ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

PAOLO BOCCOTTI

Le distribuzioni degli intervalli tra gli zeri di funzioni aleatorie del tempo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **66** (1979), n.1, p. 28–31.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1979_8_66_1_28_0>

Oceanografia. — *Le distribuzioni degli intervalli tra gli zeri di funzioni aleatorie del tempo* (*). Nota II di PAOLO BOCCOTTI (**), presentata (***) dai Corrisp. B. DE FINETTI e E. MARCHI.

SUMMARY. — Some distributions of intervals between zeros of gaussian random processes are obtained for given energy spectra.

Utilizzando le serie di funzioni $S(T)$ e $\tilde{S}(\tau)$ definite rispettivamente nei paragrafi 2 e 3 della Nota I si ricavano alcune funzioni densità di probabilità $\tilde{p}_0(\tau)$ per gli intervalli (normalizzati) tra due zeri consecutivi di un processo aleatorio di tipo gaussiano. Ciascuna funzione $\tilde{p}_0(\tau)$ è relativa ai processi caratterizzati da spettri di energia appartenenti ad una medesima famiglia. Tali famiglie di spettri sono state individuate nella Nota I e si ottengono con la relazione (3.13), mediante la definizione di funzioni $f(\bar{\sigma})$ che soddisfino le condizioni (3.14), tutte riportate nella Nota citata.

La numerazione dei paragrafi e delle formule della presente Nota, segue quella della Nota I.

4. Per una funzione aleatoria ζ così come definita nel paragrafo 2 della Nota I, si considerano gli n semiperiodi apparenti (intervalli di tempo tra due zeri consecutivi) successivi agli istanti t pei cui $\zeta(t) = 0$. Risultano così definite n variabili ordinate $T_1, \cdots, T_n$. Se queste ultime sono fra di loro stocasticamente indipendenti, quale che sia n, sussiste la seguente relazione – cfr. Mc Fadden (1958)

$$S(T) = p_0(T) + \int_0^T p_0(x)\, S(T-x)\, dx \,. \tag{4.1}$$

Essa può essere ricondotta alla forma

$$\tilde{S}(\tau) = \tilde{p}_0(\tau) + \int_0^\tau \tilde{p}_0(x)\, \tilde{S}(\tau - x)\, dx \,. \tag{4.2}$$

Nota la $\tilde{S}(\tau)$ è possibile, attraverso la (4.2), ottenere numericamente la $\tilde{p}_0(\tau)$. Sono state analizzate diverse funzioni $\tilde{S}(\tau)$ ricavate da altrettante assegnate $f(\bar{\sigma})$ utilizzando le relazioni (3.12), (3.15) stabilite nella Nota I

(*) Ricerca eseguita presso l'Istituto di Idraulica dell'Università di Genova.

(**) Ing. Paolo Boccotti borsista C.N.R. presso l'Istituto di Idraulica dell'Università di Genova, via Montallegro 1 – 16145 Genova.

(***) Nella seduta del 16 dicembre 1978.

per i processi di tipo gaussiano (1.1). Nelle figg. 1 e 3 sono rappresentate alcune funzioni $\tilde{p}_0(\tau)$ e nelle Tabelle I e II sono riportati alcuni valori delle corrispondenti funzioni di probabilità totale $\tilde{P}_0(\tau)$ [1].

TABELLA I. – $\tilde{P}_0(\tau)$ per $f(\bar{\sigma}) = \alpha_1 \bar{\sigma}^{20} e^{-\beta_1 \bar{\sigma}}$ [2]

τ	$\tilde{P}_0(\tau)$	τ	$\tilde{P}_0(\tau)$	τ	$\tilde{P}_0(\tau)$
0.5	.127408	3.5	.992994	6.5	.999845
1.0	.557552	4.0	.996356	7.0	.999929
1.5	.899652	4.5	.998230	7.5	.999967
2.0	.955954	5.0	.998760	8.0	.999979
2.5	.979523	5.5	.999439	8.5	.999990
3.0	.992040	6.0	.999757	9.0	.999995

TABELLA II. – $\tilde{P}_0(\tau)$ per $f(\bar{\sigma}) = \alpha_4 e^{-\beta_4 \bar{\sigma}^2}$

τ	$\tilde{P}_0(\tau)$	τ	$\tilde{P}_0(\tau)$	τ	$\tilde{P}_0(\tau)$
0.5	.331618	4.0	.988999	7.5	.999826
1.0	.615877	4.5	.993919	8.0	.999904
1.5	.786890	5.0	.996639	8.5	.999947
2.0	.882160	5.5	.998142	9.0	.999970
2.5	.934862	6.0	.998973	9.5	.999983
3.0	.963995	6.5	.999432	10.0	.999991
3.5	.980098	7.0	.999686	10.5	.999995

(1) I coefficienti α_i, β_i delle funzioni $f(\bar{\sigma})$ considerate sono determinati in modo che esse soddisfino le condizioni (3.14). Il valore del parametro di larghezza δ (definito in appendice A della Nota I) non è significativo per la famiglia di spettri di tipo razionale (fig. 3) in quanto tale famiglia non presenta momenti m di qualsiasi ordine.

(2) Le Tabelle I e II consentono il calcolo (per interpolazione) fino all'evento di probabilità 1 : 100.000. Una tale valutazione può ritenersi, ad esempio, come limite superiore per le necessità connesse con il calcolo delle caratteristiche delle onde generate dal vento.

Qualora si realizzi la condizione di indipendenza stocastica dei semiperiodi apparenti la funzione $\tilde{p}_0(\tau)$ ricavata dalla $\tilde{S}(\tau)$ mediante la (4.2) è tale che siano soddisfatte le condizioni

$$(a) \qquad \tilde{p}_0(\tau) \geq 0 \qquad \text{per} \quad \tau \geq 0 \ ,$$

$$(b) \qquad \tilde{P}_0(\tau) \rightarrow 1 \qquad \text{per} \quad \tau \rightarrow \infty \, .$$

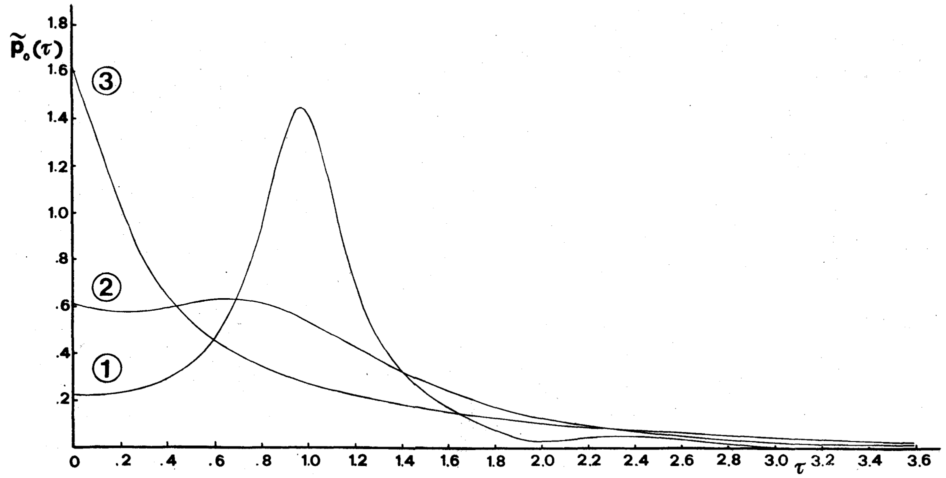

Fig. 1. – Funzioni $\tilde{p}_0(\tau)$ per: ① $f(\tilde{\sigma}) = \alpha_1 \tilde{\sigma}^{20} e^{-\beta_1 \tilde{\sigma}}$ ($\delta = 0.045$), ② $f(\tilde{\sigma}) = \alpha_2 \tilde{\sigma}^2 e^{-\beta_2 \tilde{\sigma}}$ ($\delta = 0.250$), ③ $f(\tilde{\sigma}) = \alpha_3 \tilde{\sigma}^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta_3 \tilde{\sigma}}$ ($\delta = 0.666$).

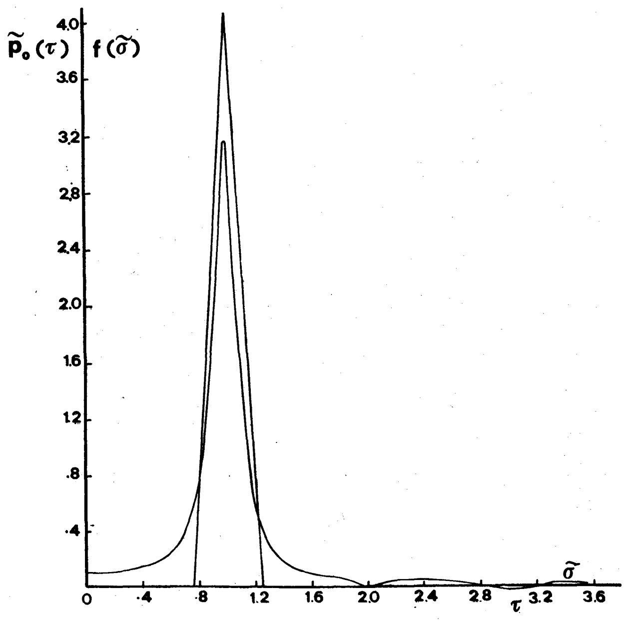

Fig. 2. – Funzione $\tilde{p}_0(\tau)$ ricavata con la (4.2) per una famiglia di spettri triangolari.

Se viceversa per un'assegnata serie $\tilde{S}(\tau)$ la (4.2) ammette come soluzione una funzione $\tilde{p}_0(\tau)$ tale che siano soddisfatte le (*a*) e (*b*), si realizza la condizione necessaria affinché il processo goda della proprietà di indipendenza stocastica dei semiperiodi apparenti. Per altro lo sviluppo della soluzione per i processi di tipo gaussiano (1.1) porta a ritenere che le condizioni (*a*) e (*b*) siano anche sufficienti. Infatti le serie $\tilde{S}(\tau)$, corrispondenti a quegli

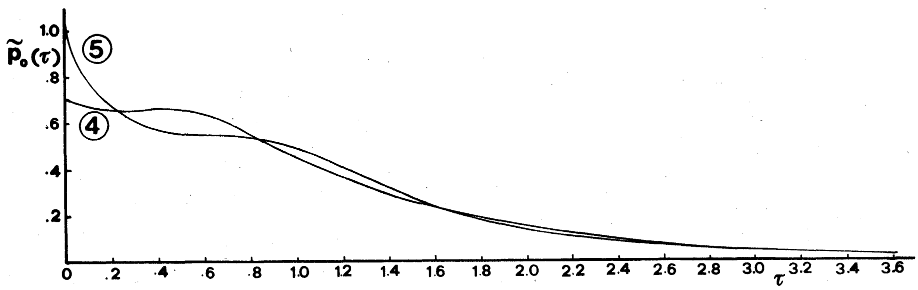

Fig. 3. - Funzioni $\tilde{p}_0(\tau)$ per: (4) $f(\tilde{\sigma}) = \alpha_4 e^{-\beta_4 \tilde{\sigma}^2}$ $(\delta = 0.363)$, (5) $f(\tilde{\sigma}) = \alpha_5 \tilde{\sigma}^2/(\tilde{\sigma}^2 + \beta_5^2)^4$

spettri di energia per i quali si può prevedere che non si realizzi la suddetta proprietà di indipendenza stocastica, non ammettono come soluzione della (4.2) funzioni tali che siano soddisfatte entrambe le relazioni (*a*) e (*b*). Ciò accade quando gli spettri sono stretti, caratterizzati da parametri δ di larghezza tendenti a zero ed il fenomeno è più marcato per gli spettri di energia aventi un dominio finito (3). Le realizzazioni delle variabili aleatorie associate a processi (1.1) di spettro stretto, presentano una lenta evoluzione nel tempo intorno ai rispettivi valori medi. In particolare ciò si verifica per le ampiezze e semiperiodi delle onde apparenti e, pertanto, le variabili ordinate definite dai valori che successivamente assumono tali grandezze non sono fra loro stocasticamente indipendenti. A tale proposito giova ricordare che la distribuzione rayleiana per le ampiezze apparenti, in un processo di tipo gaussiano (1.1), è stata ricavata nell'ipotesi di una loro lenta variazione nel tempo attorno al valore medio e che, per la soddisfazione di tale ipotesi, si è imposta la condizione di spettro di energia stretto.

BIBLIOGRAFIA

MC FADDEN J. A. (1958) - «Trans. Inst. Rad. Engr.», IT-4, 14.

(3) In fig. 2 è riportata la funzione $f(\tilde{\sigma})$ corrispondente ad una famiglia di spettri triangolari individuata dal valore $\delta = 0.01$ del parametro di larghezza. La relativa funzione $\tilde{p}_0(\tau)$ ricavata mediante la (4.2) presenta un massimo per $\tau = 0.99$ ed un minimo per $\tau = 3.04 : \tilde{p}_0(3.04) = -0.026$. La funzione $\tilde{p}_0(\tau)$ tende a zero con oscillazioni di ampiezza smorzantesi per τ che tende all'infinito e, similmente, ad uno tende la funzione $\tilde{P}_0(\tau)$.