Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marino Palleschi

Sui divisori di prima specie di una varietà algebrica non singolare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **64** (1978), n.5, p. 452–457.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_5_452_0>

Geometria algebrica. — *Sui divisori di prima specie di una varietà algebrica non singolare* (*). Nota II di MARINO PALLESCHI, presentata (**) dal Corrisp. E. MARCHIONNA.

SUMMARY. — In the previous same-titled Note I we characterized the divisors of the first kind belonging to a non-singular algebraic variety. In this paper we extend those results to the divisors q-times of the first kind, $(q > 1)$.

4. Vogliamo ora definire e caratterizzare i divisori q–volte di prima specie, $(q \geq 1)$.

Ricordiamo il concetto di varietà quasi caratteristica d'indice q di un sistema ampio $|X|$ tracciato sopra la varietà non singolare V_d, $(d \geq 2$, $q \leq d-1)$. Consideriamo q multipli positivi $|m_1 X|, |m_2 X|, \cdots, |m_q X|$ del sistema $|X|$, eventualmente coincidenti del tutto od in parte. Dai suddetti sistemi ampi $|m_j X|$ si estraggano q ipersuperficie non singolari e distinte X_{m_j} $(j = 1, 2, \cdots, q)$ tali che le sottovarietà

$$V_{d-i} = \bigcap_{j=1}^{i} X_{m_j}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, q),$$

risultino non singolari ed abbiano dimensione regolare $d-i$.

La sottovarietà V_{d-q} verrà detta *varietà quasi caratteristica d'indice* q *del sistema lineare ampio* $|X|$.

Applicando iteratamente l'Osservazione 3 del n. 1 (Nota I) si ottiene la

PROPOSIZIONE 8. *Sia* V_d *una varietà non singolare di dimensione* $d \geq 3$. *Si consideri la varietà quasi caratteristica*

$$V_{d-i} = X_{m_1} \cap X_{m_2} \cap \cdots \cap X_{m_i}, \qquad (1 \leq i < q < d).$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè per ogni intero relativo l *si abbia su* V_d

$$(4.1) \qquad H^1(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = H^2(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = \cdots$$
$$\cdots = H^q(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = (0),$$

è che su V_{d-i} *risulti per ogni* l

$$(4.2) \qquad H^1(V_{d-i}, \mathcal{O}_{V_{d-i}}((lX - A) \cdot V_{d-i})) = H^2(V_{d-i}, \mathcal{O}_{V_{d-i}}((lX - A) \cdot V_{d-i})) = \cdots$$
$$\cdots = H^{q-i}(V_{d-i}, \mathcal{O}_{V_{d-i}}((lX - A) \cdot V_{d-i})) = (0).$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
(**) Nella seduta dell'8 aprile 1978.

In particolare qualora si ponga $i = q - 1$, si ottiene la

PROPOSIZIONE 9. *Si consideri su* V_d $(d \geq 3)$ *una varietà quasi caratteristica fissata* V_{d-q+1} *d'indice* $q - 1$ $(\leq d - 2)$. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè per ogni intero relativo* l *si abbia su* V_d

$$\begin{aligned} H^1(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) &= H^2(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = \cdots \\ \cdots &= H^q(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = (0), \end{aligned}$$

è che su V_{d-q+1} *risulti per ogni* l

$$H^1(V_{d-q+1}, \mathcal{O}_{V_{d-q+1}}((lX - A)\cdot V_{d-q+1})) = (0).$$

Ciò posto, dimostriamo il

TEOREMA 10. *Sia* V_{d-q} *una* FISSATA *varietà quasi caratteristica d'indice* q *del sistema ampio* $|X|$ *tracciato su* V_d, $(d \geq 2\,;\ 1 \leq q \leq d - 1)$.

Se per ogni intero relativo l *il sistema lineare* COMPLETO $|lX - A|$ *della varietà* V_d *taglia un sistema lineare* COMPLETO *su* V_{d-q}, *allora risulta per ogni* l

$$\begin{aligned} H^1(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) &= H^2(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = \cdots \\ \cdots &= H^q(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = (0). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Nel caso $q = 1$ l'asserto attuale si riduce al Teorema 5. Proviamo dunque il Teorema 10 per $q > 1$; si ha allora necessariamente $d \geq 3$.

Consideriamo la varietà quasi caratteristica

$$V_{d-q} = X_{m_1} \cap \cdots \cap X_{m_{q-1}} \cap X_{m_q}$$

e la varietà quasi caratteristica immediatamente precedente

$$V_{d-q+1} = X_{m_1} \cap \cdots \cap X_{m_{q-1}}.$$

Per ipotesi il sistema lineare $(T_l) = |lX - A|\cdot V_{d-q}$ tracciato su V_{d-q} risulta completo per ogni l, ossia coincide con il sistema lineare $|T_l| = |(lX - A)\cdot V_{d-q}|$.

Consideriamo il sistema lineare $(S_l) = |(lX - A)|\cdot V_{d-q+1}$ tracciato su V_{d-q+1}. Esso taglia su $V_{d-q} = V_{d-q+1} \cap X_{m_q}$ il sistema lineare

$$(T_l) = |lX - A|\cdot V_{d-q} = |T_l|.$$

Inoltre il sistema lineare *completo* $|S_l| = |(lX - A)\cdot V_{d-q+1}|$ tracciato su V_{d-q+1}, contenendo totalmente il sistema (S_l), taglia su V_{d-q} un sistema lineare, che, a priori, contiene totalmente (T_l).

Ma, essendo (T_l) completo, ne deduciamo che il sistema completo $|S_l|$ taglia su V_{d-q} il sistema completo $|T_l|$. Poichè ciò accade per ogni l, e poichè $V_{d-q} = V_{d-q+1} \cap X_{m_q}$, è possibile applicare il Teorema 5 al divisore $A\cdot V_{d-q+1}$ ed al sistema lineare ampio $|X\cdot V_{d-q+1}|$ della varietà V_{d-q+1}, ottenendo

$$H^1(V_{d-q+1}, \mathcal{O}_{V_{d-q+1}}((lX - A)\cdot V_{d-q+1})) = (0),$$

per ogni l. La Proposizione 9 fornisce la tesi.

5. Generalizziamo, d'accordo con Marchionna [7], il concetto di divisore di prima specie.

Sopra una varietà algebrica non singolare V_d, $(d \geq 2)$, consideriamo un sistema lineare ampio $|X|$.

Diremo che un divisore A *di* V_d *è q–volte di prima specie* (modulo $|X|$), $(q \leq d - 1)$, *se per ogni intero relativo* l *il sistema lineare* COMPLETO $|lX - A|$ *tracciato su* V_d *taglia un sistema* COMPLETO *sopra una qualsiasi varietà quasi caratteristica d'indice* q *del sistema* $|X|$.

Per $q = 1$ si riottiene la definizione di divisore di prima specie presentata nel paragrafo 3.

Sussiste il

TEOREMA 11. *Siano* A *un divisore di* V_d, $(d \geq 2)$, *ed* $|X|$ *un sistema lineare ampio tracciato su* V_d. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* A *sia q–volte di prima specie* modulo $|X|$, *con* $1 \leq q \leq d - 1$, *è che per ogni intero relativo* l *risulti*

$$(5.1) \qquad H^1(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = H^2(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = \cdots$$
$$\cdots = H^q(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = (0).$$

Dimostrazione. La condizione è necessaria per il Teorema 10.

Nel caso $d = 2$ la condizione sufficiente discende dal Teorema 6; dimostriamola dunque per $d \geq 3$. Consideriamo una varietà quasi caratteristica d'indice q del sistema ampio $|X|: V_{d-q} = \bigcap_{j=1}^{q} X_{m_j}$.

Denotiamo con $V_{d-i} = \bigcap_{j=1}^{i} X_{m_j}$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ le varietà quasi caratteristiche intermedie.

Mostreremo addirittura che, *supposte valide le* (5.1), *per ogni intero relativo* l, *il sistema lineare completo* $|lX - A|$ *tracciato su* V_d *taglia un sistema completo su* OGNI *varietà quasi caratteristica* V_{d-i}.

Il Teorema 6 (Nota I; n. 3) assicura che ciò avviene nel caso $i = 1$. Pertanto è sufficiente mostrare che, se la proprietà in questione sussiste per V_{d-i}, allora essa sussiste pure per V_{d-i-1}, $(i \leq q - 1 \leq d - 2)$.

Orbene le ipotesi (5.1) garantiscono che è possibile applicare la Proposizione 8. Dunque su V_{d-i} sussistono le relazioni (4.2).

In particolare per ogni l si ha

$$(5.2) \qquad H^1(V_{d-i}, \mathcal{O}_{V_{d-i}}((lX - A)\cdot V_{d-i})) = (0).$$

Ciò è sufficiente per poter applicare l'Osservazione 4 (Nota I, n. 2) relativamente alla varietà V_{d-i}, alla sua ipersuperficie $V_{d-i-1} = V_{d-i} \cap X_{m_{i+1}}$ ed al sistema lineare completo tracciato su V_{d-i}

$$|D'| = |(lX - A + X_{m_{i+1}})\cdot V_{d-i}|.$$

Di conseguenza, posto $l' = l + m_{i+1}$, se ne deduce che per ogni l' il sistema completo $|D'| = |(l' X - A) \cdot V_{d-i}|$ tracciato su V_{d-i} taglia un sistema completo su V_{d-i-1}.

Avendo supposto vero il Teorema 11 su V_{d-i}, abbiamo $|lX - A| \cdot V_{d-i} = |(lX - A) \cdot V_{d-i}|$ per ogni intero relativo l.

Dunque sopra V_{d-i-1} è pure completo il sistema lineare

$$|lX - A| \cdot V_{d-i-1} = |D'| \cdot V_{d-i-1} .$$

OSSERVAZIONE 12. Le condizioni espresse dalla definizione di divisore q–volte di prima specie sono sovrabbondanti. Infatti *se per ogni intero relativo l il sistema lineare completo $|lX - A|$ tracciato su V_d taglia un sistema anche esso completo sopra una* FISSATA *varietà quasi caratteristica V_{d-q} d'indice q del sistema ampio $|X|$, allora A è q–volte di prima specie* (modulo $|X|$), ossia per ogni l il sistema lineare completo $|lX - A|$ taglia un sistema lineare completo su *ogni* varietà quasi caratteristica d'indice q del sistema $|X|$.

Basta osservare che, in virtù del Teorema 10, sussistono le (4.3) per ogni l. Applicando il Teorema 11 si deduce che il divisore A è q–volte di prima specie (modulo $|X|$)

OSSERVAZIONE 13. Se le (5.1) sono soddisfatte per ogni intero relativo l, esse sussistono, a maggior ragione, per ogni $l' = ln$ con n intero positivo. Dunque *se il divisore A è q–volte di prima specie* modulo $|X|$, *esso è q–volte di prima specie modulo un qualunque multiplo positivo di $|X|$*.

Inoltre le (5.1) mostrano che se $1 \leq p < q$, *e se il divisore A è q–volte di prima specie* modulo $|X|$, *allora A è pure p–volte di prima specie* modulo $|X|$.

TEOREMA 14. *Se il divisore A è q–volte di prima specie*, $(1 \leq q \leq d - 1)$, *modulo un sistema ampio $|X|$, allora risulta*

$$\text{(5.3)} \qquad H^1(V_d, \mathcal{O}(-A)) = H^2(V_d, \mathcal{O}(-A)) = \cdots = H^q(V_d, \mathcal{O}(-A)) = (0) .$$

Viceversa se le (5.3) sono soddisfatte, allora A è q–volte di prima specie modulo un conveniente multiplo di un qualunque sistema ampio.

Dimostrazione. La prima parte segue ponendo $l = 0$ nelle (5.1). Per verificare la seconda fissiamo un arbitrario sistema ampio $|X|$.

In virtù dell'Osservazione 1 (Nota I, n. 1) esistono due interi ν_1 e ν_2 tali che per ogni intero $l \geq \nu_1$ oppure $l \leq \nu_2$ risulta

$$\text{(5.4)} \qquad H^t(V_d, \mathcal{O}(lX - A)) = (0) , \qquad (t = 1, 2, \cdots, d - 1) .$$

Ciò posto si scelga un intero $n > 0$ tale che sia $n \geq \nu_1$, $-n \leq \nu_2$. Allora dalla (5.4) segue

$$\text{(5.5)} \qquad H^t(V_d, \mathcal{O}(lnX - A)) = (0) , \qquad (t = 1, 2, \cdots, d - 1) ,$$

per ogni intero relativo $l \neq 0$. Ma l'ipotesi (5.3) afferma che le precedenti relazioni (5.5) sussistono, limitatamente al caso $t = 1, 2, \cdots, q$, anche per $l = 0$. Dunque, in virtù del Teorema 11, il divisore A è q–volte di prima specie modulo il sistema lineare ampio $|nX|$.

Nota. Consideriamo su una varietà algebrica non singolare V_d un divisore D e $d - 1$ ipersuperficie non singolari *generiche* $X_1, X_2, \cdots, X_p, \cdots, X_{d-1}$ estratte da $d-1$ sistemi ampi $|X_i|$, $(i = 1, 2, \cdots, d-1)$, tali che i vari sistemi $|X_i + D - K|$ siano ampi.

Le sottovarietà $V_{d-p} = X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_p$, $(1 \leq p \leq d-1)$, sono non singolari ed hanno dimensione regolare $d - p$.

Consideriamo il sistema lineare completo $|D_p| = |D + X_1 + \cdots + X_p|$ tracciato su V_d ed il sistema lineare $|D_p| \cdot V_{d-p}$ tagliato da $|D_p|$ su V_{d-p}.

La deficienza $\sigma^p[D]$ del sistema $|D_p| \cdot V_{d-p}$ dipende soltanto da D e non dalle ipersuperficie X_i sopra introdotte (ciò è stato provato per via coomologica da Hodge in [1] e per via geometrica da Marchionna). Si dice che i $d - 1$ carat eri $\sigma^1[D], \sigma^2[D], \cdots, \sigma^{d-1}[D]$ sono gli indici di irregolarità del divisore D e del sistema completo $|D|$.

Marchionna ha dimostrato in [6] che *un sistema ampio* $|X|$ *di* V_d *è normale di specie* q *modulo il divisore* $-A$ *se e solo se risulta*

$$\sigma^1[lX - A] = \sigma^2[lX - A] = \cdots = \sigma^q[lX - A] = 0 \tag{5.6}$$

per ogni intero relativo l.

Orbene il fatto che il sistema $|X|$ sia normale di specie q modulo $-A$ significa (nella nostra nomenclatura che coincide con quella adoperata dallo stesso Marchionna in [7]) che il divisore A è q–volte di prima specie modulo $|X|$. D'altra parte Hodge ha dimostrato in [1] che

$$\sigma^p[D] = \dim H^p(V_d, \mathcal{O}(D)) .$$

Pertanto il nostro Teorema 11 esprime in forma coomologica il citato risultato di Marchionna. Considerazioni analoghe si potrebbero fare per altre proposizioni esposte nel presente lavoro.

6. Supponiamo che la varietà algebrica non singolare V_d sia *aritmeticamente normale*. Ciò equivale ad affermare che per ogni intero $n > 0$ è completo il sistema lineare (E_n) segato su V_d dalla totalità delle forme d'ordine n dello spazio ambiente; ossia $(E_n) = |E_n|$.

Denoteremo con $E = E_1$ una generica sezione iperpiana di V_d; con W_{d-q} una generica varietà quasi caratteristica d'indice q del sistema lineare ampio $|E|$. In altri termini W_{d-q} è l'intersezione di V_d con q forme generiche dello spazio ambiente.

Consideriamo su V_d lo zero Z dell'equivalenza lineare. Nel caso attuale si vede subito (cosa del resto già osservata in [7]) che *la condizione affinchè*

Z sia un divisore q–volte di prima specie modulo $|E|$ *equivale al fatto che le forme d'ogni ordine n taglino un sistema lineare completo sopra una qualunque varietà* W_{d-q}.

Ciò significa che ogni sottovarietà W_{d-q} *è anch'essa aritmeticamente normale.* Sussiste in proposito il

TEOREMA 15. *Sia* $V_d\,(d \geq 2)$ *una varietà non singolare ed aritmeticamente normale. Condizione necessaria e sufficiente affinchè la generica varietà quasi caratteristica d'indice* q, W_{d-q}, *del sistema* $|E|$ *risulti aritmeticamente normale, è che, per ogni intero* $m \geq 0$ *sia*

$$(6.1)\qquad H^1(V_d\,,\,\mathcal{O}(mE)) = H^2(V_d\,,\,\mathcal{O}(mE)) = \cdots = H^q(V_d\,,\,\mathcal{O}(mE)) = (0)\,.$$

Per la dimostrazione basta applicare il Teorema 11 con $A = Z\,, X = E$ ed osservare che dal teorema di dualità di Serre e dal teorema di regolarità dell'aggiunto di Kodaira e Spencer segue, *per ogni intero* $l < 0$,

$$H^t(V_d\,,\mathcal{O}(lE)) \simeq H^{d-t}(V_d\,,\mathcal{O}(K-lE)) = (0)\,,\qquad (t = 1\,,2\,,\cdots,d-1)\,.$$

Il Teorema 15 fornisce la versione coomologica del Teorema 7 contenuto in [5]. Una proposizione analoga relativa alle varietà di prima specie si trova già in Serre [9].

BIBLIOGRAFIA

[1] W. V. D. HODGE (1955) – *A note on the Riemann–Roch Theorem*, « Journal London Math. Soc. », *30*, 291–296.

[2] K. KODAIRA (1953) – *On cohomology groups of compact analytic varieties with coefficients in some analytic faisceaux*, « Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. », *39*, 865–868.

[3] K. KODAIRA (1954) – *Some results in the transcendental theory of algebraic varieties*, « Annals of Math. », *59*, 86–133.

[4] K. KODAIRA e D. C. SPENCER (1953) – *Divisor class groups on algebraic varieties*, « Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. », *39*, 872–877.

[5] E. MARCHIONNA (1961) – *Sui multipli del sistema delle sezioni iperpiane di una varietà algebrica non singolare*, « Annali di Matem. », ser. IV, *54*, 159–199.

[6] E. MARCHIONNA (1962) – *Sui multipli dei sistemi lineari d'ipersuperficie appartenenti ad una varietà algebrica pluriregolare*, « Rendiconti di Matematica », (3–4), *21*, 322–353.

[7] E. MARCHIONNA (1971) – *Sui divisori di prima specie di una varietà algebrica*, « Symposia Mathematica » (Ist. Naz. Alta Matematica), vol. V, Academic Press, 439–456.

[8] J. P. SERRE (1955) – *Un théorème de dualité*, « Comment. Math. Helv. », *29*, 9–26.

[9] J. P. SERRE (1955) – *Faisceaux algébriques cohérents*, « Annals of Mathem. », *61*, 197–278.