mathrm{d}\rho\right]^{\frac12}.$$

Applicando ancora la diseguaglianza di Hardy si ha:

$$\int_0^\infty \rho^{-r-2}\,|v_{k+h}-v_k|^2\,\mathrm{d}\rho \leq \left(\frac{2}{|r+1|}\right)^2\int_0^\infty \rho^{-r}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(v_{k+h}-v_k)\right|^2 \mathrm{d}\rho$$

quindi la successione $\{v_k\}$ converge nello spazio per cui è finita la norma

$$\left[\int_0^\infty \rho^{-r-2}\,|v_k|^2\,\mathrm{d}\rho\right]^{\frac12}.$$

(3) Se $p>1$ ed $r<1$ riesce:

$$\int_0^\infty x^{-r}\left(\int_x^\infty f(t)\,\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}x \leq \left(\frac{p}{|r-1|}\right)^p\int_0^\infty x^{-r}(xf)^p\,\mathrm{d}x\,.$$

Per la (11) anche $\left\{\frac{d}{d\rho} v_k\right\}$ converge in tale spazio; cosi procedendo si dimostra che $\left\{\frac{d}{d\rho} v_k\right\}$ converge nello spazio per cui è finita la norma

$$\left[\int_0^\infty \rho^{-r-2h} \left|\frac{d}{d\rho} v_k\right|^2 d\rho\right]^{\frac{1}{2}}$$

per ogni intero $h > 0$; scelti r ed h in modo tale che sia $-r-2h = n-1$ si ottiene che la successione $\{v_k\}$ converge in $H_0^{1,2}$. Da qui l'asserto.

Osserviamo che dal teorema 1 discende che il problema (6) è il «peggior problema» nella classe dei problemi di Dirichlet con dato omogeneo per equazioni del tipo (3) verificanti le ipotesi (1) e (4); con ciò intendiamo dire che in formule di maggiorazione del tipo

$$\|u\|_X \le C \|f\|_Y$$

dove X e Y sono spazi tipo L^p o più in generale tipo Lorentz, la migliore costante è raggiunta in corrispondenza del problema (6).

Vogliamo mostrare adesso che

TEOREMA 2. *Il «peggior problema» nella classe dei problemi di Dirichlet con dato al bordo nullo relativi ad equazioni del tipo* (3)* *verificanti le ipotesi* (1) *e* (4) *in un dominio* Ω *limitato di* R^n *è il problema duale di* (6) *e cioè*

$$\text{(12)}\qquad \begin{cases} -\Delta \underline{v} + B \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|} \partial_{x_i} \underline{v} = g^{\#} & \text{in } \Omega^{\#} \\ \underline{v} = 0 & \text{su } \partial\Omega^{\#}. \end{cases}$$

Tale dimostrazione si consegue con ragionamenti di dualità.

Infatti detti X e X', Y e Y' coppie di spazi di tipo L^p o di tipo Lorentz tali che X' sia il duale di X o viceversa ed Y' sia il duale di Y o viceversa si ha:

$$\text{(13)}\qquad \sup_L \left(\sup_f \frac{\|u\|_X}{\|f\|_Y}\right) = \sup_{L^*} \left(\sup_g \frac{\|v\|_{Y'}}{\|g\|_{X'}}\right)$$

e ciò consegue dal fatto che l'operatore di Green del problema (3)* è lo aggiunto funzionale dell'operatore di Green del problema (3); con una osservazione analoga relativa ai problemi (6) e (12), dalla (13) e dal teorema 1 segue:

$$\sup_g \frac{\|\underline{v}\|_{Y'}}{\|g\|_{X'}} = \sup_f \left(\frac{\|\bar{v}\|_X}{\|f\|_Y}\right) = \sup_L \left(\sup_f \frac{\|u\|_X}{\|f\|_Y}\right) = \sup_{L^*} \left(\sup_g \frac{\|v\|_{Y'}}{\|g\|_{X'}}\right).$$

e quindi l'asserto.

Osserviamo per finire che il problema (12) si può facilmente studiare dal punto di vista delle migliori costanti giacchè la sua soluzione si scrive esplicitamente in forma molto semplice avendosi:

$$\underline{v}(x) = \frac{1}{n^2 C_n^{2/n}} \int_{C_n|x|^n}^{\text{mis}\,\Omega} r^{-2+2/n} e^{B[r/C_n]^{1/n}} \, dr \int_0^r f^*(s) \, e^{-B[s/C_n]^{1/n}} \, ds .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD and G. POLYA (1964) – *Inequalities*, Cambridge Univ. press.

[2] G. TALENTI (1976) – *Elliptic equations and rearrangements*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », (4) 3.

[3] W. FLEMING–R. RISHEL (1960) – *An integral formula for total gradient variation.* « Arch. Math. », *11*.

[4] E. DE GIORGI (1954) – *Su una teoria generale della misura* (*r* — 1) *dimensionale in uno spazio ad r dimensioni*, « Ann. Mat. Pura Appl. », *36*.