Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Raffaele Toscano, Aldo Maceri

Un problema di contatto tra membrane

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **65** (1978), n.1-2, p. 69–77.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_65_1-2_69_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1978.

Meccanica. — *Un problema di contatto tra membrane.* Nota (*) di RAFFAELE TOSCANO (**) e ALDO MACERI (***), presentata dal Corrisp. E. GIANGRECO.

RÉSUMÉ. — Deux membranes planes et parallèles d'égale forme, fixées aux bords et également tendues, sont chargées transversalement. Il s'agit d'un problème de contact unilateral qui équivaut à une inéquation variationnelle formulée dans un convenable espace de Sobolev. On donne les propriétés qualitatives de la solution.

L'analisi statica delle membrane sottili è da tempo di precipuo interesse per l'ingegneria meccanica e, più recentemente, per la bioingegneria. In tale ambito, alle indagini nel campo dei grandi spostamenti cominciano ad affiancarsi quelle relative a problemi di contatto.

Viene qui esaminato il sistema costituito da due membrane sottili piane, di forma uguale e mutuamente traslate della quantità $\delta \geq 0$ nella direzione z ortogonale al loro piano, ciascuna sottoposta ad un carico distribuito di asse $z f_i$ $(i = 1, 2)$, positivo secondo z, che si suppone di quadrato sommabile. Le membrane occupano una porzione di piano limitata Ω ed i punti del loro contorno sono vincolati; inoltre esse sono sottoposte ad un tiro uniforme per unità di lunghezza, a. Denotiamo con u_1 e con u_2 gli spostamenti verticali della membrana superiore e di quella inferiore rispettivamente, positivi nel verso di z; sicché da un lato deve risultare $u_1 + \delta \geq u_2$ su Ω, dall'altro $u_1 = u_2 = 0$ sulla frontiera di Ω. Ammettiamo infine di essere nel campo dei piccoli spostamenti (il che impone che δ sia piccolo) e che nella zona di contatto lo sforzo di reazione tra le membrane abbia asse z. In queste ipotesi, è noto dalla teoria degli involucri sottili [1], [2] che in ciascuna membrana persiste un tiro uniforme a; nella zona in cui non c'è contatto risulta $a\Delta_2 u_1 = -f_1$ e $a\Delta_2 u_2 = -f_2$, con $\Delta_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. Evidentemente, nella zona di contatto deve aversi $a\Delta_2 u_2 + f_2 \geq 0$ e $a\Delta_2 u_1 + a\Delta_2 u_2 = -f_1 - f_2$.

Così, il problema è quello di determinare una funzione vettoriale (u_1, u_2) tale che:

$$u_1 + \delta \geq u_2 \quad \text{su} \quad \Omega\,, (u_1 + \delta > u_2) \Rightarrow (a\Delta_2 u_1 = -f_1 \quad \text{e} \quad a\Delta_2 u_2 = -f_2)\,,$$
$$(u_1 + \delta = u_2) \Rightarrow (a\Delta_2 u_2 + f_2 \geq 0 \qquad \text{e} \qquad a\Delta_2 u_1 + a\Delta_2 u_2 = -f_1 - f_2)\,.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1978.
(**) Istituto di Matematica della Facoltà di Ingegneria di Napoli.
(***) Istituto di Scienza delle Costruzioni della Facoltà di Ingegneria di Napoli.

Lo studio viene eseguito, più in generale, per un aperto Ω di R^n e per un operatore differenziale A del secondo ordine uniformemente ellittico. I risultati che si sono ottenuti si riferiscono, per $n = 2$ ed $A = -a\Delta_2$, al problema proposto; per $n = 1$ ed $A = -a\dfrac{d^2}{dx^2}$, invece, all'analogo problema di contatto unilaterale tra funi. Com'è naturale, cercheremo la soluzione nello spazio $(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^2$. Nel N. 1, introdotti i simboli, si dimostra (Teorema 1), che il problema equivale ad una disequazione variazionale. Nel N. 2 viene dimostrata l'esistenza e l'unicità della soluzione (Teorema 2). Il procedimento seguito per dimostrare l'esistenza consente anche di stabilire un risultato di regolarità per la soluzione, che viene poi migliorato (Teorema 3). Nel N. 3, stabilito un teorema di dipendenza continua della soluzione dai dati (Teorema 4), viene evidenziata qualche proprietà dell'insieme di contatto (Teorema 5 e Teorema 6).

1. Siano: Ω un aperto limitato e connesso di R^n di classe C^2, $A = -\sum_{1}^{n}{}_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)$, con $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, un operatore differenziale del secondo ordine uniformemente ellittico, f_1 e f_2 elementi di $L^2(\Omega)$, δ un numero reale non negativo. Posto $H = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ (1), consideriamo il problema:

Trovare $(u_1, u_2) \in H \times H$ tale che:

$$
(1) \qquad \begin{cases} u_1 + \delta \geq u_2 \quad \text{q.o. su } \Omega \\ (u_1 + \delta > u_2) \Rightarrow (Au_1 = f_1 \quad \text{e} \quad Au_2 = f_2) \\ (u_1 + \delta = u_2) \Rightarrow (f_2 - Au_2 \geq 0 \quad \text{e} \quad Au_1 + Au_2 = f_1 + f_2)\,. \end{cases}
$$

Per eseguirne lo studio, rileviamo che $K = \{(v_1, v_2) \in H \times H \mid v_1 + \delta \geq v_2$ q.o. su $\Omega\}$ è un sottoinsieme chiuso, convesso e non vuoto di $H \times H$ e proviamo anzitutto che il problema (1) equivale alla disequazione variazionale:

$$
(2) \qquad (u_1, u_2) \in K : \int_\Omega [(v_1 - u_1)\, Au_1 + (v_2 - u_2)\, Au_2]\, dx \geq
$$
$$
\geq \int_\Omega [(v_1 - u_1)\, f_1 + (v_2 - u_2)\, f_2]\, dx \qquad \forall\, (v_1, v_2) \in K\,.
$$

TEOREMA 1. *Qualunque sia* (u_1, u_2) *elemento di* $H \times H$, *le proposizioni seguenti sono equivalenti*:

a) (u_1, u_2) *è soluzione del problema* (1).

(1) Supponiamo H munito del prodotto scalare in $H^2(\Omega)$. Evidentemente H ed $H \times H$ sono spazi di Hilbert.

b) *Risulta* q.o. su Ω:

$$u_1 + \delta \geq u_2 \quad , \quad Au_1 + Au_2 = f_1 + f_2 \, , \tag{3}$$
$$Au_2 - f_2 \leq 0 \, , \qquad (Au_1 - f_1)(u_1 + \delta - u_2) = 0 \, .$$

c) (u_1 , u_2) *è soluzione della disequazione variazionale* (2).

Dimostrazione. Ci limitiamo a provare che c) $\Rightarrow$ b), essendo evidenti le restanti implicazioni. La prima, la seconda e la terza delle (3) sono ovvie. Altresì ovvia è la quarta delle (3) nel caso $\delta = 0$. Se $\delta > 0$, posto $\forall x \in \Omega$ $\psi(x) = \delta$, si ha anzitutto che:

$$\forall \eta > 0 \qquad \exists \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \ni' \varphi(x) \leq \delta \qquad \forall x \in \Omega \quad \text{e} \quad \| \psi - \varphi \|_{L^2(\Omega)} < \eta \, . \tag{4}$$

Infatti, se $\{\Omega_m\}$ è una successione di aperti tale che $\overline{\Omega}_m \subset \Omega_{m+1}$ $\forall m \in N$, $\bigcup_{m \in N} \Omega_m = \Omega$, posto, $\forall m \in N$ e $\forall x \in R^n$, $\psi_m(x) = \delta$ se $x \in \Omega_m$ e $\psi_m(x) = 0$ se $x \notin \Omega_m$, e indicata, $\forall \varepsilon \in]0, \text{dist.}(\overline{\Omega}_m , \partial\Omega)[$, con $\varphi_{m\varepsilon}$ la regolarizzata di ordine ε di ψ_m, risulta:

$$\varphi_{m\varepsilon} \in C_0^\infty(\Omega) \, , \quad , \quad \forall x \in \Omega \qquad \varphi_{m\varepsilon}(x) \leq \delta \, ,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \| \varphi_{m\varepsilon} - \psi_m \|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad , \quad \lim_{m \to +\infty} \| \psi_m - \psi \|_{L^2(\Omega)} = 0 \, ,$$

da cui la (4). Questa implica l'esistenza di una successione $\{\varphi_n\}$ di funzioni appartenenti a $C_0^\infty(\Omega)$ tale che $\varphi_n(x) \leq \delta$ $\forall x \in \Omega$ e $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n = \psi$ in $L^2(\Omega)$. Poiché $(u_1 , u_1 + \varphi_n) \in K$, per la (2) si ha $\int_\Omega (Au_2 - f_2)(u_1 + \varphi_n - u_2) \, dx \geq 0$. Per $n \to +\infty$, ne segue che $\int_\Omega (Au_2 - f_2)(u_1 + \delta - u_2) \, dx \geq 0$ e di qui, tenuto conto della terza e della seconda delle (3), già acquisite, si trae che $(Au_1 - f_1)(u_1 + \delta - u_2) = 0$ q.o. su Ω.

2. Dimostriamo ora:

TEOREMA 2. *La disequazione variazionale* (2) (*ovvero il problema* (1)) *ammette soluzione unica*, $u = (u_1 , u_2)$, *la quale appartiene ad* $H^{2,p}(\Omega) \times H^{2,p}(\Omega)$ $(p \geq 2)$ *se* f_1 *ed* f_2 *sono in* $L^p(\Omega)$. *Inoltre esiste una costante* $c(\Omega)$ *tale che*:

$$\text{per} \quad h = 1 \, , 2 \qquad \| u_h \|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq c(\Omega) \left(\| f_1 \|_{L^p(\Omega)} + \| f_2 \|_{L^p(\Omega)} \right) .$$

Dimostrazione. L'unicità della soluzione è conseguenza dell'ellitticità uniforme di A. Allo scopo di provarne l'esistenza, osserviamo che $K' = \{(v_1 , v_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mid v_1 + \delta \geq v_2 \text{ q.o. su } \Omega\}$ è un sottoinsieme chiuso, convesso e non vuoto di $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ e poniamo,

$$\forall u = (u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \forall v = (v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

$$a(u, v) = \sum_1^n{}_{ij} \int_\Omega a_{ij} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial v_1}{\partial x_i} + \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \frac{\partial v_2}{\partial x_i} \right) dx \quad \text{e} \quad \langle L, v \rangle = \int_\Omega (v_1 f_1 + v_2 f_2) \, dx .$$

Consideriamo quindi la disequazione variazionale:

$$u \in K' : a(u, v - u) \geq \langle L, v - u \rangle \qquad \forall v \in K' . \tag{5}$$

Poiché la forma bilineare $a(u, v)$ è continua e coercitiva ed $L \in H^{-1}(\Omega)$ [(2)], la (5) ammette soluzione unica, che denotiamo con $u = (u_1, u_2)$. Vogliamo mostrare che u è soluzione della disequazione variazionale (2). Evidentemente, per stabilire ciò, basta far vedere che $u \in H \times H$. Orbene proveremo che, se f_1 ed f_2 sono in $L^p(\Omega)$ $(p \geq 2)$, allora $u \in H^{2,p}(\Omega) \times H^{2,p}(\Omega)$. Poniamo dunque, $\forall t \in [0, +\infty[$, $\varphi(t) = t^{p-1}$ e, $\forall w \in L^p(\Omega)$, $J(w) = |w|^{p-2} w$, sicché J è l'applicazione di dualità tra $L^p(\Omega)$ ed $L^{p'}(\Omega)$ $(1/p + 1/p' = 1)$ relativa a φ. Utilizzando un noto teorema di Hartman-Stampacchia [2], [5], si verifica facilmente che:

Per $(h, k) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$ e $\forall \varepsilon > 0$ esiste un elemento $u_{h\varepsilon}$ di $H_0^1(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega)$ tale che:

$$A u_{h\varepsilon} - f_k + J^{-1} \left(\frac{u_{h\varepsilon} - u_h}{\varepsilon} \right) = 0 \qquad \text{q.o.} \quad \text{su } \Omega. \tag{6}$$

Mostriamo che:

$$(u_1, u_{2\varepsilon}) \in K' \quad , \quad (u_{1\varepsilon}, u_2) \in K' . \tag{7}$$

Circa la prima delle (7), posto

$$z_{2\varepsilon} = \max\{u_{2\varepsilon} - \delta - u_1, 0\}, \; \Omega_{2\varepsilon} = \{x \in \Omega \mid u_{2\varepsilon}(x) - \delta - u_1(x) \geq 0\}, \text{ si}$$

ha $z_{2\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$; inoltre, essendo $(u_1 + z_{2\varepsilon}, u_2)$ elemento di K',

$$\sum_1^n{}_{ij} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial z_{2\varepsilon}}{\partial x_i} \, dx \geq \int_\Omega z_{2\varepsilon} f_1 \, dx .$$

Pertanto, tenuto conto della (6), $\int_{\Omega_{2\varepsilon}} z_{2\varepsilon} J^{-1} \left(\frac{u_{2\varepsilon} - u_2}{\varepsilon} \right) dx \leq 0$ e ciò, essendo $J^{-1} \left(\frac{u_{2\varepsilon} - u_2}{\varepsilon} \right) \geq 0$ su $\Omega_{2\varepsilon}$ (in quanto su $\Omega_{2\varepsilon}$ $u_{2\varepsilon} \geq u_1 + \delta \geq u_2$), implica

(2) $H^{-1}(\Omega)$ denota il duale di $H_0^1(\Omega)$.

$z_{2\varepsilon}\, J^{-1}\left(\dfrac{u_{2\varepsilon}-u_2}{\varepsilon}\right) = 0$ su $\Omega_{2\varepsilon}$. Ne segue $z_{2\varepsilon}=0$ q.o. su $\Omega_{2\varepsilon}$, e quindi la prima delle (7), non appena si osservi che, per quasi tutti i punti $x\in\Omega_{2\varepsilon}$,

$$\left(J^{-1}\left(\frac{u_{2\varepsilon}-u_2}{\varepsilon}\right)(x)=0\right)\Rightarrow\left(u_{2\varepsilon}(x)=u_2(x)\leq u_1(x)+\delta\right).$$

Circa la seconda delle (7), basta porre

$$z_{1\varepsilon}=\max\{u_2-\delta-u_{1\varepsilon}\,,\,0\}\quad,\quad \Omega_{1\varepsilon}=\{x\in\Omega\mid u_2(x)-\delta-u_{1\varepsilon}(x)\geq 0\}$$

e ripetere un ragionamento analogo. Sfruttando il fatto che $(u_1\,,u_2)$ è soluzione della (5), tenendo conto delle (7) e delle proprietà della applicazione di dualità, si perviene alla relazione:

$$\|Au_{h\varepsilon}-f_k\|_{L^p(\Omega)}\leq\|f_2-f_1\|_{L^p(\Omega)}\,. \tag{8}$$

Dalla (8), in virtù dell'ellitticità uniforme di A e di una nota formula di maggiorazione [3], si trae:

$$\|u_{h\varepsilon}\|_{H^{2,p}(\Omega)}\leq c\left(\|f_1\|_{L^p(\Omega)}+\|f_2\|_{L^p(\Omega)}\right),\qquad\text{con}\quad c=c(\Omega)\,. \tag{9}$$

Sia ora $\{\varepsilon_n\}$ una successione infinitesima di numeri positivi. Poiché, per la (9):

$$\|u_{h\varepsilon_n}\|_{H^{2,p}(\Omega)}\leq c(\Omega)\left(\|f_1\|_{L^p(\Omega)}+\|f_2\|_{L^p(\Omega)}\right), \tag{10}$$

è possibile estrarre dalla $\{u_{h\varepsilon_n}\}$ una successione, che indichiamo con lo stesso simbolo, debolmente convergente in $H^{2,p}(\Omega)$ verso un elemento ω_h. Pertanto, essendo l'immersione di $H^{2,p}(\Omega)$ in $L^{p'}(\Omega)$ compatta, e risultando, in virtù delle (6) e (8), $\lim\limits_{n\to+\infty}\|u_{h\varepsilon_n}-u_h\|_{L^{p'}(\Omega)}=0$, si ottiene $u_h=\omega_h$. In definitiva $(u_1\,,u_2)\in H^{2,p}(\Omega)\times H^{2,p}(\Omega)$; inoltre dalla (10) si desume che

$$\|u_h\|_{H^{2,p}(\Omega)}\leq c(\Omega)\left(\|f_1\|_{L^p(\Omega)}+\|f_2\|_{L^p(\Omega)}\right).$$

OSSERVAZIONE 1. Dalla (8) segue in modo ovvio:

$$\text{per}\quad h=1\,,2\qquad \|Au_h\|_{L^p(\Omega)}\leq 2\left(\|f_1\|_{L^p(\Omega)}+\|f_2\|_{L^p(\Omega)}\right). \tag{11}$$

OSSERVAZIONE 2. Si noti che, come si evince dalla dimostrazione del Teorema 2, le disequazioni variazionali (2) e (5) hanno la stessa soluzione.

Il Teorema 2, oltre a stabilire l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (1), ne offre anche un risultato di regolarità. Allo scopo di approfondire l'analisi della regolarità della soluzione, indichiamo per ogni $(\delta\,,f_1\,,f_2)\in[0\,,+\infty[\,\times(L^p(\Omega))^2\ (p\geq 2)$ e per $h=1\,,2$, con $u_h(\delta\,,f_1\,,f_2)$ la componente h–esima della soluzione, e premettiamo un lemma, che peraltro fornisce anche una proprietà della soluzione.

LEMMA. *Sia* $(f_1, f_2) \in (L^p(\Omega))^2$ $(p \geq 2)$. *Se* $f_1 \geq f_2$ q.o. *su* Ω, *allora*:

$$\forall \delta \in [0, +\infty[\qquad u_1(\delta, f_1, f_2) \geq u_2(\delta, f_1, f_2) \quad \text{q.o. su } \Omega. \tag{12}$$

Conseguentemente:

$$\forall \delta > 0 \qquad u_h(\delta, f_1, f_2) = u_h(0, f_1, f_2). \tag{13}$$

Inoltre:

$$(f_1 = f_2 \quad \text{q.o. su } \Omega) \Rightarrow (u_1(\delta, f_1, f_2) = u_2(\delta, f_1, f_2) \quad \text{q.o. su } \Omega), \tag{14}$$

$$(f_1 > f_2 \quad \text{q.o. su } \Omega) \Rightarrow (u_1(\delta, f_1, f_2) > u_2(\delta, f_1, f_2) \quad \text{q.o. su } \Omega). \tag{15}$$

Dimostrazione. La (12) è ovvia se $\delta = 0$. Se $\delta > 0$, posto $u_h = u_h(\delta, f_1, f_2)$ e $\vartheta = \max\{u_1, u_2\}$, si ha $\vartheta \in H_0^1(\Omega)$ e $\vartheta + \delta > u_2$ q.o. su Ω. Dunque $(\vartheta, u_2) \in K'$ e quindi (cfr. Osservazione 2):

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\vartheta - u_1) \, dx \geq \int_{\Omega} f_1 (\vartheta - u_1) \, dx. \tag{16}$$

D'altra parte, poiché $\vartheta - u_1 \geq 0$ q.o. su Ω e, per la terza delle (3), $Au_2 \leq f_2$ q.o. su Ω, risulta $\sum_{1}^{n}{}_{ij} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\vartheta - u_1) \, dx \leq \int_{\Omega} f_2 (\vartheta - u_1) \, dx$. Di qui e dalla (16) si trae [(3)] $\vartheta = u_1$, ossia vale la (12). Circa la (14) e la (15), in base alla (13), possiamo limitarci al caso $\delta > 0$. Ciò premesso, e posto $u_h = u_h(\delta, f_1, f_2)$, rileviamo anzitutto che, risultando per la (12) $u_1 + \delta > u_2$ q.o. su Ω, si ha, per la seconda delle (1), $Au_1 = f_1$ e $Au_2 = f_2$ q.o. su Ω. Pertanto, se $f_1 = f_2$ q.o. su Ω, $A(u_1 - u_2) = 0$ q.o. su Ω e quindi la (14) non appena si osservi che $u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$. Quanto alla (15), posto $\Omega_0 = \{x \in \Omega \mid u_1(x) = u_2(x)\}$, si ha [(3)] $Au_1 = Au_2$ q.o. su Ω_0 e quindi $f_1 = f_2$ q.o. su Ω_0. Ne segue mis $(\Omega_0) = 0$.

TEOREMA 3. *Si supponga* Ω *di classe* C^{k+2} *(k intero non negativo)*, $a_{ij} \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$, $(f_1, f_2) \in (H^{k,p}(\Omega))^2$ $(p \geq 2)$. *Se* $f_1 \geq f_2$ q.o. *su* Ω, *allora*:

$$u_h(\delta, f_1, f_2) \in H^{k+2,p}(\Omega). \tag{17}$$

Dimostrazione. Per la (13) basta provare la (17) per un $\delta > 0$. Ciò premesso, e posto $u_h = u_h(\delta, f_1, f_2)$, risultando, in virtù del lemma, $u_1 + \delta > u_2$ q.o. su Ω, si ha, per la seconda delle (1), $Au_h = f_h$ q.o. su Ω e di qui la (17) [3].

(3) Si tenga presente che, se Ω è un aperto di R^n e v_1 e v_2 sono elementi di $H^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty)$, posto $\Omega_0 = \{x \in \Omega \mid v_1(x) = v_2(x)\}$, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$ risulta $\partial v_1/\partial x_i = \partial v_2/\partial x_i$ q.o. su Ω_0.

OSSERVAZIONE 3. Rileviamo esplicitamente che, come prova l'esempio riportato nel N. 3, se mis $(\{x \in \Omega \mid f_1(x) < f_2(x)\}) > 0$, anche in ipotesi più restrittive sui dati la soluzione del problema in generale non appartiene ad $H^{3,p}(\Omega)$.

3. Occupiamoci dapprima della dipendenza della soluzione dai dati del problema.

TEOREMA 4. *L'applicazione*:

$$(\delta , f_1 , f_2) \in [0 , +\infty[\times (L^p(\Omega))^2 \rightarrow u_h(\delta , f_1 , f_2)$$

è continua dallo spazio $[0 , +\infty[\times (L^p(\Omega))^2$ *allo spazio* $H^{2,p}(\Omega)$ *munito della topologia debole.*

Dimostrazione. Sia infatti $(\delta , f_1 , f_2) \in [0 , +\infty[\times (L^p(\Omega))^2$. Siano poi $\{\delta_n\}$ una successione di numeri reali non negativi convergente verso δ e, per $h = 1 , 2$, $\{f_{hn}\}$ una successione di elementi di $L^p(\Omega)$ convergente in $L^p(\Omega)$ verso f_h. Posto $u_{hn} = u_h(\delta_n , f_{1n} , f_{2n})$ e $u_h = u_h(\delta , f_1 , f_2)$, in virtù del Teorema 2 e della (11) esiste una successione di interi positivi $\{n_k\}$ strettamente crescente tale che $\{u_{hn_k}\}$ e $\{Au_{hn_k}\}$ convergono debolmente rispettivamente in $H^{2,p}(\Omega)$ ed in $L^p(\Omega)$. Indicato con w_h il limite debole di $\{u_{hn_k}\}$, $w_h \in H_0^1(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega)$ e soddisfa le (3) del Teorema 1. Dunque $w_h = u_h$.

Supponiamo ora $p \geq 2$ e tale che $2p > n$; sicché $u_h(\delta , f_1 , f_2) \in C^0(\overline{\Omega})$. Consideriamo quindi l'insieme (insieme di contatto):

$$\Omega' = \{x \in \overline{\Omega} \mid u_1(x) + \delta = u_2(x)\} .$$

Dal lemma si trae che, se $f_1 \geq f_2$ q.o. su Ω e $\delta > 0$, $\Omega' = \varnothing$; se $f_1 = f_2$ q.o. su Ω e $\delta = 0$, $\Omega' = \overline{\Omega}$.

OSSERVAZIONE 4. Da quanto è stato detto si evince che, nel caso $\delta > 0$, condizione necessaria affinché $\Omega' \neq \varnothing$ è che risulti mis $(\{x \in \Omega \mid f_1(x) < f_2(x)\}) > 0$. Tale condizione non è però sufficiente, come mostra l'esempio che completa questo paragrafo.

Al fine di evidenziare ulteriori proprietà di Ω', consideriamo il caso $n = 1$, $A = -a \dfrac{d^2}{dx^2}$ $(a > 0)$, $\Omega =]-l , l[$ $(l > 0)$, e cioè il caso di contatto unilaterale tra funi.

TEOREMA 5. *Sia* $u_h = u_h(\delta , f_1 , f_2)$. *Se* c *e* d, *con* $c <$ d, *sono elementi di* $[-l , l]$ *tali che*:

$$f_1 \leq f_2 \ \text{ q.o. } su \ ]c , d[\quad , \quad u_1(c) + \delta = u_2(c) \quad , \quad u_1(d) + \delta = u_2(d)$$

allora:

$$\forall x \in [c\,,\mathrm{d}] \qquad u_1(x) + \delta = u_2(x)\,.$$

In particolare, se $f_1 \leq f_2$ q.o. *su* $]-l\,,l[\,,\ u_1(0\,,f_1\,,f_2) = u_2(0\,,f_1\,,f_2)$.

Dimostrazione. A tale scopo poniamo, $\forall x \in \overline{\Omega}\,,\ v_1(x) = u_2(x) - \delta$ e $v_2(x) = u_1(x) + \delta$ se $x \in [c\,,\mathrm{d}]\,,\ v_1(x) = u_1(x)$ e $v_2(x) = u_2(x)$ se $x \notin [c\,,\mathrm{d}]$. Evidentemente v_1 e v_2 appartengono a $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ e $(v_1\,,u_2) \in \mathrm{K}'$, $(u_1\,,v_2) \in \mathrm{K}'$; quindi (cfr. Osservazione 2)

$$a \int_c^{\mathrm{d}} u_1'(x)\,(u_2'(x) - u_1'(x))\,\mathrm{d}x \geq \int_c^{\mathrm{d}} f_1(x)\,(u_2(x) - \delta - u_1(x))\,\mathrm{d}x\,,$$

$$a \int_c^{\mathrm{d}} u_2'(x)\,(u_1'(x) - u_2'(x))\,\mathrm{d}x \geq \int_c^{\mathrm{d}} f_2(x)\,(u_1(x) + \delta - u_2(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Pertanto, osservato che $u_1 + \delta - u_2 \in \mathrm{H}_0^1(]c\,,\mathrm{d}[)$, si ha

$$\| u_1 + \delta - u_2 \|^2_{\mathrm{H}_0^1(]c,\mathrm{d}[)} \leq \text{cost.} \int_c^{\mathrm{d}} (u_1'(x) - u_2'(x))^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \text{cost.} \left(\int_c^{\mathrm{d}} u_1'(x)\,(u_1'(x) - u_2'(x))\,\mathrm{d}x - \int_c^{\mathrm{d}} u_2'(x)\,(u_1'(x) - u_2'(x))\,\mathrm{d}x \right) \leq$$

$$\leq \text{cost.} \left(\int_c^{\mathrm{d}} f_1(x)\,(u_1(x) + \delta - u_2(x))\,\mathrm{d}x - \int_c^{\mathrm{d}} f_2(x)\,(u_1(x) + \delta - u_2(x))\,\mathrm{d}x \right) =$$

$$= \text{cost.} \left(\int_c^{\mathrm{d}} (f_1(x) - f_2(x))\,(u_1(x) + \delta - u_2(x))\,\mathrm{d}x \right) \leq 0\,,$$

da cui $u_1(x) + \delta = u_2(x)\ \forall x \in [c\,,\mathrm{d}]$.

TEOREMA 6. *Se* $f_1(-x) = f_1(x)$ e $f_2(-x) = f_2(x)$ q.o. su $]-l\,,l[$, *allora* $u_h = u_h(\delta\,,f_1\,,f_2)$ *è una funzione pari. Inoltre, se* $\delta > 0$, *nell'ulteriore ipotesi*:

$$f_1 \leq f_2 \quad \text{q.o. su }]-l\,,l[\,, \qquad \Omega' \neq \varnothing\,,$$

risulta:

$$\Omega' = [-\xi\,,\xi] \quad \text{dove} \quad \xi \in [0\,,l[\,. \tag{18}$$

Dimostrazione. La parità di u_h si consegue sfruttando l'equivalenza del problema (1) con la b) del Teorema 1. La (18) discende dalla parità di u_h, in virtù del Teorema 5.

Utilizzando il Teorema 6, determiniamo infine la soluzione di un problema di contatto tra funi, dimostrando in tal modo quanto è stato asserito nelle Osservazioni 3 e 4.

Esempio. Assumiamo $n = 1$, $A = -a\dfrac{d^2}{dx^2}$ $(a > 0)$, $\Omega =]-l, l[$ $(l > 0)$, $f_1 = 0$, $f_2 = 2\alpha^2 a\delta/l^2$ $(\alpha \geq 0, \delta > 0)$. Si ha:

Se $0 \leq \alpha < 1$, $\forall x \in [-l, l]$ $u_1(x) = 0$ e $u_2(x) = \alpha^2 \delta (l^2 - x^2)/l^2$; quindi $\Omega' = \varnothing$.

Se $\alpha = 1$, $\forall x \in [-l, l]$ $u_1(x) = 0$ e $u_2(x) = \delta (l^2 - x^2)/l^2$; quindi $\Omega' = \{0\}$.

Se $\alpha > 1$, posto $\xi = l - l/\alpha$, se $x \in [-l, -\xi[$ $u_1(x) = \alpha^2 \delta\xi (l + x)/l^2$ e $u_2(x) = -\alpha^2 \delta x^2/l^2 - \alpha^2 \delta\xi (x + l)/l^2 + \alpha^2 \delta$; se $x \in [-\xi, \xi]$ $u_1(x) = -\alpha^2 \delta x^2/(2l^2) - \alpha^2 \delta\xi^2/(2l^2) + \alpha^2 \delta\xi/l$ e $u_2(x) = -\alpha^2 \delta x^2/(2l^2) - \alpha^2 \delta\xi^2/(2l^2) + \alpha\delta\xi/l + \delta$; se $x \in]\xi, l]$ $u_1(x) = \alpha^2 \delta\xi (l - x)/l^2$ e $u_2(x) = -\alpha^2 \delta x^2/l^2 + \alpha^2 \delta\xi (x - l)/l^2 + \alpha^2 \delta$; quindi $\Omega' = [-\xi, \xi]$.

BIBLIOGRAFIA

[1] V. FRANCIOSI (1969) – *Scienza delle costruzioni*, Liguori.

[2] S. P. TIMOSHENKO e S. WOINOWSKY-KRIEGER (1959) – *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill.

[3] J. NECAS (1967) – *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson.

[4] P. HARTMAN e G. STAMPACCHIA (1966) – *On some non linear elliptic functional differential equations*, «Acta Math.», *115*, 271-310.

[5] G. STAMPACCHIA (1969) – *Variational inequalities*, Pubbl. IAC., s. III, n. 25, Roma.

[6] C. MIRANDA (1970) – *Partial differential equations of elliptic type*, Springer.