
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

LUCILLA BASSOTTI RIZZA

**Verifica numerica della celebre formula asintotica di
H. Weyl per gli autovalori dell'elasticità**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 65 (1978), n.5, p. 171–175.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_65_5_171_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 novembre 1978

Presiede il Presidente della Classe ANTONIO CARRELLI

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

Analisi numerica. — *Verifica numerica della celebre formula asintotica di H. Weyl per gli autovalori dell'elasticità (*)*. Nota di LUCILLA BASSOTTI RIZZA, presentata (**) dal Socio G. FICHERA.

SUMMARY. — The eigenvalue problem for the linear elasticity operator in a cube under the Dirichlet condition is considered. Lower and upper bounds for the eigenvalues, obtained in a previous paper, are compared here with the values derived from the classical asymptotic formula due to H. Weyl. The conclusion is the following: the asymptotic formula is not satisfactory for the first 170 eigenvalues.

1. Sia $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ un punto dello spazio cartesiano R^3 , K il cubo definito da $|x_i| < \pi/2$, $\mathcal{C}^\infty(K)$ lo spazio dei vettori a tre componenti funzioni reali di classe C^∞ in K . In corrispondenza all'operatore vettoriale dell'elasticità

$$(1) \quad L_\sigma \equiv \Delta_2 + \sigma \operatorname{grad} \operatorname{div}$$

(σ denota una costante positiva assegnata), si consideri il seguente problema di autovalori

$$(2) \quad L_\sigma w + \lambda w = 0 \quad \text{in } K, \quad w = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}K,$$

nello spazio vettoriale $U(K)$ dei vettori di $\mathcal{C}^\infty(K)$ con componenti e loro derivate prime funzioni di quadrato sommabile secondo Lebesgue in K . Siano

$$(3) \quad \lambda_1^{(\sigma)} \leq \lambda_2^{(\sigma)} \leq \dots \leq \lambda_k^{(\sigma)} \leq \dots$$

gli autovalori di (2), disposti in successione non decrescente e ciascuno ripetuto un numero di volte uguale alla molteplicità.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale Informatica Matematica del C.N.R., nell'anno 1977-78.

(**) Nella seduta del 10 novembre 1978.

In un lavoro in collaborazione con G. Di Cola ⁽¹⁾, ho mostrato come, utilizzando una decomposizione dello spazio $\mathcal{C}^\infty(K)$ in sedici sottospazi invarianti per l'operatore L_σ , si possano ottenere limitazioni rigorose per difetto e per eccesso dei primi autovalori del problema (2). Per il calcolo delle approssimazioni per eccesso è stato usato il metodo di Rayleigh-Ritz, operando in ciascuno dei sottospazi con matrici di ordine compreso fra 55 e 65. Le approssimazioni per difetto sono state invece ottenute costruendo in ciascun sottospazio un opportuno operatore $\tilde{L}_\sigma$ intermedio fra L_0 e L_σ ⁽²⁾ e applicando al problema analogo al (2) per l'operatore $\tilde{L}_\sigma$ il metodo degli invarianti ortogonali di G. Fichera.

In [1] sono riportate limitazioni rigorose dei primi settanta autovalori del problema (2) per $\sigma = 1$ e 2, e quelle dei primi cinquanta autovalori per $\sigma = 3, 4$ e 5 ⁽³⁾. Limitazioni di questo tipo concernenti il problema considerato non risultano apparse precedentemente nella letteratura.

È noto però che nel 1915 H. Weyl ha stabilito una formula asintotica ⁽⁴⁾, la quale per l'autovalore $\lambda_n^{(\sigma)}$ fornisce il valore approssimato

$$(4) \quad \lambda_n^{(\sigma)} = \left(\frac{6}{\pi}\right)^{2/3} \frac{\sigma + 1}{[1 + 2(\sigma + 1)^{3/2}]^{2/3}} n^{2/3}.$$

Le difficoltà che il calcolo rigoroso degli autovalori (limitazioni per difetto e per eccesso) presenta nei problemi tridimensionali, non ha consentito prima di ora una verifica numerica della formula di H. Weyl.

In questa Nota si confrontano i risultati conseguiti in [1] e altri ottenuti successivamente sfruttando le tecniche ivi elaborate, con i risultati desunti dalla celebre formula di H. Weyl. Nelle tabelle che seguono sono riportati, nell'ordine, valori per difetto e per eccesso di $\lambda_n^{(\sigma)}$ e i corrispondenti valori $\lambda_n^{(\sigma)}$ ricavati dalla (4); sono stati considerati i casi $\sigma = 1, 2, 3, 4$ e 5.

n.	$\sigma = 1$			n.	$\sigma = 1$		
	difetto	eccesso	val. asint.		difetto	eccesso	val. asint.
1	3,868	3,872	0,870	30	13,18	13,58	8,40
2	3,868	3,872	1,381	40	16,60	17,44	10,18
3	3,868	3,872	1,810	50	17,22	18,73	11,81
4	6,132	6,146	2,192	60	18,83	20,30	13,33
5	6,132	6,146	2,544	70	19,75	22,03	14,78
6	6,132	6,146	2,873	80	21	24,09	16,15
7	7,421	7,468	3,184	90	21	25,87	17,47
8	7,421	7,468	3,480	100	22	26,99	18,74
9	7,421	7,468	3,764	110	24	28,76	19,97
10	8,720	8,822	4,038	120	26	30	21,16
20	10,774	10,985	6,410	130	26	30,85	22,32

(1) Si confronti [1].

(2) Per $\sigma = 0$, L_σ si riduce a $L_0 = \Delta_2$.

(3) Le limitazioni sono state ottenute con l'ausilio di un minicalcolatore PDP 11/40 Digital.

(4) Si confronti [3] p. 48.

n.	$\sigma = 2$			n.	$\sigma = 3$		
	difetto	eccesso	val. asint.		difetto	eccesso	val. asint.
1	4,586	4,607	0,912	1	5,213	5,257	0,931
2	4,586	4,607	1,448	2	5,213	5,257	1,478
3	4,586	4,607	1,897	3	5,213	5,257	1,937
4	6,175	6,207	2,298	4	6,200	6,241	2,347
5	6,175	6,207	2,667	5	6,200	6,241	2,723
6	6,175	6,207	3,012	6	6,200	6,241	3,075
7	8,516	8,660	3,338	7	9,072	9,235	3,408
8	8,516	8,660	3,648	8	9,103	9,235	3,725
9	8,516	8,660	3,946	9	9,392	9,665	4,029
10	9,072	9,201	4,234	10	9,392	9,665	4,323
20	12,024	12,467	6,720	20	12,870	13,692	6,862
30	14	14,66	8,81	30	14,54	15,69	8,99
40	16,60	18,24	10,67	40	16,60	18,92	10,89
50	17,22	19,25	12,38	50	17,27	20,41	12,64
60	19,23	22,53	13,98	60	19,23	23,43	14,27
70	19,75	24,66	15,49	70	19,75	25,53	15,82
80	21	25,78	16,93	80	21	26,91	17,29
90	21	27,18	18,31	90	21	28,62	18,70
100	22	29,12	19,65	100	22	30,22	20,06

n.	$\sigma = 4$			n.	$\sigma = 5$		
	difetto	eccesso	val. asint.		difetto	eccesso	val. asint.
1	5,729	5,843	0,942	1	6,219	6,352	0,948
2	5,729	5,843	1,495	2	6,219	6,352	1,505
3	5,729	5,843	1,959	3	6,219	6,352	1,973
4	6,214	6,265	2,373	4	6,233	6,363	2,390
5	6,214	6,265	2,754	5	6,233	6,363	2,773
6	6,214	6,265	3,110	6	6,233	6,363	3,131
7	9,072	9,259	3,447	7	9,072	9,346	3,470
8	9,110	9,259	3,767	8	9,112	9,347	3,793
9	10,056	10,476	4,075	9	10,534	11,007	4,103
10	10,056	10,476	4,372	10	10,534	11,007	4,402
20	13,38	14,25	6,94	20	13,57	14,34	6,99
30	14,77	16,29	9,09	30	14,90	16,65	9,16
40	16,60	19,47	11,02	40	16,70	20,06	11,09
50	17,46	21,20	12,78	50	17,51	21,67	12,87
60	19,23	23,89	14,73	60	19,23	25,35	14,53
70	19,75	26,17	16	70	19,75	26,52	16,11
80	21	28,08	17,49	80	21	28,87	17,61

Conviene concludere con alcune osservazioni. Nei casi considerati nelle tabelle, il valore asintotico non rientra mai nell'intervallo determinato dal difetto e dall'eccesso. Precisamente esso risulta sempre inferiore al corrispondente valore per difetto. Di conseguenza si può ottenere una limitazione inferiore dell'errore relativo $\varepsilon_n^{(\sigma)} = (\lambda_n^{(\sigma)} - \lambda_n^{*(\sigma)}) / \lambda_n^{(\sigma)}$ del valore asintotico. Ad esempio per $n = 50$, $\sigma = 1$ e $\sigma = 5$ si ha:

$$\varepsilon_{50}^{(1)} \geq 0,458 \quad , \quad \varepsilon_{50}^{(5)} \geq 0,360.$$

Ed ora un'osservazione che fornisce alcune indicazioni anche per valori di σ e n non contemplati nelle precedenti tabelle.

Tenendo presente che $\lambda_n^{*(\sigma)}$ è una funzione crescente di σ , si ponga

$$(5) \quad \lambda_n^* = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \lambda_n^{*(\sigma)} = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} n^{2/3}.$$

Confrontando gli autovalori $\lambda_n^{(0)}$ del problema considerato per $\sigma = 0$ ⁽⁵⁾ con i numeri λ_n^* , si ottiene, per ogni n non superiore a 170, $\lambda_n^* < \lambda_n^{(0)}$.

D'altra parte è noto che $\lambda_n^{(0)} \leq \lambda_n^{(\sigma)}$ per ogni n e per ogni σ . Di conseguenza, per $n \leq 170$ e per ogni σ risulta:

$$(6) \quad \lambda_n^{*(\sigma)} < \lambda_n^{(0)} \leq \lambda_n^{(\sigma)}$$

ed inoltre

$$(7) \quad \varepsilon_n^{(\sigma)} \geq (\lambda_n^{(0)} - \lambda_n^{*(\sigma)}) / \lambda_n^{*(\sigma)}.$$

Ad esempio per $\sigma = 10$ e $n = 80$ si ha

$$\lambda_{80}^{(0)} = 21, \quad \lambda_{80}^{*(10)} = 17.84, \quad \varepsilon_{80}^{(10)} \geq 0.177.$$

La disuguaglianza (6) mostra che, fin tanto che $n \leq 170$, per qualsiasi valore di σ , non conviene valersi della formula di H. Weyl, perchè come approssimazione di $\lambda_n^{(\sigma)}$ è preferibile utilizzare l'autovalore $\lambda_n^{(0)}$ di $L_0 = \Delta_2$; la formula di H. Weyl appare dunque inadeguata per $n \leq 170$ e per ogni σ .

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. BASSOTTI RIZZA e G. DI COLA (1978) - *Difetti ed eccessi degli autovalori di un problema di elasticità relativo al cubo*, « Riv. Mat. Univ. Parma » (4), IV.
- [2] G. FICHERA (1965) - *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, « Lect. Notes Math. », 8, Springer-Verlag.
- [3] H. WEYL (1915) - *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers*, « Rend. Circ. Mat. Palermo » (1), XXXIX.

(5) Gli autovalori $\lambda_n^{(0)}$ del Δ_2 sono noti. Per $n \leq 130$ si possono ad esempio desumere dalle tabelle dei valori per eccesso annesse al lavoro [1].