Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marcello Bruni

Forme di Hilbert e proprietà estremali in una varietà a struttura quaternionale generalizzata

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **65** (1978), n.1-2, p. 63–68.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_65_1-2_63_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1978.

Geometria. — *Forme di Hilbert e proprietà estremali in una varietà a struttura quaternionale generalizzata.* Nota [(*)] di MARCELLO BRUNI [(**)], presentata dal Socio E. MARTINELLI.

SUMMARY. — Let $\mathscr{V}_n$ be an n-dimensional quaternion vector space and V_{4n} the underlying $4n$-dimensional real vector space. In $\wedge^p V_{4n}$ $(p < n)$ we define some "Hilbert forms" and investigate its extremal properties. Consequently we establish Wirtinger's minimal theorem for a quaternionic manifold.

1. Sia $\mathbf{H}$ l'$\mathbf{R}$-algebra dei quaternioni, provvista della consueta base $\{1, i, j, k\}$. Per ogni quaternione $q = q^0 + q^1 i + q^2 j + q^3 k$ la *parte reale*, la parte *immaginaria*, il quaternione *coniugato* e la *norma* sono dati, risp., da $\operatorname{Re}(q) = q^0$, $\operatorname{Im}(q) = q - \operatorname{Re}(q)$, $\bar{q} = \operatorname{Re}(q) - \operatorname{Im}(q)$, $\mathscr{N}(q) = q\bar{q}$. Porremo $\mathbf{H}^0 = \{q \mid \operatorname{Re}(q) = 0, \mathscr{N}(q) = 1\}$; è immediato che

$$(1.1) \qquad q \in \mathbf{H}^0 \Longleftrightarrow q^2 = -1 .$$

2. SPAZI VETTORIALI H E SU C

La consueta biiezione tra gli spazi vettoriali $\mathscr{V}_n$ (destro, su $\mathbf{H}$) e V_{4n}, su $\mathbf{R}$, soggiacente a $\mathscr{V}_n$, individua i sottospazi *caratteristici* V_{4p} $(p = 1, \cdots, n)$ di V_{4n}, soggiacenti ai $\mathscr{V}_p$ di $\mathscr{V}_n$ [(1)]. Uno stesso simbolo (per esempio $\boldsymbol{x}$) indicherà elementi corrispondenti in $\mathscr{V}_n$ e in V_{4n}.

Se $q \in \mathbf{H}^0$, la biiezione in V_{4n} definita da $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}q$ attribuisce a V_{4n} una struttura – che indicheremo con S_q – di spazio vettoriale su $\mathbf{C}$. Si ottengono così sottospazi V_{2s} $(s = 1, \cdots, 2n)$ che diremo $\mathbf{C}$-*caratteristici*. È ovvio che

(2.1) un V_{4p} caratteristico è $\mathbf{C}$-caratteristico in qualsiasi S_q. Viceversa:

(2.2) se $q_1, q_2, q_3 \in \mathbf{H}^0$ e sono *indipendenti* su $\mathbf{R}$, un V_{4q} $\mathbf{C}$-*caratteristico* in $S_{q_1}, S_{q_2}, S_{q_3}$ è *caratteristico.*

Infatti $\forall q' \in \mathbf{H}^0$ si ha $q' = r_0 + r_1 q_1 + r_2 q_2 + r_3 q_3$ (r_s reali); ma $\forall \boldsymbol{x} \in V_{4p}$ è per ipotesi $\boldsymbol{x}q_s \in V_{4p}$ onde $\boldsymbol{x}q' \in V_{4p}$.

(*) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1978.
(**) L'Autore fa parte del Gruppo Nazionale Strutture Algebriche, Geometriche e Applicazioni del C.N.R.
(1) Per le nozioni generali vedi per esempio [3], [7], [10].

3. Forme di Kähler

Una metrica *euclidea* in V_{4n} (prodotto scalare " $\times$ ") dà luogo alla metrica *hermitiana quaternionale* (prodotto hermitiano " $\cdot$ "):

$$x \cdot y = x \times y + (x \times yi)\, i + (x \times yj)\, i + (x \times y\, k)\, k \ ^{(2)} . \tag{3.1}$$

Per $q = q^1 i + q^2 j + q^3 k \in \mathbf{H}^0$ si ha inoltre la metrica *hermitiana complessa* relativa ad S_q (prodotto hermitiano "$\cdot_{S_q}$" o anche, brevemente " $\cdot_{(q)}$"):

$$x \cdot_{(q)} y = x \times y + (x \times yq)\, q . \tag{3.2}$$

La 2–forma esterna di *Kähler* ω_q associata ad S_q assume sul bivettore $x \wedge y$ il valore

$$\langle x \wedge y \,,\, \omega_q \rangle = 2 \operatorname{Im} (x \cdot_{(q)} y) = 2\, (x \times yq) q \ ^{(3)}. \tag{3.3}$$

Introdotte le forme *reali* $\omega'_q = \omega_q\, q$ (di particolare interesse ω'_i , ω'_j , ω'_k), dalla 3.3 con elementare calcolo discende

$$\omega'_q = q^1\, \omega'_i + q^2\, \omega'_j + q^3\, \omega'_k . \tag{3.4}$$

Nel caso quaternionale, alla 2–forma di Kähler si sostituisce la 4–forma reale:

$$\Omega = \omega'_i \wedge \omega'_i + \omega'_j \wedge \omega'_j + \omega'_k \wedge \omega'_k \ ^{(4)}. \tag{3.5}$$

Si noti che $\omega'_i \wedge \omega'_j = \omega'_j \wedge \omega'_i$ ecc.; segue da 3.5 la

(3.6) Proposizione. *Le potenze esterne di* Ω *e le potenze ordinarie del polinomio* $x^2 + y^2 + z^2$ *hanno la stessa espressione formale.*

4. Teorema di Hilbert

È essenziale per il seguito un classico teorema di Hilbert (5) secondo il quale per ogni $m \in \mathcal{N}$, la potenza m–ma di $x^2 + y^2 + z^2$ è altresì combinazione lineare, a coefficienti in $\mathbf{Q}^+$, di potenze $2\,m$ — me di polinomi di 1° grado;

$$(x^2 + y^2 + z^2)^{\,m} = \sum_{t=1}^{s} p_t\, (a_t\, x + b_t\, y + c_t\, z)^{2m \ (6)} . \tag{4.1}$$

(2) Viceversa, vedi [10], una metrica hermitiana quaternionale (o complessa) subordina una metrica euclidea in base alla $x \times y = \operatorname{Re}(x \cdot y)$. Da ciò e da 3.2 segue che alle metriche hermitiana e complessa corrisponde un'unica metrica euclidea.

(3) M. Bruni [3], n. 16.3. Talora – per esempio in [10] – non si considera il fattore 2.

(4) La forma Ω è stata indrodotta da E. Martinelli in [7]. La 3.5 si trova, per esempio, in [6].

(5) Il teorema di Hilbert mi è stato indicato dal prof. E. Bombieri che ringrazio vivamente.

(6) I coefficienti a_t , b_t , c_t sono interi. In [5] è considerato il caso – più generale – della potenza $(x_1^2 + \cdots + x_5^2)^m$; si ha, in tale caso, $s = \binom{2\,m + 4}{4}$.

In particolare, per $m = 2$, $m = 3$ si ha:

$$(4.1') \quad (x^2+y^2+z^2)^2 = \frac{1}{12}\,[(x+y+z)^4+(++-)^4-(+-+)^4+(-++)^4]+ \\ +\frac{2}{3}(x^4+y^4+z^4) \; {}^{(7)}$$

$$(4.1'') \quad (x^2+y^2+z^2)^3 = \frac{1}{60}\,[(x+y+z)^6+(++-)^6+(+-+)^6+(-++)^6]+ \\ +\frac{1}{15}\,[(x+y)^6+(+-)^6+(x+z)^6+(+-)^6+ \\ +(y+z)^6+(+-)^6]+\frac{2}{3}(x^6+y^6+z^6)\,.$$

5. FORME DI HILBERT

Introduciamo una famiglia di forme esterne la cui espressione è sostanzialmente suggerita dal secondo membro della 4.1; esse godono di interessanti proprietà estremali che ci consentiranno di estendere il teorema di minimo volume di Wirtinger al caso dei quaternioni.

Siano $r_1, r_2, \cdots, r_s \in \mathbf{R}^+$ e $q_1, q_2, \cdots, q_s \in \mathbf{H}^0$ con $q_t = \overset{1}{q_t}\, i + \overset{2}{q_t}\, j + \overset{3}{q_t}\, k$ $(t = 1, \cdots, s)$. Considerate le ω'_{q_t} (vedi n. 3) chiameremo *forme di Hilbert* le $4p$-forme $(p < n)$

$$(5.1) \qquad \Phi = \sum_{t=1}^{s} r_t \,(\wedge^{2p}\, \omega'_{q_t})\,;$$

diremo *altezza* [8] di Φ il reale $h_\Phi = \left(\sum_{t=1}^{s} r_t\right)(4p)!!\,.$

È importante osservare che, come segue da 3.6 e 4.1:

(5.2) le *potenze* esterne di Ω sono *forme di Hilbert* [9].

6. PROPRIETÀ ESTREMALI DELLE FORME DI HILBERT

Sia M_{4n} una varietà differenziabile a struttura quaternionale generalizzata. Supporremo M provvista di una metrica hermitiana quaternionale e di una 4-forma kähleriana Ω.

Considereremo gli spazi vettoriali tangenti ad M, le loro potenze esterne ed i multivettori *semplici* ossia del tipo $\xi = \boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{4p}$ con $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{4p}$

(7) Il significato di " $++-$ " è $x+y-z$; ecc.

(8) Si ricordi che $(2m)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2m)$.

(9) Con semplici calcoli si trova che le altezze di $\Omega, \Omega^2, \Omega^3$ sono, risp., $3.4\,!!$, $5.8\,!!$, $7.12\,!!$

vettori tangenti ad M in un punto. Indicheremo con mis ξ la misura euclidea assoluta di ξ [10] e diremo ξ *caratteristico* se è tale il sottospazio V_{4p} generato da $x_1, \ldots, x_{4p}$.

Ebbene, a parità di mis ξ, ogni *forma di Hilbert* valutata su ξ assume valore assoluto *massimo* quando ξ è *caratteristico.* Cioè sussiste il

(6.1) TEOREMA. *Considerati un* $4p$*–vettore semplice* ξ *ed una forma di Hilbert* Φ *risulta*

$$|\langle \xi , \Phi \rangle| \leq h_\Phi (\text{mis } \xi) \tag{6.2}$$

e si ha l'uguaglianza se ξ *è caratteristico.*

Dimostrazione. Da 5.1, poiché $r_t \in \mathbf{R}^+$, discende:

$$|\langle \xi , \Phi \rangle| \leq \sum_{t=1}^{s} r_t \, |\langle \xi , \wedge^{2p} \omega'_{q_t} \rangle| . \tag{6.3}$$

È, d'altra parte, $\wedge^{2p} \omega_{q_t} = \wedge^{2p} (\omega'_{q_t} q_t) = \pm \wedge^{2p} \omega_{q_t}$; ricordando che ω_{q_t} è la 2–forma di Kähler della struttura complessa S_{q_t} si ha [11]:

$$|\langle \xi , \wedge^{2p} \omega_{q_t} \rangle| \leq (\text{mis } \xi)(4p)!! \tag{6.4}$$

con l'uguaglianza nel solo caso che ξ sia **C**–caratteristico in S_{q_t}.

Da 6.3, 6.4, in base alla definizione di h_Φ si conclude.

Se ξ è caratteristico, per 2.1 la 6.4 diviene un'uguaglianza e perciò $\langle \xi , \wedge^{2p} \omega \rangle = \pm (\text{mis } \xi)(4p)!!$; il segno è il medesimo per tutti i valori di $t = 1, \ldots, s$ [12] onde si ha l'uguaglianza anche in 6.3 ed in 6.2.

(6.5) OSSERVAZIONE. Dalla 6.2 appare che l'*altezza* h_Φ esprime il *valore* di Φ – preso in modulo – su qualsiasi ξ *caratteristico* e di *misura* 1; dunque h_Φ dipende solo da Φ e non da $r_1, \ldots, r_t$.

(6.6) OSSERVAZIONE. Se la 6.2 è un'*uguaglianza*, ξ è *caratteristico*: a condizione, però, che tre dei quaternioni q_t associati alla forma Φ (vedi n. 5) siano indipendenti su **R**. Infatti, se è un'uguaglianza la 6.2 sono tali anche 6.3, 6.4 onde ξ è **C**–caratteristico in tre differenti strutture e, per 2.2, si conclude.

7. IL TEOREMA DI MINIMO VOLUME

Sia M_{4p} una sottovarietà quasi–kähleriana di M_{4n}. Si «deformi di poco», entro M_{4n}, una porzione di M_{4p} in modo che la M'_{4p} ottenuta abbia *lo stesso bordo* di M_{4p} [13]. Ci proponiamo di mostrare che (disuguaglianza di *Wirtinger*):

$$\text{volume } M_{4p} \leq \text{volume } M'_{4p} . \tag{7.1}$$

(10) Vedi per esempio [10], n. 5.2.

(11) E. MARTINELLI, [9], n. 8.7; si ha ivi $(2p)!$ anziché $(4p)!! = 2^{2p}(2p)!$ per quanto detto nella nota n. 3.

(12) Ciò è ovvio per ragioni di continuità su $\mathbf{H}^0$ (sfera unitaria di E^3).

(13) Indichiamo con lo stesso simbolo la varietà M_{4p} sia la porzione di essa.

Si ha cioè il

(7.2) TEOREMA. *Ogni* M_{4p} *quasi-kähleriana subordinata ad* M_{4n} *è una sottovarietà di volume minimo* [14].

Dimostrazione. Si osservi anzitutto che dalla 6.2 discende che per ogni sottovarietà N_{4p} di M_{4n} è:

$$[dV]_{N_{4p}} \geq \frac{1}{h_\Phi} \, | [\Phi]_{N_{4p}} | \tag{7.3}$$

in cui $[\Phi]_{N_{4p}}$ è il valore che la forma di Hilbert Φ assume su un multivettore « infinitesimo » associato all'elemento di volume $[dV]_{N_{4p}}$ della varietà N_{4p}. Se, in particolare, N_{4p} è quasi-kähleriana – e perciò i suoi spazi tangenti sono caratteristici – le 6.2, 7.3 diventano uguaglianze.

Ciò premesso, integriamo successivamente la 7.3 sulla M'_{4p} e sulla M_{4p}, che supponiamo contenute in un intorno U di M_{4n} rappresentabile con una sola carta di $\mathbf{R}^{4p}$.

Integrando su M'_{4p} si ottiene:

$$\text{volume } M'_{4p} \geq \frac{1}{h_\Phi} \int_{M'_{4p}} | \Phi | = \frac{1}{h_\Phi} \left| \int_{M'_{4p}} \Phi \right| \tag{7.4}$$

in cui l'ultima uguaglianza si realizza restringendo U, se necessario, in modo che Φ abbia sempre lo stesso segno su M'_{4p}.

Integrando, invece, sulla M_{4p} che è quasi-kähleriana si ha:

$$\text{volume } M_{4p} = \frac{1}{h_\Phi} \int_{M_{4p}} | \Phi | = \frac{1}{h_\Phi} \left| \int_{M_{4p}} \Phi \right| . \tag{7.5}$$

Si considerino ora le 7.4, 7.5 in relazione ad una forma di Hilbert *chiusa*; per esempio si assuma $\Phi = \wedge^p \Omega$ che è di Hilbert per 5.2 ed è chiusa perchè è tale Ω. Per il lemma di Poincaré la Φ può supporsi localmente esatta: agli integrali nei terzi membri di 7.4, 7.5 è perciò applicabile la formula di Stokes. Ricordando che M_{4p} ed M'_{4p} hanno lo stesso bordo si ha:

$$\int_{M'_{4p}} \Phi = \int_{M_{4p}} \Phi . \tag{7.6}$$

Da 7.4, 7.5, per la 7.6, discende il teorema.

(14) La proprietà è stata dimostrata da WIRTINGER in [11] per le immagini reali delle varietà analitiche di $E^n(\mathbf{C})$ e di $P^n(\mathbf{C})$; MARTINELLI in [9] ha dato una generalizzazione per tutte le varietà kähleriane e quasi-kähleriane. Nel caso dei quaternioni il teorema è stato stabilito (da BERGER, in [1]) per varietà di $P^n(\mathbf{H})$. A lavoro ultimato mi giunge notizia anche di una nota di A. GRAY (vedi [4]) nella quale si ottiene il risultato generale per altra via, utilizzando la teoria delle varietà totalmente geodetiche.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. BERGER (1972) - *Du coté de chez Pu*, «Ann. scient. Éc. Norm. Sup.», *4*, 5.

[2] M. BRUNI (1971) - *Misure euclidee, hermitiane, simplettiche e potenze esterne di uno spazio vettoriale quaternionale*, «Ann. di Mat.», *4*, 88.

[3] M. BRUNI (1974) - *Aspetti geometrici delle forme esterne in uno spazio vettoriale quaternionale*, «Ann. di Mat.», *4*, 98.

[4] A. GRAY (1965) - *Minimal varieties and almost hermitian submanifolds*, «Mich. Math. J.», *12*.

[5] D. HILBERT (1909) - *Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen*, «Math. Ann.», *67*.

[6] V. Y. KRAINES (1966) - *Topology of quaternionic manifolds*, «Trans. Amer. Math. Soc.», *122*.

[7] E. MARTINELLI (1959) - *Varietà a struttura quaternionale generalizzata*, «Rend. Lincei», *8*, 26.

[8] E. MARTINELLI (1960) - *Modello metrico reale dello spazio proiettivo quaternionale*, «Ann. di Mat.», *4*, 49.

[9] E. MARTINELLI (1960) - *Generalizzazione dei teoremi di minimo volume di Wirtinger a tutte le varietà kähleriane o quasi-kähleriane*, «Ann. di Mat.», *4*, 50.

[10] E. MARTINELLI (1969) - *Metrica hermitiana e metriche euclidea e simplettica associate*, «Rend. di Mat.», *2*, 6.

[11] W. WIRTINGER (1936) - *Eine Determinantenidentität und ihre Anwendung auf analytische Gebilde in Euklidischer und Hermitescher Massbestimmung*, «Monats. f. Math. u. Phys.», *44*.