
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

MARGARETA IGNAT

**Sulle onde piane in un plasma rarefatto, radiativo,
elettricamente anisotropo. Parte I. Equazioni delle
piccole perturbazioni**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 64 (1978), n.3, p. 280-284.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1978_8_64_3_280_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Magnetofluidodinamica. — *Sulle onde piane in un plasma rarefatto, radiativo, elettricamente anisotropo.* Parte I. *Equazioni delle piccole perturbazioni.* Nota di MARGARETA IGNAT, presentata (*) dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — Starting from the equations established by Agostinelli for the study of the wave surfaces in a electrically anisotropic plasma, in this paper we propose to investigate the propagation of plasma waves in a rarefied, radiative plasma, yet electrically anisotropic. In this first part, using the method of the small perturbations, we get, for the unknowns of the problem, a system of linearized equations and then we reduce the question to the consideration of three vectorial equations only in which the unknowns are: the velocity vector, the current density and the heat flux vector.

1. INTRODUZIONE

Utilizzando le equazioni di Maxwell, in [1] sono stati studiati le superficie d'onda per un plasma elettricamente anisotropo.

Nel presente lavoro ci siamo proposti di indagare le onde piane che si propagano in un plasma rarefatto, radiativo, pure elettricamente anisotropo.

Per questo, si parte dal sistema fondamentale di equazioni (I), il quale si linearizza mediante il metodo delle piccole perturbazioni. Adoperando il sistema linearizzato così ottenuto, si ricavano 3 equazioni fondamentali nelle sole incognite: la velocità $\mathbf{v}$, la densità della corrente $\mathbf{I}$ e il vettore del flusso di calore radiativo $\mathbf{q}^{(R)}$.

Si cercano per tutte le quantità perturbate soluzioni sotto la forma di onde piane, di pulsazione ω data e con il vettore d'onda $\mathbf{X}$ nel piano xz . Per poter analizzare l'equazione di dispersione e trovare i tipi di onde alle quali essa si riferisce, sono stati considerati due casi particolari notevoli: quello della propagazione lungo il campo magnetico iniziale $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{k}$, e l'altro della propagazione perpendicolare al campo $\mathbf{B}_0$.

Nel primo caso, ($\mathbf{X} // \mathbf{B}_0$), l'analisi del sistema di equazioni (IV) ci conduce all'esistenza di 3 tipi di onde piane: 1) onde elettromagnetiche generalizzate smorzate, caratterizzate dall'equazione di dispersione $X^2 - \omega^2 \mu \epsilon_{10} + i\omega \mu \sigma_0 = 0$; 2) onde magnetoluminose generalizzate, dove, a causa dell'anisotropia della pressione, la velocità di Alfvén sarà modificata e avrà l'espressione $V_a^{2'} = V_a^2 + c_1^2 - c_{||}^2$; 3) onde termoacustiche generalizzate, le quali, in assenza di assorbimento ($\alpha_0 = 0$), si riducono ad onde di tipo acustico generalizzato.

(*) Nella seduta dell'11 marzo 1978.

Se la propagazione è ortogonale al campo $\mathbf{B}_0$, ($\mathbf{X} \perp \mathbf{B}_0$), dal sistema (V) si mettono in evidenza: 1) onde elettromagnetiche generalizzate smorzate, soddisfacenti all'equazione $X^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_{//0} + i\omega \mu \sigma_e = 0$ e 2) un tipo di onde più complesse dalle quali, se $\alpha_0 = 0$ si staccano le onde radiative (che si propagano con la velocità $\omega/X = \pm c/\sqrt{3}$) e altrettante onde caratterizzate da un'equazione quadratica in X^2 , conducente per $\sigma_e = 0$ alle soluzioni: $X_1^2 = \omega^2/c_1^2$ (onde acustiche generalizzate) e $X_2^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{10}$ (onde elettromagnetiche generalizzate) e nel caso $\sigma_e \rightarrow \infty$ ad onde di Alfvén modificate dall'anisotropia della pressione e da quella della permittività elettrica.

2. IL SISTEMA DI EQUAZIONI

Si considera un plasma rarefatto, sottoposto all'azione di un campo magnetico forte, ad elevata temperatura e con proprietà elettriche anisotrope descritte dal tensore di permittività ε . In queste condizioni è opportuna l'approssimazione CGL [2] con l'aggiunta delle equazioni di trasporto radiativo [3]. Il sistema fondamentale descrivente il nostro problema sarà allora il seguente

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{div } \mathbf{B} = 0), \\
 \text{rot } \mathbf{B} &= \mu \mathbf{I} + \mu \frac{\partial (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t}, \quad \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_1 \mathbf{E} + (\varepsilon_{//} - \varepsilon_1) (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{B}}) \hat{\mathbf{B}}, \\
 \hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{B}/B, \\
 \text{div } (\varepsilon \mathbf{E}) &= \rho_e, \quad \mathbf{I} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \rho_e \mathbf{v}, \\
 \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div } \mathbf{I} &= 0, \\
 \text{(I)} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } (\rho \mathbf{v}) &= 0, \quad \overleftrightarrow{\mathbf{P}} = P_1 \overleftrightarrow{\mathbf{I}} + (P_{//} - P_1) \hat{\mathbf{B}} \otimes \hat{\mathbf{B}}, \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{P_{//} B^2}{\rho^3} \right) &= 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{P_1}{\rho B} \right) = 0, \\
 \frac{\partial \mathbf{E}^{(R)}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{q}^{(R)} &= -\alpha (c \mathbf{E}^{(R)} - 4 \sigma \mathbf{T}^4), \\
 \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{q}^{(R)}}{\partial t} + \frac{c}{3} \text{grad } \mathbf{E}^{(R)} &= -\alpha \mathbf{q}^{(R)}, \\
 \rho T \frac{dS}{dt} + \frac{4 \mathbf{E}^{(R)}}{3} \text{div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{E}^{(R)} &= \alpha (c \mathbf{E}^{(R)} - 4 \sigma \mathbf{T}^4), \\
 T &= T(\rho, S),
 \end{aligned}$$

dove: $\mathbf{E}$ - è l'intensità del campo elettrico, $\varepsilon_{//}$ e ε_1 sono le componenti della permittività nelle direzioni parallela e perpendicolare al campo magnetico, $\mathbf{B}$ - è l'induzione magnetica, μ - è la permeabilità magnetica, $\mathbf{I}$ - la densità della

corrente, ρ_e - la densità di carica elettrica, σ_e - la conduttività elettrica, ρ - la densità, $\mathbf{v}$ - la velocità del plasma, $\mathbf{P}$ - il tensore delle pressioni con $P_{||}$ e $P_{\perp}$ le componenti parallela e perpendicolare al campo magnetico, $\otimes$ - è il simbolo di prodotto tensoriale, $\mathbf{I}$ - è il tensore unità, $E^{(R)}$ - la densità dell'energia di radiazione, $\mathbf{q}^{(R)}$ - il vettore del flusso di calore radiativo, α - il coefficiente di assorbimento, c - la velocità della luce, σ - la costante di Stefan-Boltzmann, T - la temperatura assoluta e S - l'entropia.

La presenza di qualche piccola perturbazione fa sì che il plasma, che trovavasi inizialmente in un stato di quiete nel campo magnetico $\mathbf{B}_0$, parallelo all'asse z , sia caratterizzato ora dalle relazioni

$$(I) \quad \rho = \rho_0 (1 + \eta) \quad ; \quad P_{||} = P_{||0} + \rho_0 p_{||} \quad ; \quad P_{\perp} = P_{\perp 0} + \rho_0 p_{\perp} ; \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} B_0 \quad ; \quad \mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{k}, \text{ etc.}$$

dove l'indice zero si riferisce allo stato imperturbato, mentre le quantità:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad , \quad \mathbf{I}(\mathbf{r}, t) \quad , \quad \rho_e(\mathbf{r}, t) \quad , \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}}{B_0} , \\ \varepsilon_{||}(\mathbf{r}, t) \quad , \quad \varepsilon_{\perp}(\mathbf{r}, t) \quad , \quad \mathbf{q}^{(R)}(\mathbf{r}, t)$$

etc., rappresentano le perturbazioni.

Introducendo (I) in (I), per un processo di linearizzazione, otteniamo il seguente sistema

$$(II) \quad \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{e} &= -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} , \quad (\text{div } \mathbf{b} = 0) , \\ \text{rot } \mathbf{b} &= \frac{\mu \mathbf{I}}{B_0} + \mu \varepsilon_{\perp 0} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \mu (\varepsilon_{||0} - \varepsilon_{\perp 0}) \frac{\partial (\varepsilon_z \mathbf{k})}{\partial t} , \\ \varepsilon_{\perp 0} \text{div } \mathbf{e} + (\varepsilon_{||0} - \varepsilon_{\perp 0}) \text{div } (\varepsilon_z \mathbf{k}) &= \rho_e / B_0 , \\ \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div } \mathbf{I} &= 0 \quad , \quad \mathbf{I} = \sigma_e B_0 (\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{k}) , \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{div } \mathbf{v} &= 0 , \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } p_{\perp} + \frac{\partial}{\partial z} (p_{||} - p_{\perp}) \mathbf{k} + (c_{||}^2 - c_{\perp}^2) \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z} - 2 \frac{\partial b_z}{\partial z} \mathbf{k} \right) - \\ &\quad - \frac{B_0}{\rho_0} \mathbf{I} \times \mathbf{k} + \frac{1}{3} \text{grad } E^{(R)} = 0 , \\ \frac{\partial p_{||}}{\partial t} + 3 c_{||}^2 \text{div } \mathbf{v} + 2 c_{||}^2 \frac{\partial b_z}{\partial t} &= 0 , \\ \frac{\partial p_{\perp}}{\partial t} + c_{\perp}^2 \text{div } \mathbf{v} - c_{\perp}^2 \frac{\partial b_z}{\partial t} &= 0 , \\ \frac{\partial E^{(R)}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{q}^{(R)} &= 4 \sigma (\alpha + \alpha_0) T_0^4 - \alpha_0 (c E^{(R)} - 16 \sigma T_0^3 T) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{q}^{(R)}}{\partial t} + \frac{c}{3} \text{grad } E^{(R)} = -\alpha_0 \mathbf{q}^{(R)}, \\
 (II) \quad & \rho_0 T_0 \frac{\partial S}{\partial t} = \alpha_0 (c E^{(R)} - 16 \sigma T_0^3 T) - 4 \sigma (\alpha + \alpha_0) T_0^4, \\
 & T = \left(\frac{\partial T_0}{\partial \rho_0} \right)_{s_0} \rho_0 \eta + \frac{T_0}{C_{V_0}} S,
 \end{aligned}$$

dove: $c_{||}^2 = P_{||0}/\rho_0$, $c_{\perp}^2 = P_{\perp 0}/\rho_0$ sono le velocità del suono nella direzione parallela e quella perpendicolare al campo magnetico $\mathbf{B}_0$; $\mathbf{k}$ - è il versore dell'asse z e C_{V_0} è la capacità calorica del plasma a volume costante.

Nel sistema (II) le incognite sono accoppiate. Conviene ridurle eliminando qualche incognita. Così, applicando alla (II.2) l'operatore rot, in virtù alla (II.1) e tenendo conto dal fatto che: $\text{rot rot } \mathbf{b} = \text{grad div } \mathbf{b} - \Delta \mathbf{b} = -\Delta \mathbf{b}$, si trova

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \left[\mu \sigma_e \left(1 + \frac{\varepsilon_{10}}{\sigma_e} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right] \mathbf{b} = \sigma_e \mu \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{k}) + \\
 & + \mu (\varepsilon_{||0} - \varepsilon_{10}) \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} (e_z \mathbf{k}).
 \end{aligned}$$

Per mezzo della (II.4_b) si elimina poi il vettore $\mathbf{e}$ dalla (II.2) e si applica all'ottenuta equazione l'operatore $\left[\mu \sigma_e \left(1 + \frac{\varepsilon_{10}}{\sigma_e} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right]$. Ricordando (2) si perviene alla relazione

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \frac{1}{B_0} \left[\mu \sigma_e \left(1 + \frac{\varepsilon_{10}}{\sigma_e} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right] \cdot \\
 & \cdot \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_{10}}{\sigma_e} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{I} + \frac{(\varepsilon_{||0} - \varepsilon_{10})}{\sigma_e B_0} \frac{\partial I_z}{\partial t} \mathbf{k} \right] - \\
 & - \frac{(\varepsilon_{||0} - \varepsilon_{10})}{\sigma_e B_0} \frac{\partial}{\partial t} [\text{rot rot} (I_z \mathbf{k})] = \sigma_e \text{rot rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{k}) + \\
 & + \varepsilon_{10} \left[\mu \sigma_e \left(1 + \frac{\varepsilon_{10}}{\sigma_e} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right] \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \times \mathbf{k} \right),
 \end{aligned}$$

in cui le sole incognite sono i vettori $\mathbf{I}$ e $\mathbf{v}$.

Riferendoci ora alle equazioni (II.9)-(II.12), adoperando l'espressione di T data da (II.12) e anche quella di $\text{grad } E^{(R)}$ data da (II.10), col gradiente di entrambi i membri dalle formule (II.9) e (II.11), arriviamo alle relazioni

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \rho_0 T_0 \frac{\partial \nabla S}{\partial t} + \frac{16}{C_{V_0}} \sigma \alpha_0 T_0^4 \nabla S = -3 \alpha_0 \left(\alpha_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{q}^{(R)} - \\
 & - 16 \sigma \alpha_0 T_0^3 \left(\frac{\partial T_0}{\partial \rho_0} \right)_{s_0} \nabla \eta. \\
 & - \frac{3}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{q}^{(R)} + \text{grad div } \mathbf{q}^{(R)} = -\rho_0 T_0 \frac{\partial \nabla S}{\partial t}.
 \end{aligned}$$

Eliminando adesso la funzione S per mezzo della (4₂), si ottiene la seguente equazione nei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{q}^{(R)}$:

$$(5) \quad \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{16 \sigma \alpha_0 T_0^3}{\rho_0 C_{V_0}} \right) \left[\frac{3}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) - \text{grad div} \right] + \right. \\ \left. + 3 \alpha_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\alpha_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\} \mathbf{q}^{(R)} = 16 \sigma \alpha_0 T_0^3 \rho_0 \left(\frac{\partial T_0}{\partial \rho_0} \right)_{S_0} \text{grad div } \mathbf{v}.$$

Infine, la (II.6) si deriva rispetto al tempo. Prendendo in considerazione le (II.7) e (II.8) ed anche le (II.4₂) e (II.1) si ricava

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + c_1^2 \text{grad} \left[\text{rot}_z (\mathbf{v} \times \mathbf{k}) - \frac{1}{\sigma_e B_0} \text{rot}_z \mathbf{I} - \text{div } \mathbf{v} \right] - \\ - (3 c_{||}^2 - c_1^2) \frac{\partial}{\partial z} (\text{div } \mathbf{v}) \mathbf{k} - (4 c_{||}^2 - c_1^2) \frac{\partial}{\partial z} \left[\text{rot}_z (\mathbf{v} \times \mathbf{k}) \right] \mathbf{k} + \\ + \frac{(4 c_{||}^2 - c_1^2)}{\sigma_e B_0} \frac{\partial}{\partial z} (\text{rot}_z \mathbf{I}) \mathbf{k} - \frac{(c_{||}^2 - c_1^2)}{\sigma_e B_0} \frac{\partial}{\partial z} (\text{rot } \mathbf{I}) + (c_{||}^2 - c_1^2) \cdot \\ \frac{\partial}{\partial z} \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{k}) - \frac{B_0}{\rho_0} \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t} \times \mathbf{k} - \frac{1}{c} \left(\alpha_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \mathbf{q}^{(R)}}{\partial t} = 0,$$

La questione viene così ridotta alla considerazione di tre sole equazioni differenziali vettoriali di base (3), (5) e (6) contenenti come incognite i vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{I}$ e $\mathbf{q}^{(R)}$. Una volta determinati questi vettori, le altre grandezze risulteranno successivamente nel modo seguente: dalla (II.4₂) - il vettore $\mathbf{e}$; dalla (II.1), con una quadratura rispetto al tempo, il vettore $\mathbf{b}$; dalla (II.4₁) - ρ_e ; dalla (II.5) - η ; dalle (II.7) e (II.8) - le $p_{||}$ e p_1 ; dalla (4₂) - S ; dalla (II.12) - T ; dalla (II.11) - α e finalmente dalla (II.9) - $\mathbf{E}^{(R)}$.